TEORIA DEI CONTROLLI

- ORARIO: gi 16-18 aula N
  lu 14-16 aula M1

- mail: acquistp@student.dm.unipi.it
- Tel. 050-2213209

- il testo delle lezioni apparirà settimanalmente sulla mia pagina
  http://www.dm.unipi.it/~acquistp/mate.html (in fondo),
  insieme al registro delle lezioni.

- Metterò tutto anche su moodle,

- esame: orale, oppure seminario su argomento collaterale (da concordare), seguito da qualche facile domanda collegata.

- libri consultabili:

  Zabczyk
  Lasiecka-Triggiani
  Bardi-Capuzzo Dolcetta
  Cannarsa-Giorgieri-Tessitore
  Bensoussan-Da Prato-Delfour-Mitter

  - - - - - -

Definizione ufficiosa: teoria dei controlli = calcolo delle variazioni = massimi e minimi vincolati = massimi e minimi liberi.

CONTROLLI IN DIMENSIONE FINITA

L'oggetto del nostro studio è un sistema differenziale della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$.

Gli $u \in U$ sono i parametri di controllo, $y(\cdot)$ è lo stato del sistema. In particolare, se esiste un'applicazione $k : \mathbb{R}^n \to U$, eventualmente dipendente anche da t, tale che il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), k(y(t))), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

abbia una ben definita soluzione, si dice che il controllo $u(t) = k(y(t))$ è "closed-loop" e la funzione k è detta feedback. Gli altri controlli, per contrasto, si dicono "open-loop".

Quali problemi ci poniamo?

Controllabilità: Uno stato $z \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da x in un tempo T, se esiste un controllo $u(\cdot)$ tale che il corrispondente stato $y(\cdot)$ soddisfi $y(0) = x$ e $y(T) = z$.

Il sistema è controllabile se ogni stato z è raggiungibile da qualunque stato x in un certo tempo $T_{xz} > 0$; il sistema è <u>controllabile al tempo T</u> se per ogni $x, z \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\tau_{xz} \leq T.$$

<u>Stabilizzabilità</u> Se esiste $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times U$ tale che $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ diciamo che un'applicazione $k: \mathbb{R}^n \to U$, con $k(\bar{x}) = \bar{u}$, è un <u>feedback stabilizzante</u> per il sistema se $\bar{x}$ è un punto di equilibrio <u>stabile</u> per

$$y'(t) = f(y(t), k(y(t))), \quad t \geq 0.$$

Il sistema è <u>stabilizzabile</u> in $\bar{x}$ se esiste un feedback stabilizzante.
Definizione analoga per la <u>esponenziale stabilizzabilità</u>.

<u>Osservabilità</u> In molte situazioni pratiche, non si osserva direttamente lo stato $y(\cdot)$, ma lo si osserva indirettamente tramite una funzione $h(y(\cdot))$, $t \geq 0$, di esso. Si studia dunque

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = x \\ w = h(y) & [\text{equazione di osservazione}] \end{cases}$$

Il sistema è <u>osservabile</u> se, noti un controllo $u(\cdot)$ e una osservazione w, si può determinare univocamente la condizione iniziale x (e dunque ricostruire tutta la funzione y).

<u>Ottimalità</u> Si cerca un controllo u che ottimizzi lo stato y rispetto a un determinato criterio. Esempi:

(a) Problema del tempo minimo: si cerca $u(\cdot)$ che faccia trasferire lo stato $y(\cdot)$ da x a z nel minor tempo possibile.

(b) Problema di Bolza: si cerca un controllo $u(\cdot)$ che renda minimo il <u>funzionale costo</u>, o massimo il <u>funzionale guadagno</u>

$$J(y,u) = \int_0^T g(y(t),u(t))\,dt + G(y(T)),$$

ove g e G sono funzioni assegnate.

<u>Esempi</u>:

$\boxed{1}$ <u>Atterraggio morbido sulla Luna</u>. Una navicella spaziale di massa totale m si muove verticalmente al di sopra della superficie lunare, con il getto dei gas diretto verso la superficie. Siano h l'altezza della navicella, u la spinta del motore, prodotta dall'espulsione dei gas di scarico: il consumo del carburante riduce la massa della navicella. Supponiamo che non vi sia atmosfera e che l'accelerazione di gravità lunare g sia costante, le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} h' = v \\ v' = -g + \dfrac{u}{m} \\ m' = -ku \end{cases} \qquad (k \text{ costante positiva}),$$

con le condizioni iniziali

$$m(0) = M_0, \quad h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0 .$$

Ci sono ulteriori vincoli sui parametri di controllo e di stato:

$$0 \leq u \leq A, \qquad m \geq M,$$

ove M è la massa della navicella senza carburante, mentre A è la condizione di "tutto gas". Il problema dell'atterraggio morbido consiste nel trovare un controllo $u(\cdot)$ che porti la navicella, a un dato istante T, nella posizione $h(T) = 0$, $v(T) = 0$. Questo è un problema di controllabilità.

Vi è poi una naturale questione di ottimizzazione: non si fissa T, ma si cerca un atterraggio lunare in tempo minimo, il che è <u>equivalente</u> alla minimizzazione del consumo di carburante.

Infatti, se $m(t) > 0$ in $[0,T]$,

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = -kv'(t) - kg ,$$

da cui

$$m(T) = M_0 e^{-kv(T) - kgT + kv_0} .$$

Si ha atterraggio morbido se e solo se $m(T) = M_0 e^{kv_0 - kgT}$ e $h(T) = 0$.

Questa relazione mostra che minimizzare T equivale a minimizzare $-m(T)$, ovvero il consumo di carburante $M_0 - m(T)$.

2 Consumo ottimale In una certa attività economica si ha un capitale $k(t)$; una parte $u(t)k(t)$ di esso è destinata agli investimenti e contribuisce ad aumentare $k(t)$ tramite la produzione, e una parte $(1-u(t))k(t)$ va in consumi volti a massimizzare l'utilità, cioè una funzione

$$J_T(x,u)=\int_0^T [(1-u(t))k(t)]^\alpha dt \; ; \; (\alpha>0).$$

Il tasso di variazione del capitale è

$$k'(t) = u(t)k(t),$$

con la condizione iniziale $k(0)=k_0$. Naturalmente occorre richiedere $0\le u(t)\le 1$. Poi, si vuole $K(T)\ge K_T$ (problema di controllabilità) e si vuole anche massimizzare l'utilità (problema di ottimalità).

3 Problema del regolatore lineare (se ne fa largo uso nei progetti ingegneristici). Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ove $y:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $u:[0,T]\to\mathbb{R}^m$, $A(t)$ è $n\times n$, $B(t)$ è $n\times m$, u è una funzione continua, o continua a tratti, mentre i coefficienti di $A(t)$ e $B(t)$ sono continui. Si vuole scegliere $u(\cdot)$ in modo da minimizzare il funzionale quadratico

$$J(y,u) = \int_0^T \left[(M(t)y(t), y(t))_n + (N(t)u(t), u(t))_m \right] dt + (Dy(T), y(T))_n$$

con $M(t)$ $(n\times n)$, $N(t)$ $(m\times m)$, D $(n\times n)$ matrici simmetriche, $M, D \geq 0$ e $N > 0$.

Il controllo, in questa situazione, sarà funzione lineare di $y(\cdot)$ (feedback).

$\boxed{4}$ I problemi di calcolo delle variazioni visti come problemi di controllo: consideriamo ad esempio il problema di minimizzare il funzionale

$$\int_a^b L(t, y(t), \dot y(t))\, dt$$

fra tutte le curve $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tali che $y(a) = A$, $y(b) = B$; esso equivale al problema di controllo in cui si ha:

- controllo $u = y' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,
- stato $Y(t) = (w(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, ove $w = y$,
- $\begin{cases} w'(t) = u(t) \\ z'(t) = L(t, w(t), u(t)) \\ z(a) = 0, \quad w(a) = A, \quad w(b) = B \end{cases}$
- $J(Y, u) = z(b) = \min.$

Controllabilità per sistemi lineari

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove A, B sono matrici $n \times n$ e $n \times m$. Poniamo per $T > 0$

$$Q_T = \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds, \qquad \text{matrice di controllabilità},$$

ove $e^{sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^n}{n!}$. Si ha $Q_T \geq 0$, $Q_T = Q_T^*$.

Proposizione 1 Se $\exists T > 0$ tale che Q_T è non singolare, allora:

(i) per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$, il controllo

$$\hat{u}(t) = -B^* e^{(T-t)A^*} Q_T^{-1} (e^{TA} a - b), \quad t \in [0,T]$$

porta lo stato $y(\cdot)$ da a in b al tempo T;

(ii) tra tutti i controlli $u(\cdot)$ che portano a in b al tempo T, $\hat{u}$ è quello che minimizza il funzionale $u \mapsto \int_0^T |u(s)|^2 ds$; inoltre

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds = \langle Q_T^{-1}(e^{TA}a - b), (e^{TA}a - b) \rangle.$$

Dim. È chiaro che $\hat{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Per lo stato $\hat{y}$ corrispondente si ha, per la formula di variazione delle costanti,

$$\hat{y}(t) = e^{tA} a + \int_0^t e^{(t-s)A} \hat{u}(s) ds,$$

e quindi

$$\hat{y}(T) = e^{TA}a - \int_0^T e^{(T-s)A}BB^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\,ds =$$

$$= e^{TA}a - Q_T Q_T^{-1}(e^{TA}a-b) = b.$$

Inoltre

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds = \int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)|^2 ds =$$

$$= \int_0^T \langle e^{(T-s)A}BB^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1}(e^{TA}a-b), Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle ds =$$

$$= \langle e^{TA}a-b, Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle = \langle Q_T^{-1}(e^{TA}a-b), e^{TA}a-b\rangle.$$

Infine, se $u(\cdot)$ è un controllo che porta lo stato da a in b in tempo T, si ha

$$\int_0^T \langle u(s), \hat{u}(s)\rangle ds = -\int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle ds =$$

$$= -\langle \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds, Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle =$$

$$= \langle e^{TA}a - y(T), Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle =$$

$$= \langle e^{TA}a-b, Q_T^{-1}(e^{TA}a-b)\rangle = \int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds,$$

da cui

$$0 \le \int_0^T |u(s)-\hat{u}(s)|^2 ds = \int_0^T |u(s)|^2 ds - \int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds. \quad \square$$

La proposizione precedente si può invertire:

Proposizione 2 Se ogni stato $b \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da 0 in un certo tempo $T_0 > 0$, allora Q_T è non singolare per ogni $T > 0$.

dim. Poniamo per $T > 0$

$$L_T : L^2(0,T,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,$$

$$L_T u = \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s)\, ds \qquad \forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m),$$

quindi $L_T u = y(T)$, ove y è lo stato associato al controllo u, con $y(0) = 0$.

Osserviamo che l'immagine $R(L_T)$ cresce con T: infatti, essendo

$$\langle L_T u, z \rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} z \rangle_{\mathbb{R}^m}\, ds,$$

si ha $z \in R(L_T)^\perp$ se e solo se $B^* e^{(T-s)A^*} z = 0$ $\forall s \in [0,T]$, ossia $B^* e^{sA^*} z = 0$ $\forall s \in [0,T]$. È chiaro allora che

$$T' > T \implies R(L_{T'})^\perp \subseteq R(L_T)^\perp \implies R(L_T) \subseteq R(L_{T'}).$$

Inoltre, per ipotesi,

$$\bigcup_{T>0} R(L_T) = \mathbb{R}^n.$$

La funzione $T \mapsto \dim R(L_T)$ è crescente e localmente costante; siccome $\lim_{T\to\infty} \dim R(L_T) = n$, deve esistere $\tilde{T} > 0$ tale che

$\dim R(L_T) = n \quad \forall T \geq \tilde{T}$.

Sia ora $T>0$ e prendiamo $z \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q_T z = 0$. Si ha

$$0 = \langle Q_T z, z\rangle = \left\langle \int_0^T e^{tA} BB^* e^{tA^*} z \, dt, z \right\rangle = \int_0^T |B^* e^{tA^*} z|^2 dt,$$

quindi deve essere $\Rightarrow B^* e^{tA^*} z = 0$ in $[0,T]$. Ma, essendo $t \mapsto B^* e^{tA^*} z$ una funzione analitica di t, ciò implica

$$B^* e^{tA^*} z = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

dunque $Q_{\tilde{T}} z = 0$ e $\in R(L_{\tilde{T}})^{\perp} = \{0\}$, ossia $z=0$.

Ne segue che Q_T è non singolare per ogni $T>0$. □

<u>Osservazione</u> Se $m \geq n$ e $R(B) = n$ (B ha rango massimo) allora vale la controllabilità, e il controllo che porta lo stato da a in b al tempo T è

$$u(s) = \frac{1}{T} B^+ e^{(s-T)A}(b - e^{TA} a), \quad s \in [0,T],$$

ove B^+ è una qualunque matrice $m \times n$ tale che $BB^+ = I_m$ [per costruire B^+ si sceglie $v_j \in \mathbb{R}^m$ tale che $Bv_j = e_j$, $1 \leq j \leq n$, e si definisce $B^+ = (v_1 | \cdots | v_n)$.] □

La condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità è un po' scomoda perché occorre calcolare e^{tA} ed e^{tA^*}.

Esempio 3 Per il sistema del primo ordine che si deduce dall'equazione

$$\begin{cases} y''(t) = u(t), \\ y(0) = \xi_1, \ y'(0) = \xi_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = v & y(0) = \xi_1 \\ v' = u, & v(0) = \xi_2 \end{cases}$$

si verifica che Q_T è non singolare e si trova che il controllo che porta (ξ_1, ξ_2) in $(0,0)$ al tempo T è

$$\hat{u}(s) = -\frac{12}{T^3}\left(\xi_1 \frac{T}{2} + \xi_2 \frac{T^2}{3} - \frac{sT\xi_2}{2} - s\xi_1\right), \quad s \in [0,T];$$

inoltre il minimo del funzionale $\int_0^T |u(s)|^2 ds$ è

$$\frac{12}{T^3}\left(\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 T + \frac{T^2}{3}\xi_2^2\right).$$

Una condizione equivalente, ma più comoda, è la seguente:

Teorema 4 Le seguenti condizioni sono equivalenti per il sistema $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$, $t \geq 0$.

(i) Ogni $b \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da 0 in un certo tempo $T_b > 0$;

(ii) il sistema è controllabile;

(iii) il sistema è controllabile ad un fissato tempo $T > 0$;

(iv) Q_T è non singolare per qualche $T > 0$;

(v) Q_T è non singolare per ogni $T > 0$;

(vi) $R\left(B | AB | \cdots | A^{n-1}B\right) = n$ (questa matrice è $n \times nm$).

La condizione (vi) è detta condizione del rango o di Kalman.

dim Dalle proposizioni 1 e 2 segue facilmente che le condizioni (i) → (v) sono tutte equivalenti.

Proviamo che se il sistema è controllabile, allora vale (vi).
Risulta $R(L_T) = \mathbb{R}^n$ per ogni $T > 0$ (perché $z \in R(L_T)^\perp$ implica $B^* e^{tA^*} z = 0$ in $[0,T]$ da cui, per analiticità, $z = 0$).

[Lemma 5. Poniamo per $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$
$$\ell(u_0, \dots, u_{n-1}) = Bu_0 + ABu_1 + \dots + A^{n-1}Bu_{n-1};$$
allora risulta $R(L_T) = R(\ell)$ (dunque è indipendente da T).]

dim Sia $v \in R(\ell)^\perp$: allora
$$0 = \langle \ell(u_0, \dots, u_{n-1}), v \rangle = \langle u_0, B^* v \rangle + \langle u_1, B^* A^* v \rangle + \dots + \langle u_{n-1}, B^* (A^*)^{n-1} v \rangle.$$
Per l'arbitrarietà di $u_0, \dots, u_{n-1}$ si deduce
$$B^* v = 0, \quad \dots, \quad B^* (A^*)^{n-1} v = 0;$$
ricordando ora il teorema di Cayley-Hamilton, e detto $p(\lambda)$ il polinomio minimo di A^*, si ha $p(A^*) = 0$, ossia (posto $h = \deg p$) esistono $c_1, \dots, c_h \in \mathbb{C}$ tali che
$$(A^*)^h = \sum_{k=0}^{h-1} c_k (A^*)^k,$$
e quindi esistono altre costanti $d_0, \dots, d_{h-1}$ tali che
$$(A^*)^{h+1} = \sum_{k=0}^{h-1} d_k (A^*)^k$$
Ne segue, induttivamente, $B^* A^{*k} v = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

e pertanto

$$B^* e^{sA^*} v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} B^* (A^*)^k v = 0 \quad \forall s > 0 .$$

Perciò $v \in R(L_T)^\perp$. Dunque $R(L_T) \subseteq R(\mathcal{C})$.

Viceversa, sia $v \in R(L_T)^\perp$: allora

$$B^* e^{sA^*} v = 0 \quad \forall s \geq 0 .$$

Derivando questa identità e calcolando per $s=0$, si trova successivamente

$$B^* v = 0, \quad B^* A^* v = 0, \dots, \quad B^* (A^*)^{n-1} v = 0$$

e pertanto

$$\langle \mathcal{C}(u_0, \dots, u_{n-1}), v \rangle = 0 \quad \forall u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m,$$

ossia $v \in R(\mathcal{C})^\perp$. Dunque $R(\mathcal{C}) \subseteq R(L_T)$ e il lemma è provato. □

Dato che, essendo il sistema controllabile, si ha $R(L_T) = \mathbb{R}^n$, ricaviamo che $R(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$ e dunque la matrice $(B|AB|\dots|A^{n-1}B)$ ha rango massimo n. Ciò prova (vi).

Proviamo che se vale (vi) allora il sistema è controllabile.

Siccome $R(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$, esiste una matrice K, $mn \times n$, tale che $(B|AB|\dots|A^{n-1}B)K = I_n$, ovvero esistono $K_1 \dots K_n$, matrici $m \times n$, tali che $BK_1 + ABK_2 + \dots + A^{n-1}BK_n = I_n$.

Scelta allora una funzione $\varphi \in C_0^{n-1}([0,T])$, tale che
$$\int_0^T \varphi(s)\,ds = 1,$$
e posto $\psi(s) = \left(e^{(s-T)A} b - e^{sA} a\right)\varphi(s)$, consideriamo il controllo
$$\hat{u}(s) = K_1 \psi(s) + K_2 \psi'(s) + \dots + K_n \psi^{(n-1)}(s), \quad s \in [0,T].$$
Allora risulta per $j=1 \dots n$, integrando per parti $j-1$ volte,
$$\int_0^T e^{(T-s)A} B K_j \psi^{(j-1)}(s)\,ds = \int_0^T e^{(T-s)A} A^{j-1} B K_j \psi(s)\,ds;$$
di conseguenza
$$L_T \hat{u} = \int_0^T e^{(T-s)A} B \hat{u}(s)\,ds = \int_0^T e^{(T-s)A} \left(B|AB|\dots|A^{n-1}B\right) K \psi(s)\,ds =$$
$$= \int_0^T e^{(T-s)A} \psi(s)\,ds,$$
e pertanto
$$y(T) = e^{TA} a + L_T \hat{u} = e^{TA} a + \int_0^T [b - e^{TA} a]\,\varphi(s)\,ds =$$
$$= e^{TA} a + b - e^{TA} a = b. \quad \square$$

Osservabilità per sistemi lineari

Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x \\ w(t) = Cy(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

con A $(n\times n)$, B $(n\times m)$, C $(p\times n)$ matrici fissate. Diciamo che il sistema (ovvero la coppia (A,C)) è <u>osservabile al tempo $T>0$</u> se la funzione $\tilde{w}(t) = C y(t) = C[e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds]$ è iniettiva da $\mathbb{R}^n$ in $L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$; equivalentemente, il sistema è osservabile al tempo T se $w(t) = Ce^{tA}x$ è iniettiva da $\mathbb{R}^n$ in $L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$. Ciò significa infatti che, data un'osservazione $w(\cdot)$, esiste un unico $x\in\mathbb{R}^n$ tale che $w(t) = Ce^{tA}x$ $\forall t\in[0,T]$. La condizione di osservabilità al tempo T diventa allora, ancor più semplicemente, la seguente: per ogni $x\neq 0$ esiste $t\in[0,T]$ tale che $w(t)\neq 0$.

Il sistema (ovvero (A,C)) è <u>osservabile</u> se per ogni $x\neq 0$ esiste $T_x>0$ tale che $w(T_x)\neq 0$.

Introduciamo la <u>matrice di osservabilità</u>

$$R_T = \int_0^T e^{rA^*}C^*C e^{rA}\, dr, \quad T>0.$$

<u>Teorema **6**</u> Sono fatti equivalenti:

(i) il sistema è osservabile;

(ii) il sistema è osservabile a un fissato tempo $T>0$;

(iii) R_T è non singolare per qualche $T>0$;

(iv) R_T è non singolare per ogni $T>0$;

(v) $R(C^*|A^*C^*|\cdots|A^{*\,n-1}C^*) = n$.

dim. È molto simile a quella del teorema 4. (17)

Se vale (ii), esiste $T>0$ tale che per ogni $x\neq 0$ vi è $t\in]0,T]$ per la quale $Ce^{tA}x\neq 0$. Dunque

$$\langle R_T x, x\rangle = \int_0^T |Ce^{sA}x|^2 ds > 0 \quad \forall x\neq 0,$$

e pertanto R_T è non singolare. Ciò prova (iii). Viceversa, da (iii) segue che $\int_0^T |Ce^{sA}x|^2 ds > 0$ per ogni $x\neq 0$, e quindi $\exists t\in]0,T]$ tale che $Ce^{tA}x\neq 0$. Dunque vale (ii).

Se vale (iii), allora $\ker R_T = \{0\}$. Risulta però, con dimostrazione uguale a quella del lemma 5,

$$\ker R_T = R(\ell)^\perp, \quad \forall T>0,$$

ove stavolta $\ell : \mathbb{R}^{np} \to \mathbb{R}^n$ è data da

$$\ell(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = C^* u_0 + A^* C^* u_1 + \dots + A^{*\,n-1} C^* u_{n-1};$$

quindi $R(\ell) = \mathbb{R}^n$, cioè

$$R\left(C^* | A^* C^* | \dots | A^{*\,n-1} C^*\right) = n,$$

da cui (v). Viceversa, da (v) segue $\ker R_T = \{0\}$ per ogni $T>0$, ossia R_T è non singolare per ogni $T>0$. Dunque vale (iv), e a maggior ragione (iii).

Proviamo infine che (i) $\iff$ (v). Chiaramente, (v) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i); se, viceversa, vale (i), supponiamo per assurdo (v) falsa: allora $R(\ell) \subsetneq \mathbb{R}^n$, quindi esiste $z\neq 0$, $z\in R(\ell)^\perp$: quindi $Cz = CAz = \dots = CA^{n-1}z = 0$.

Ma allora, utilizzando nuovamente il teorema di Cayley-Hamilton, si ricava $CA^kz=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, da cui $Ce^{sA}z=0$ per ogni $s>0$: ciò contraddice (i). $\square$

Esempio 7 Per il sistema dell'esempio 3

$$\begin{cases} y'=v \\ v'=u \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} y(0)=\xi_1 \\ v(0)=\xi_2 \end{matrix}, \qquad \left[A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

scegliamo come matrice di osservabilità $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$. Essendo $A^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $C^*=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A^*C^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, si ha

$$R\left(C^*|A^*C^*\right)=R\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=2$$

e dunque il sistema è osservabile.

Stabilità e stabilizzabilità per sistemi lineari

Richiamiamo alcuni fatti ben noti, relativi al sistema lineare

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t), & t>0 \\ y(0)=x \end{cases}$$

ove A è una matrice $n\times n$ e $x\in\mathbb{R}^n$. La soluzione del sistema è, ovviamente,

$$y(t)=e^{tA}x, \quad t\geq 0.$$