CONTROLLO LINEARE CONVESSO

Generalizziamo il contesto, andando ad analizzare il problema:

Minimizzare, per $s \in [0,T[$, il funzionale

$$J_s(x,u) = \int_s^T [g(y(t)) + h(u(t))]\,dt + \phi(y(T))$$

tra le $u \in L^2(s,T,U)$, con $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [s,T] \\ y(s) = x, \end{cases}$

sotto queste ipotesi: X, U spazi di Hilbert separabili;

$T > 0$, $x \in X$, $B \in \mathcal{L}(U,X)$, $A : D(A) \subseteq X \to X$ gi. di un sgfc G;

$g, \phi : X \to [0,\infty[$ convesse di classe C^1;

$h : U \to [0,\infty[$ strettamente convessa, di classe C^1, tale che

$$h(u) \geq a\|u\|_U^2 + b \quad \forall u \in U, \text{ con } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

La funzione y sarà dunque

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma) Bu(\sigma)\,d\sigma, \quad t \in [s,T].$$

Non è detto che $J_s(x,u)$ sia sempre finito: occorre che $h(u(\cdot)) \in L^1(s,T)$.
Tuttavia $J_s(x,u)$ non è identicamente $+\infty$ perché, scelto $u = 0$, si ha

$$J_s(x,0) = \int_s^T [g(G(t-s)x) + h(0)]\,dt + \phi(G(T-s)x)$$

e naturalmente $t \mapsto g(G(t-s)x)$ è una funzione da $[s,T]$ in $[0,\infty[$ continua, dunque limitata.

<u>Proposizione 35</u> Nelle ipotesi precedenti, esiste un unico controllo ottimale $u^*_{s,x}$:

$$J_s(x, u^*_{s,x}) \leq J_s(x,u) \quad \forall u \in L^2(s,T;U).$$

<u>dim</u>. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(s,T;U)$ una successione minimizzante:

$$\lim_{n\to\infty} J_s(x,u_n) = \inf_u J_s(x,u).$$

Poiché

$$a\|u_n\|^2_{L^2(s,T;U)} \leq \int_s^T h(u_n(t))\,dt - b(T-s),$$

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata e quindi esiste $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ in $L^2(s,T;U)$.

La funzione

$$H(u) = \int_s^T h(u(t))\,dt, \quad H: L^2(s,T;U) \to \mathbb{R}$$

è convessa e sci: infatti se $v_n \to v$ in $L^2(s,T;U)$, scelta una sottosuccessione $\{v_{n_j}\}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} H(v_{n_j}) = \liminf_{n\to\infty} H(v_n),$$

passando ad un'ulteriore sottosuccessione si può supporre che

$$v_{n_j}(t) \to v(t) \quad \text{q.o. in } [s,T];$$

dunque $h(v_{n_j}(t)) \to h(v(t))$ q.o., e dal lemma di Fatou deduciamo

$$H(v) \leq \liminf_{j\to\infty} H(v_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} H(v_{n_j}) = \liminf_{n\to\infty} H(v_n).$$

Dunque, la funzione H, essendo convessa e sci, è anche debolmente sci, come conseguenza non elementare del teorema di Hahn-Banach. Pertanto, tornando alla sottosuccessione minimizzante $\{u_{n_k}\}$,

$$H(\bar{u}) \le \liminf_{k\to\infty} H(u_{n_k}).$$

Detto poi y_{n_k} lo stato corrispondente a u_{n_k}, si ha facilmente

$$y_{n_k}(t) \rightharpoonup \bar{y}(t) \text{ in } X \quad \forall t \in [s,T]$$

ove $\bar{y}$ è lo stato corrispondente a u. Poichè g, ϕ sono convesse e continue su X, esse sono debolmente sci su X, cosicchè

$$g(\bar{y}(t)) \le \liminf_{k\to\infty} g(y_{n_k}(t)) \quad \forall t \in [s,T], \quad \phi(\bar{y}(T)) \le \liminf_{k\to\infty} \phi(y_{n_k}(T)).$$

Di conseguenza

$$J_s(x,\bar{u}) = \int_s^T [g(\bar{y}(t)) + h(\bar{u}(t))]\,dt + \phi(\bar{y}(T)) \le$$

$$\le \int_s^T \liminf_{k\to\infty} g(y_{n_k}(t))\,dt + H(\bar{u}) + \liminf_{k\to\infty} \phi(y_{n_k}(T)) \le$$

$$\le \liminf_{k\to\infty} \int_s^T g(y_{n_k}(t))\,dt + \liminf_{k\to\infty} H(u_{n_k}) + \liminf_{k\to\infty} \phi(y_{n_k}(T)) \le$$

$$\le \liminf_{k\to\infty} J(s, u_{n_k}) = \inf_u J_s(x,u),$$

e dunque $\bar{u}$ è ottimale.

Proviamo l'unicità: siano u_1, u_2 ottimali con $u_1 \ne u_2$: dunque l'insieme $E = \{t \in [s,T] : u_1(t) \ne u_2(t)\}$ ha misura >0. Perciò, se $\lambda \in]0,1[$,

$$H((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) = \int_E h((1-\lambda)u_1(t) + \lambda u_2(t))\,dt + \int_{E^c} h(u_1(t))\,dt <$$

$$< \int_E [(1-\lambda) h(u_1(t)) + \lambda h(u_2(t))] dt + \int_{E^c} h(u_1(t)) dt =$$

$$= (1-\lambda) H(u_1) + \lambda H(u_2).$$

Ne segue

$$J_5(x,(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) < (1-\lambda) J_5(x,u_1) + \lambda J_5(x,u_2) = \inf_u J_5(x,u),$$

il che è assurdo. Dunque $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Il passo successivo è cercare di caratterizzare la coppia ottimale per mezzo delle condizioni necessarie di Pontrjagin. Preliminarmente ci occorrono alcune nozioni sulle funzioni convesse.

<u>Parentesi sulla convessità</u>

Sia X uno spazio normato, sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione.

<u>Proposizione 36</u> Se f è G-differenziabile, allora sono fatti equivalenti

(i) f è convessa,

(ii) $f(\xi) \geq f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x\rangle_{X^*,X} \quad \forall x, \xi \in X$,

(iii) f'_G è monotono, vale a dire

$$\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x\rangle_{X^*,X} \geq 0 \quad \forall \xi, x \in X.$$

Similmente, sono fatti equivalenti:

(<u>i</u>) f è strettamente convessa,

(<u>ii</u>) $f(\xi) > f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x\rangle_{X^*,X} \quad \forall \xi \neq x$,

(<u>iii</u>) (stretta monotonia) $\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x\rangle_{X^*,X} > 0 \quad \forall \xi \neq x$.

<u>dim</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Se f è convessa, i suoi rapporti incrementali in ogni direzione sono crescenti. Quindi

$$f(\xi)-f(x) \geq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t(\xi-x))-f(x)}{t} = \langle f'_G(x), \xi-x\rangle_{X^*,X}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $\xi, x \in X$, per ipotesi

$$f(\xi) \geq f(x) + \langle f'_G(x), \xi-x\rangle_{X^*,X}, \quad f(x) \geq f(\xi) + \langle f'_G(\xi), x-\xi\rangle_{X^*,X};$$

sommando e semplificando, si trova

$$0 \geq \langle f'_G(x) - f'_G(\xi), \xi-x\rangle_{X^*,X},$$

che equivale alla tesi.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Siano $x, \xi \in X$. Posto

$$\varphi(\lambda) = f((1-\lambda)x+\lambda\xi), \quad \lambda\in[0,1],$$

risulta

$$\varphi'(\lambda) = \langle f'_G((1-\lambda)x+\lambda\xi), \xi-x\rangle_{X^*,X} \quad \forall \lambda\in[0,1].$$

Allora per $0\leq\lambda<\mu\leq 1$ si ha

$$\varphi'(\mu)-\varphi'(\lambda) = \langle f'_G((1-\mu)x+\mu\xi) - f'_G((1-\lambda)x+\mu\xi), \xi-x\rangle_{X^*,X} =$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda}\langle f'_G((1-\mu)x+\mu\xi) - f'_G((1-\lambda)x+\lambda\xi), [(1-\mu)x+\mu\xi]-[(1-\lambda)x+\lambda\xi]\rangle_{X^*,X} \geq 0$$

in virtù dell'ipotesi. Dunque φ' è crescente, cosicché φ è convessa. Perciò

$$f((1-\lambda)x+\lambda\xi) = \varphi(\lambda) \leq (1-\lambda)\varphi(0)+\lambda\varphi(1) = (1-\lambda)f(x)+\lambda f(\xi).$$

Le implicazioni $\underline{(i)} \Rightarrow \underline{(ii)} \Rightarrow \underline{(iii)}$ si provano allo stesso modo. □

<u>Definizione</u> Diciamo che $f: X \to]-\infty, +\infty]$ è <u>sottodifferenziabile</u> in un punto $x_0 \in X$ se $\exists\, \psi: X \to \mathbb{R}$ affine, dunque $\psi(x) = \varphi x + b$, ove $\varphi \in X^*$ e $b \in \mathbb{R}$, tale che

$$f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in X, \qquad f(x_0) = \psi(x_0).$$

Notiamo che f è sottodifferenziabile in x_0 se e solo se $f(x_0) \in \mathbb{R}$, ed esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X.$$

Infatti, detta $\psi(x) = \varphi x + b$ la funzione affine che verifica la definizione, si ha $f(x_0) = \psi(x_0) \in \mathbb{R}$, e inoltre

$$f(x) \geq \psi(x) = \varphi(x - x_0) + \varphi(x_0) + b = \varphi(x - x_0) + \psi(x_0) = \varphi(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in X.$$

Viceversa, questa relazione implica la sottodifferenziabilità in x_0 con

$$\psi(x) = \varphi x + b, \qquad b = f(x_0) - \varphi x_0.$$

<u>Definizione</u> Se f è sottodifferenziabile in x_0, ogni $\varphi \in X^*$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

si chiama <u>sottogradiente</u> di f in x_0. L'insieme dei sottogradienti in x_0,

$$\partial f(x_0) = \{\varphi \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X\}$$

è il <u>sottodifferenziale</u> di f in x_0.

Si noti che $\partial f(x_0)$ può essere vuoto, ma è sempre un convesso di X^*, chiuso per la topologia debole* di X^*.

Esempio $\partial\|\cdot\|(0) = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} \le 1\}$

Infatti la relazione di sottodifferenziabilità dice

$$\|x\|_X \ge \langle \varphi, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall x \in X \iff \varphi \in \partial\|\cdot\|(0),$$

potendo scambiare x con $-x$, essa dice appunto

$$|\langle \varphi, x\rangle_{X^*,X}| \le \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

cioè $\|\varphi\|_{X^*} \le 1$.

Proposizione 37 Sia $f : X \to]-\infty, \infty]$ convessa e sia $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \in \mathbb{R}$.

(i) Se f è G-differenziabile in x_0, allora $\partial f(x_0) = \{f'_G(x_0)\}$;

(ii) Se f è continua in x_0 e $\partial f(x_0) = \{\varphi_0\}$, allora f è G-differenziabile in x_0 con $f'_G(x_0) = \varphi_0$.

dim. (i) Se $\varphi \in \partial f(x_0)$, si ha $f(x_0 + tv) \ge f(x_0) + t\langle \varphi, v\rangle_{X^*,X}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $v \in X$. Se $t \ne 0$, dividendo per t si ha

$$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \ge \langle \varphi, v\rangle_{X^*,X} & \text{se } t > 0 \\ \le \langle \varphi, v\rangle_{X^*,X} & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

e dunque, per $t \to 0$, $\quad \langle f'_G(x_0), v\rangle_{X^*,X} = \langle \varphi, v\rangle_{X^*,X} \quad \forall v \in X$.

Viceversa, usando la convessità,

$$f(x) - f(x_0) \ge \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t(x-x_0)) - f(x_0)}{t} = \langle f'_G(x_0), x - x_0\rangle_{X^*,X}.$$

(ii) omessa: è una dimostrazione niente affatto banale, conseguenza del teorema di Hahn-Banach. □

Proposizione 38 Sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ convessa. Se $x_0 \in X$, si ha
$$f(x_0) = \min_X f \iff 0 \in \partial f(x_0).$$

dim Segue subito dalla definizione di sottodifferenziale. □

Definizione. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. La coniugata, o polare di f è la funzione
$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \left\{ \langle y, x \rangle_X - f(x) \right\}, \quad y \in X.$$

Osserviamo che f^* è convessa e semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole. Inoltre, per definizione, vale la disuguaglianza di Young
$$\langle y, x \rangle_X \le f(x) + f^*(y) \quad \forall x, y \in X.$$

Esempi (1) Se $X = \mathbb{R}$, si ha, con facili verifiche,
$$f(x) = \frac{|x|^p}{p}, \quad p \in]1, \infty[\implies f^*(y) = \frac{|y|^q}{q};$$
$$f(x) = |x| \implies f^*(y) = I_{[-1,1]}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \le 1 \\ +\infty & \text{se } |y| > 1; \end{cases}$$
$$f(x) = ax, \ a \in \mathbb{R} \implies f^*(y) = I_{\{a\}}(y);$$
$$f(x) = e^x \implies f^*(y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y < 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ y(\log y - 1) & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$. La bipolare di f è la polare di f^*:

$$f^{**}(z) = \sup_{y \in X} \{ \langle z, y \rangle_X - f^*(y) \}.$$

Dalla disuguaglianza di Young segue subito

$$f^{**}(z) \leq f(z) \quad \forall z \in X;$$

ma un'importante conseguenza del teorema di Hahn-Banach è il

<u>Teorema 39</u> <u>(di Fenchel-Moreau)</u> Sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione propria, cioè $f \not\equiv +\infty$. Allora f è convessa e sci se e solo se $f^{**}(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.

<u>dim</u> omessa (è il teorema 25.8 degli appunti di Analisi Convessa.) □

<u>Proposizione 40</u> Sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ convessa, propria e sci. Allora per ogni $u, y \in X$ si ha

$$y \in \partial f(u) \iff u \in \partial f^*(y) \iff \langle u, y \rangle = f(u) + f^*(y).$$

<u>dim</u> Si ha $y \in \partial f(u) \iff f(v) \geq f(u) + \langle y, v-u \rangle_X \quad \forall v \in X$

$$\iff \langle y, v \rangle_X - f(v) \leq \langle y, u \rangle_X - f(u) \quad \forall v \in X$$

$$\iff f^*(y) = \langle y, u \rangle_X - f(u) \quad \text{(uguaglianza di Young)}$$

$$\iff f^{**}(u) = f(u) = \langle y, u \rangle_X - f^*(y)$$

$$\iff \langle u, v \rangle_X - f^*(v) \leq \langle u, y \rangle_X - f^*(y) \quad \forall v \in X$$

$$\iff f^*(v) \geq f^*(y) + \langle u, v-y \rangle_X \quad \forall v \in X \iff u \in \partial f^*(y). \quad \square$$

Torniamo al nostro problema di minimo.

Nel punto di minimo $u^*_{S,x}$, come sappiamo dalla proposizione 38, si ha
$$0 \in \partial_u J_S(x, u^*_{S,x}),$$
ove ∂_u indica il sottodifferenziale rispetto alla variabile u.

Per determinare $\partial_u J_S(x,u)$ ci occorrono 2 lemmi.

Lemma 41 Sia $G(u) = \int_S^T g(y(t))\,dt + \phi(y(T))$, ove $u \in L^2(S,T;U)$ e $y(t) = G(t-S)x + \int_S^t G(t-\sigma)Bu(\sigma)\,d\sigma =: y(t,u)$. Allora il funzionale G è G-differenziabile con
$$\langle G'_G(u), v\rangle_U = \langle B^* p, v\rangle_U,$$
ove
$$p(t) = G(T-t)^* \phi'(y(T)) + \int_t^T G(\sigma-t)^* g'(y(\sigma))\,d\sigma, \quad t \in [S,T].$$

dim. Essendo $g, \phi \in C^1$, il funzionale G è certamente F-differenziabile e quindi G-differenziabile. Quindi $\partial G(u)$ contiene un solo elemento ed è più facile identificarlo con la definizione di sottodifferenziale, piuttosto che derivare G. Si ha infatti

$$G(v) - G(u) \geq \lim_{t\to 0^+} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} =$$
$$= \int_S^T \langle g'(y(t,u)), y(t,v) - y(t,u)\rangle_X\,dt + \langle \phi'(y(T,u)), y(T,v) - y(T,u)\rangle_X =$$
$$= \int_S^T \langle g'(y(t,u)), \int_S^t G(t-r)B(v(r)-u(r))\,dr\rangle_X\,dt + \langle \phi'(y(T,u)), \int_S^T G(T-r)B(v(r)-u(r))\,dr\rangle_X =$$
$$= \int_S^T \langle B^*\int_r^T G(t-r)^* g'(y(t,u))\,dt, v(r)-u(r)\rangle_U\,dr + \langle B^*\int_S^T G(T-r)^*\phi'(y(T,u)), v(r)-u(r)\rangle_U\,dr =$$
$$= \int_S^T \langle B^* p(r), v(r) - u(r)\rangle_U\,dr. \quad \square$$

Lemma 6.2 Sia $H(u)=\int_S^T h(u(t))\,dt$, $u\in L^2(S,T;U)$. Allora

$$\partial H(u)=\begin{cases}\{h'(u)\} & \text{se } h(u)\in L^1(S,T) \text{ e } h'(u)\in L^2(S,T;U),\\ \emptyset & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

dim. Se $h(u)\notin L^1(S,T)$, essendo $h\geq 0$ si ha $H(u)=+\infty$ e quindi $\partial H(u)=\emptyset$.

Sia allora $h(u)\in L^1(S,T)$; per $v\in L^2(S,T;U)$ si ha, dalla convessità di h,

$$h(v(t))-h(u(t))\geq \langle h'(u(t)), v(t)-u(t)\rangle_U \quad \text{q.o. in } [S,T].$$

Se $h'(u)\in L^2(S,T;U)$, possiamo integrare su $[S,T]$, ottenendo

$$H(v)-H(u)\geq \int_S^T \langle h'(u(t)), v(t)-u(t)\rangle_U\,dt=\langle h'(u), v-u\rangle_{L^2(S,T;U)},$$

da cui $h'(u)\in\partial H(u)$.

Viceversa, se $\varphi\in\partial H(u)$, si ha

$$H(v)-H(u)\geq \langle \varphi, v-u\rangle_{L^2(S,T;U)} \quad \forall v\in L^2(S,T;U).$$

Fissato $E\subseteq[S,T]$ misurabile, scegliamo

$$v=w\cdot\chi_E+u\cdot(1-\chi_E), \quad \text{ove } \chi_E(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t\notin E\\ 1 & \text{se } t\in E.\end{cases}$$

Si ottiene, per ogni $w\in L^2(S,T;U)$,

$$\int_E [h(w(t))-h(u(t))]\,dt=H(v)-H(u)\geq\langle\varphi, v-u\rangle_{L^2(S,T;U)}=\int_E\langle\varphi(t), w(t)-u(t)\rangle_U\,dt.$$

Prendendo $E=\{t\in[S,T]:\ h(w(t))-h(u(t))-\langle\varphi(t), w(t)-u(t)\rangle_U<0\}$, la relazione precedente mostra che E ha misura nulla. Ne segue, q.o. in $[S,T]$,

$$h(w(t))-h(u(t))\geq\langle\varphi(t), w(t)-u(t)\rangle_U \quad \forall w\in L^2(S,T;U),$$

e ciò implica $\varphi(t)\in\partial h(u(t))$ q.o. in $[S,T]$, ossia $\varphi(t)=h'(u(t))$ q.o. in $[S,T]$.

Quindi, se $h'(u)\notin L^2(S,T;U)$ si ha $\partial H(u)=\emptyset$; altrimenti, $\partial H(u)=\{h'(u)\}$. $\square$

Corollario 4.3 Per ogni $x \in X$ e $s \in [0,T[$ si ha

$$\partial_u J_s(x,u) = \begin{cases} h'(u) + B^* p & \text{se } h(u) \in L^1(s,T) \text{ e } h'(u) \in L^2(s,T;U), \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dim. Se $h'(u) \notin L^2(s,T;U)$, oppure $h(u) \notin L^1(s,T)$, allora $J_s = G + H$, con G funzione G-differenziabile e H non sottodifferenziabile: quindi $\partial_u J_s(x,u) = \emptyset$.

Se invece $h'(u) \in L^2(s,T;U)$ e $h(u) \in L^1(s,T)$, allora essendo $B^* p \in \partial G(u)$ e $h'(u) \in \partial H(u)$, è banale verificare che $B^* p + h'(u) \in \partial G(u) + \partial H(u) \subseteq \partial_u J_s(x,u)$. In questo caso sia G che H sono G-differenziabili, quindi $J_s(x,u)$ è G-differenziabile e pertanto $\partial_u J_s(x,u) = \{B^* p + h'(u)\}$. $\square$

Da questi risultati deduciamo che per il punto di minimo $u^*_{s,x}$ di $J_s(x,\cdot)$ valgono le condizioni necessarie

$$\begin{cases} B^* p^*_{s,x} + h'(u^*_{s,x}) = 0 \\ (p^*_{s,x})'(t) = -A^* p^*_{s,x} - g'(y^*_{s,x}) \quad \text{in } [s,T[\\ p^*_{s,x}(T) = \phi'(y^*_{s,x}(T)) \end{cases}$$

mentre la funzione valore $V(s,x)$, definita da

$$V(s,x) = \inf\{J_s(x,u) : u \in L^2(s,T;U)\}$$

verifica

$$V(s,x) = \int_s^T [g(y^*_{s,x}(t)) + h(u^*_{s,x}(t))]\,dt + \phi(y^*_{s,x}(T)).$$

I fatti che seguono si verificano come nel caso lineare quadratico:

Proposizione 4.4 Risulta per $s\in[0,T[$ e $x\in X$:

(i) $u^*_{0,x}\big|_{[s,T]} = u^*_{s,Y^*_{0,x}(s)}$, $Y^*_{0,x}\big|_{[s,T]} = Y^*_{s,Y^*_{0,x}(s)}$, $P^*_{0,x}\big|_{[s,T]} = P^*_{s,Y^*_{0,x}}$;

(ii) $V(s,x)=\int_s^t [g(Y^*_{s,x}(r))+h(u^*_{s,x}(r))]\,dr + V(t,Y^*_{s,x}(t))$ $\forall t\in[s,T[$,

(iii) $V(s,x)=\inf\Big\{\int_s^t [g(y(\sigma))+h(u(\sigma))]\,d\sigma + V(t,y(t)) : u\in L^2(s,t;U),$
$y'=Ay+Bu$ in $[s,t]$, $y(s)=x\Big\}$ $\forall t\in[s,T[$.

dim. L'unica cosa che è stata omessa nel caso quadratico è la terza relazione di (i): $P^*_{0,x}$ risolve

$$\begin{cases} p'(t)=-A^*p(t)-g'(Y^*_{0,x}(t)), & t\in[0,T] \\ p(T)=\phi'(Y_{0,x}(T)) \end{cases}$$

mentre $P_{s,Y^*_{0,x}(s)}$ risolve

$$\begin{cases} p'(t)=-A^*p(t)-g'(Y_{s,Y^*_{0,x}(s)}(t)), & t\in[s,T] \\ p(T)=\phi'(Y_{s,Y^*_{0,x}(s)}(T)). \end{cases}$$

Poiché $Y^*_{0,x}(t)=Y_{s,Y^*_{0,x}(s)}(t)$ in $[s,T]$, per unicità le due funzioni coincidono in $[s,T]$. □

Stime per V, $u^*_{0,x}$, $Y^*_{0,x}$, $P^*_{0,x}$

Osserviamo anzitutto che g,ϕ,h sono lipschitziane sui limitati: cioè, per ogni $r>0$ esiste $M(r)>0$ tale che

$$\|g(x)-g(y)\|_X+\|\phi(x)-\phi(y)\|_X \le M(r)\|x-y\|_X \quad \forall x,y\in B_X(0,r)$$
$$\|h(u)-h(v)\|_U \le M(r)\|u-v\|_U \quad \forall u,v\in B_U(0,r),$$

ove $B_X(0,r)$ e $B_U(0,r)$ sono le palle di centro 0 e raggio r in X e in U.

Per quanto riguarda $u^*_{0,x}$, osserviamo il fatto seguente.
Per ipotesi, h è strettamente convessa, di classe C^1, con $h(u) \geq a\|u\|^2_U + b$.
Dunque h' è strettamente monotona. Di conseguenza, $\partial h^*(z)$ ha un solo elemento per ogni $z \in U$: infatti

$$u_1, u_2 \in \partial h^*(z) \implies z \in \partial h(u_1) \cap \partial h(u_2) = \{h'(u_1)\} \cap \{h'(u_2)\};$$

ma essendo h' iniettiva, l'ultima intersezione è non vuota se e solo se $u_1 = u_2$. Perciò

$$\partial h^*(z) = (h^*)'_G(z) \quad \forall z \in U.$$

Dunque la condizione necessaria $B^* p + h'(u) = 0$ diventa $-B^* p \in \partial h(u)$, ossia $u \in \partial h^*(-B^* p)$, ovvero $u = (h^*)'(-B^* p)$.
Notiamo adesso che

$$h^*(y) = \sup_{u \in U} \{\langle y, u\rangle_U - h(u)\} \leq \sup_{u \in U} \{\langle y, u\rangle_U - a\|u\|^2_U - b\} =$$

$$= \frac{\|y\|^2}{4a} - b \quad \forall y \in U,$$

dunque h^*, essendo convessa, è limitata sui limitati di U. Lo stesso allora deve valere per $(h^*)'$: infatti, se esistesse $\{z_n\} \subseteq U$ tale che

$$\|z_n\|_U \leq R, \quad \|(h^*)'(z_n)\|_U \to +\infty \text{ per } n \to \infty,$$

avremmo

$$h^*(x) - h^*(z_n) \geq \langle (h^*)'(z_n), x - z_n\rangle_U \quad \forall x \in U;$$

scegliendo

$$x = x_n + \frac{(h^*)'(z_n)}{\|(h^*)'(z_n)\|_U},$$

avremmo $\|x\|_U \leq R+1$, dunque $|h^*(x)| \leq K$, $|h^*(x_n)| \leq K$, da cui

$$2K \geq h^*(x) - h^*(z_n) \geq \langle (h^*)'(z_n), x - x_n\rangle_U = \|(h^*)'(z_n)\|_U,$$

e che è assurdo. Pertanto $(h^*)'$ è limitata sui limitati di U.

Ciò premesso, si ha la seguente

<u>Proposizione 45</u> Per ogni $r>0$ esiste $C(r)>0$ tale che, se $\|x\|_X \le r$,

(i) $V(s,x) \le C(r) \quad \forall s\in[0,T[$,

(ii) $\int_s^T \|u^*_{s,x}(t)\|_U^2\,dt \le C(r)$

(iii) $\|Y^*_{s,x}(t)\|_X \le C(r) \quad \forall t\in[s,T]$;

(iv) $\|p^*_{s,x}(t)\|_X \le C(r) \quad \forall t\in[s,T]$;

(v) $\|u^*_{s,x}(t)\|_X \le C(r) \quad \forall t\in[s,T]$.

<u>dim.</u> (i) Come sappiamo

$$V(s,x) \le J_s(x,0) = \int_s^T [g(G(t-s)x) + h(0)]\,dt + \phi(G(T-s)x),$$

ed essendo g, h, ϕ limitate sui limitati, si ha facilmente la tesi.

(ii) Si ha da (i)

$$C(r) \ge V(s,x) \ge \int_s^T h(u^*_{s,x}(t))\,dt \ge a\int_s^T \|u^*_{s,x}(t)\|_U^2\,dt + b(T-s),$$

da cui la tesi aumentando un po' $C(r)$.

(iii) Si ha per ogni $t\in[s,T]$

$$\|Y^*_{s,x}(t)\| \le He^{\omega T}\left[\|x\|_X + \int_s^t \|B\|\,\|u^*_{s,x}(\sigma)\|_U\,d\sigma\right] \le$$

$$\le He^{\omega T}\left[\|x\| + \|B\|\sqrt{T}\left[\int_s^T \|u^*_{s,x}(\sigma)\|_U^2\,d\sigma\right]^{1/2}\right]$$

e quindi, per (ii), la tesi aumentando un po' $C(r)$.

(iv) Si ha

$$p^*_{s,x}(t) = G(T-t)^*\phi'(Y^*_{s,x}(T)) + \int_t^T G(\sigma-t)^* g'(Y^*_{s,x}(\sigma))\,d\sigma,$$

da cui, facilmente, la tesi, essendo ϕ' e g' funzioni continue

(v) Utilizziamo la relazione $u^*_{s,x}(t)=(h^*)'(-B^*p^*_{s,x}(t))$: poiché $B^*p^*_{s,x}(t)$ varia in un limitato grazie a (iv), e poiché $(h^*)'$ è limitata sui limitati, la tesi segue facilmente, al solito aumentando $C(r)$. □

<u>Regolarità lipschitziana della funzione valore</u>

<u>Proposizione 66</u> Per ogni $r>0$ esiste $C_{1r}>0$ tale che, per $\|x\|_X, \|x'\|_X \le r$,

$$|V(s,x')-V(s,x)| \le C_{1r}\,\|x'-x\|_X \quad \forall s\in[0,T].$$

<u>dim.</u> Sia y la soluzione di

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+Bu^*_{s,x}(t), & t\in[s,T] \\ y(s)=x', \end{cases}$$

cosicché

$$y(t)=G(t-s)x'+\int_s^t G(t-\sigma)Bu^*_{s,x}(\sigma)\,d\sigma.$$

Dunque

$$y(t)-y^*_{s,x}(t)=G(t-s)(x'-x),$$

e di conseguenza

$$V(s,x')-V(s,x)\le\int_s^T[g(y(t))-g(y^*_{s,x}(t))]\,dt+\phi(y(T))-\phi(y^*_{s,x}(T))$$

$$\le M(c(r))\left[\int_s^T\|y(t)-y^*_{s,x}(t)\|_X\,dt+\|y(T)-y^*_{s,x}(T)\|_X\right]\le$$

$$\le M(c(r))\,2He^{\omega T}\|x'-x\|.$$

Scambiando x con x' (e modificando di conseguenza la y) si ottiene la tesi. □

Proposizione 47 Per ogni $r>0$ esiste $C_{2r}>0$ tale che, per $\|x\|_X\le r$,

(i) $$|V(t,x)-V(s,x)|\le C_{2r}\left[|t-s|+\|G(t-s)x-x\|_X\right]\quad \forall t,s\in[0,T[,$$

(ii) $$|V(t,x)-V(s,x)|\le C_{2r}\,|t-s|\quad \forall t,s\in[0,T[,\ \text{se } x\in D(A).$$

dim (i) Sia $t\ge s$: allora dalle Proposizioni 44(ii) e 46 segue

$$|V(s,x)-V(t,x)|\le |V(s,x)-V(t,Y^*_{s,x}(t))|+|V(t,Y^*_{s,x}(t))-V(t,x)|=$$

$$=\int_s^t\left[g(Y^*_{s,x}(r))+h(u^*_{s,x}(r))\right]dr+|V(t,Y^*_{s,x}(t))-V(t,x)|\le$$

$$\le 2K(r)|t-s|+C_{1,C(r)}\|Y^*_{s,x}(t)-x\|_X\le$$

$$\le C'_r\left[|t-s|+\|G(t-s)x-x\|_X+He^{\omega T}\|B\|C(r)|t-s|\right]\le$$

$$\le C_{2r}\left[|t-s|+\|G(t-s)x-x\|_X\right].$$

(ii) Se $x\in D(A)$, si ha $\|G(t-s)x-x\|_X=\left\|\int_0^{t-s}G(\sigma)Ax\,d\sigma\right\|_X\le He^{\omega T}\|Ax\|_X|t-s|$, da cui la tesi alterando la costante. □

Proviamo infine questa proprietà:

Proposizione 48 Risulta $P^*_{0,x}(s)\in\partial_x V(s,Y^*_{0,x}(s))\quad\forall s\in[0,T[,\ \forall x\in X$.

dim Siano $x',x\in X$. Si ha, per la convessità di g,h,ϕ,

$$V(s,x')-V(s,x)=$$

$$=\int_s^T\left[[g(Y^*_{s,x'}(t))-g(Y^*_{s,x}(t))]+[h(u^*_{s,x'}(t))-h(u^*_{s,x}(t))]\right]dt+\phi(Y^*_{s,x'}(T))-\phi(Y^*_{s,x}(T))\ge$$

$$\ge\int_s^T\left[\langle g'(Y^*_{s,x}(t)),Y^*_{s,x'}(t)-Y^*_{s,x}(t)\rangle_X+\langle h'(u^*_{s,x}(t)),u^*_{s,x'}(t)-u^*_{s,x}(t)\rangle_U\right]dt+\langle\phi'(Y^*_{s,x}(T)),Y^*_{s,x'}(T)-Y^*_{s,x}(T)\rangle_X=$$

$$= \int_s^T \Big[\langle g'(Y^*_{s,x}(t)), G(t-s)(x'-x) + \int_s^t G(t-r)B[u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r)]\,dr \rangle_X + \langle h'(u^*_{s,x}(t)), u^*_{s,x'}(t) - u^*_{s,x}(t)\rangle_U \Big] dt +$$

$$+ \langle \phi'(Y^*_{s,x}(T)), G(T-s)(x'-x) + \int_s^T G(T-r)B[u^*_{s,x'}(r)-u^*_{s,x}(r)]\,dr \rangle_X =$$

$$= \langle \int_s^T G(t-s)^* g'(Y^*_{s,x}(t))\,dt + G(T-s)^*\phi'(Y^*_{s,x}(T)), x'-x\rangle_X +$$

$$+ \int_s^T \langle \int_r^T B^*G(t-r)^* g'(Y^*_{s,x}(t))\,dt + h'(u^*_{s,x}(r)) + B^* G(T-r)^*\phi'(Y^*_{s,x}(T)), u^*_{s,x'}(r)-u^*_{s,x}(r)\rangle_U \,dr$$

ricordando la formula esplicita di $p^*_{s,x}(t)$, si ottiene

$$V(s,x') - V(s,x) \geq \langle p^*_{s,x}(s), x'-x\rangle_X + \int_s^T \langle B^* p^*_{s,x}(r) + h'(u^*_{s,x}(r)), u^*_{s,x'}(r) - u^*_{s,x}(r)\rangle_U \,dr =$$

$$= \langle p^*_{s,x}(s), x'-x\rangle + 0$$

in quanto $B^* p^*_{s,x} + h'(u^*_{s,x}) = 0$. Dunque

$$p^*_{s,x}(s) \in \partial_x V(s,x) \qquad \forall x \in X.$$

Rimpiazzando x con $Y^*_{0,x}(s)$, si ha

$$p^*_{0,x}(s) = p_{s,Y^*_{0,x}(s)}(s) \in \partial_x V(s, Y^*_{s,x}(s)). \quad \square$$