Controllo in orizzonte infinito

Consideriamo il problema lineare-quadratico in orizzonte infinito:

minimizzare
$$J(x,u)=\int_0^\infty \left[\langle My(t),y(t)\rangle_X+\langle Nu(t),u(t)\rangle_U\right]dt$$
ove $x\in X$ e $u\in \mathcal{U}_x$, la classe dei controlli ammissibili

$$\mathcal{U}_x=\{u\in L^2(0,\infty,U):\ J(x,u)<\infty\}\ ;$$
nel funzionale la y è la soluzione mild del problema
$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+Bu(t)\\ y(0)=x\ .\end{cases}$$

Ricordiamo che $M\in\Sigma(X)$, $M\geq 0$, $N\in\Sigma(U)$, $N>\delta$, $B\in\mathcal{L}(U,X)$ e A genera un sgfc G. Si noti che se $G\in\mathcal{G}(H,\omega)$ con $\omega>0$, allora il controllo $u\equiv 0$ non è ammissibile, perchè $M^{1/2}y(t)=M^{1/2}G(t)x$ non appartiene, in generale, a $L^2(0,\infty,X)$.

Teorema 30 Se $\mathcal{U}_x\neq\emptyset$, allora esiste un unico controllo ottimale u^* per J.

dim Il funzionale J assume valori finiti, è coercivo e strettamente convesso: quindi esiste una successione minimizzante $\{u_n\}\subseteq\mathcal{U}_x$, la quale, per coercività, è limitata in $L^2(0,\infty;U)$ e quindi possiede una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente a $\bar u\in L^2(0,\infty,U)$. Di conseguenza gli stati $y_{n_k}(t)=G(t)x+\int_0^t G(t-s)Bu_{n_k}(s)ds$ convergono puntualmente alla funzione $\bar y(t)=G(t)x+\int_0^t G(t-s)B\bar u(s)ds$. Per il lemma di Fatou, applicato a $\|M^{1/2} y_{n_k}(t)\|^2$, e per la semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole, applicato a $\|N^{1/2} u(t)\|_U^2$, si ottiene

$$J(x,\bar u) = \int_0^\infty \left[\|M^{1/2}\bar y(t)\|_X^2 + \|N^{1/2}\bar u(t)\|_U^2 \right] dt \le$$

$$\le \min\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \|M^{1/2} y_{n_k}(t)\|^2 dt + \min\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \|N^{1/2} u_{n_k}(t)\|_U^2 dt \le$$

$$\le \min\lim_{k\to\infty} J(x, u_{n_k}) = \inf J,$$

e quindi $\bar u$ è ottimale. L'unicità di $\bar u$ segue dalla stretta convessità di J. $\square$

Teorema 31 Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $\bar u_x \in \mathcal{U}_x$. Allora esiste $\bar P \in \Sigma(X)$, $\bar P \ge 0$, tale che:

(i) $\bar P$ risolve l'equazione algebrica di Riccati

$$\langle Ax, \bar P y\rangle_X + \langle \bar P x, A y\rangle_X - \langle N^{-1} B^* \bar P x, B^* \bar P y\rangle_U + \langle Mx, y\rangle_X = 0 \quad \forall x, y \in D(A);$$

(ii) $\bar P$ è la soluzione minimale, ossia $\bar P \le \tilde P$ per ogni $\tilde P \in \Sigma(X)$, $\tilde P \ge 0$, che risolva tale equazione;

(iii) la coppia ottimale (u^*, y^*) per J, con $y^*(0) = x$, verifica

$$u^*(t) = -N^{-1} B^* \bar P y^*(t), \qquad \langle \bar P x, x\rangle_X = J(x, u^*).$$

dim Sia $P(\cdot)$ la soluzione in $[0,\infty[$ dell'equazione differenziale di Riccati in avanti:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle P(t)x,y\rangle_X = \langle P(t)x,Ay\rangle_X + \langle Ax,P(t)y\rangle_X - \langle N^{-1}B^*P(t)x,B^*P(t)y\rangle_U + \\ \qquad\qquad + \langle Mx,y\rangle_X \quad \forall x,y\in D(A), \\ P(0)=0. \end{cases}$$

Come sappiamo dal corollario 29, $P(\cdot)$ esiste unica e $t\mapsto\langle P(t)x,x\rangle_X$ è crescente; inoltre, essendo $P_0=0$,

$$\langle P(t)x,x\rangle_X = J_{T+t}(x,u^*_{T+t,x}) \le J(x,\bar u_x) < \infty \qquad \forall t\ge 0,$$

e dunque

$$\exists \lim_{t\to\infty} \langle P(t)x,x\rangle_X \in \mathbb{R}.$$

Per polarizzazione,

$$\exists \lim_{t\to\infty}\langle P(t)x,y\rangle_X \in \mathbb{R} \qquad \forall x,y\in X.$$

Dunque $\exists\, \bar P\in\Sigma(X)$, $\bar P\ge 0$, tale che $P(t)x \rightharpoonup \bar P x$ $\forall x\in X$.

Ma essendo

$$\langle[\bar P-P(t)]x,x\rangle_X = \|[\bar P-P(t)]^{1/2}x\|_X^2 \searrow 0 \text{ per } t\to\infty,$$

tenuto conto che

$$\|[\bar P-P(t)]^{1/2}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|\bar P\|^{1/2}_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

si ottiene

$$\|[\bar P-P(t)]x\|_X \le \|\bar P\|^{1/2}_{\mathcal{L}(X)}\,\|[\bar P-P(t)]^{1/2}x\|_X \to 0 \text{ per } t\to\infty,$$

ossia

$$P(t)x \to \bar P x \quad \text{in } X \quad \forall x\in X.$$

Passiamo al limite per $t\to\infty$ nell'equazione differenziale di Riccati. Il secondo membro tende a

$$\langle \bar Px,Ay\rangle_X + \langle Ax,\bar Py\rangle_X - \langle N^{-1}B^*\bar Px,\bar Py\rangle_X + \langle Mx,y\rangle_X \;;$$

quindi ha limite anche il 1° membro, che è una derivata: se il suo limite fosse $\lambda \neq 0$, avremmo

$$\lim_{t\to\infty} \langle P(t)x,y\rangle_X = \pm\infty$$

a seconda del segno di λ. Ma ciò è impossibile, perché tale limite è finito. Ne segue $\lambda=0$ e pertanto $\bar{P}$ risolve l'equazione algebrica di Riccati.

Proviamo la minimalità di $\bar{P}$. Se $\tilde{P}$ è un'altra soluzione di tale equazione, allora $\tilde{P}$ è soluzione stazionaria dell'equazione differenziale di Riccati, con dato iniziale $\hat{P}\geq 0$. Consideriamo i funzionali

$$\tilde{J}^t(x,u)=\int_0^t \left[\langle My(r),y(r)\rangle_X+\langle Nu(r),u(r)\rangle_U\right]dr + \langle \tilde{P}y(t),y(t)\rangle_X$$

$$J^t(x,u)=\int_0^t \left[\langle My(r),y(r)\rangle_X+\langle Nu(r),u(r)\rangle_U\right]dt.$$

Chiaramente $J^t\leq \tilde{J}^t$, e i loro valori minimi sono

$$\inf J^t = \langle Q_t(0)x,x\rangle_X=\langle P(t)x,x\rangle_X, \quad \inf \tilde{J}_t=\langle \tilde{P}x,x\rangle_X.$$

Si ha dunque

$$\langle P(t)x,x\rangle_X= \inf J^t \leq \tilde{J}^t(x,u) \quad \forall u\in L^2(0,t,U)$$

e pertanto

$$\langle P(t)x,x\rangle_X \leq \langle \hat{\tilde{P}}x,x\rangle_X \quad \forall t\geq 0,$$

da cui, per $t\to+\infty$,

$$\langle \bar{P}x,x\rangle_X \leq \langle \hat{\tilde{P}}x,x\rangle_X.$$

Proviamo infine le relazioni per u^* e $J(x,u^*)$.

Sia (u^*, y^*) ottimale per $J(x,u)$. Si ha allora per ogni $t \geq 0$,

$$\langle P(t)x, x\rangle_X = \inf J^t \leq J^t(x,u^*) \leq J(x,u^*),$$

e per $t \to \infty$

$$\langle \overline{P}x, x\rangle_X \leq J(x,u^*).$$

Viceversa, sia $t>0$ e sia (u_t, y_t) la coppia ottimale per J^t: allora se $T<t$ si ha

$$\langle P(t)x, x\rangle_X = \int_0^t \left[\langle M y_t(r), y_t(r)\rangle_X + \langle N u_t(r), u_t(r)\rangle_U\right] dr \geq$$

$$\geq \int_0^T \left[\langle M y_t(r), y_t(r)\rangle_X + \langle N u_t(r), u_t(r)\rangle_U\right] dr.$$

Utilizziamo a questo punto il seguente

<u>Lemma 32</u> Siano $\overline{y}$ la soluzione di

$$\overline{y}(t) = G(t)x - \int_0^t G(t-s) B N^{-1} B^* \overline{P}\, \overline{y}(s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

e

$$\overline{u}(t) = -N^{-1} B^* \overline{P}\, \overline{y}(t), \quad t \geq 0.$$

Allora si ha per $t \to \infty$, per ogni $T > 0$,

$$y_t \to \overline{y} \text{ in } C([0,T], X), \quad u_t \to \overline{u} \text{ in } C([0,T], X).$$

<u>dim</u>. posposta.

Concludiamo la dimostrazione del teorema 31: dall'ultima relazione scritta, tenendo conto del lemma 32, per $t \to \infty$ si ottiene per ogni $T>0$

$$\langle \bar{P}x,x\rangle_X \geq \int_0^T \left[\langle M\bar{y}(r),\bar{y}(r)\rangle_X + \langle N\bar{u}(r),\bar{u}(r)\rangle_U\right] dr,$$

da cui, per $T\to\infty$,

$$\langle \bar{P}x,x\rangle_X \geq J(x,\bar{u}).$$

Ciò mostra che $\bar{u}\in\mathcal{U}_x$ e che, a maggior ragione,

$$\langle \bar{P}x,x\rangle_X \geq J(x,\bar{u}) \geq J(x,u^*).$$

Ricordando che valeva la disuguaglianza, concludiamo che $\langle \bar{P}x,x\rangle_X = J(x,u^*)$ e, per unicità, $\bar{u}=u^*$ e $\bar{y}=y^*$, da cui la relazione $u^* = -N^{-1}B^*\bar{P}y^*$. Il teorema è dimostrato □

<u>dim. del lemma 32</u>. La coppia (u_t, y_t) è ottimale per J^t. Ricordando il corollario 21, si ha

$$u_t(r) = -N^{-1}B^*Q(r)y_t(r) = -N^{-1}B^*P(t-r)y_t(r),$$

e

$$y_t(r) = G(r)x - \int_0^r G(r-s)BN^{-1}B\,P(t-s)y_t(s)\,ds, \quad r\in[0,t].$$

Dunque, fissato $T<t$, in $[0,T]$ la funzione $z_t = y_t - \bar{y}$ risolve

$$z_t(r) = -\int_0^r G(r-s)BN^{-1}B\,P(t-s)z_t(s)\,ds - \int_0^r G(r-s)BN^{-1}B\left[P(t-s)-\bar{P}\right]\bar{y}(s)\,ds.$$

Si tratta di una equazione integrale del tipo analizzato nel lemma 26 (con $K(r) = -BN^{-1}BP(t-r)$ e $g(r) = -BN^{-1}B\left[P(t-r)-\bar{P}\right]\bar{y}(r)$).

Quindi possiamo scrivere

$$z_t(r) = U_t\cancel{(r,0)}\cdot 0 - \int_0^r U_t(r,s)BN^{-1}B\left[P(t-s)-\bar{P}\right]\bar{y}(s)\,ds,$$

con $U_t(r,s)\in\mathcal{L}(X)$ e

$$\|U_t(r,s)\|_{\mathcal{L}(X)} \le 2He^{\alpha(r-s)} \quad \forall r \ge s \ge 0,$$

con $\alpha > 2H\|B\|^2\|\bar{P}\|\|N^{-1}\| + \omega$.

Allora si ha

$$|z_t(r)| \le \int_0^T 2He^{\alpha T}\|B\|^2\|N^{-1}\|\,\|[P(t-s)-\bar{P}]\,\bar{y}(s)\|_X\,ds,$$

e l'integrando converge puntualmente a 0 ed è dominato da una funzione sommabile della forma $C\|\bar{y}(s)\|_X$ (si ricordi che $\bar{y} \in C([0,T],X)$. Perciò $z_t \to 0$ uniformemente in $[0,T]$, ossia $y_t \to \bar{y}$ in $C([0,T],X)$. Infine, verifichiamo che $u_t \to \bar{u}$ in $C([0,T],U)$. Si ha

$$u_t(r)-\bar{u}(r) = -N^{-1}B^*P(t-r)[y_t(r)-\bar{y}(r)] + N^{-1}B^*[\bar{P}-P(t-r)]\,\bar{y}(r),$$

e il 1° termine è uniformemente convergente, essendo

$$\|N^{-1}B^*P(t-r)[y_t(r)-\bar{y}(r)]\|_U \le \|N^{-1}\|\|B\|\|\bar{P}\|\,\|y_t-\bar{y}\|_{C([0,T],X)}.$$

Il secondo termine richiede più cura. Sia $\varepsilon > 0$. Per uniforme continuità, esiste $p_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\left\|\bar{y}(r)-\bar{y}\left(\tfrac{k}{p_\varepsilon}T\right)\right\|_X \le \varepsilon \quad \forall r \in \left[\tfrac{k}{p_\varepsilon}T, \tfrac{k+1}{p_\varepsilon}T\right], \quad k=0,1,\dots,p_\varepsilon-1.$$

D'altra parte, poiché $P(t)x \to \bar{P}x$ per $t\to\infty$ per ogni $x \in X$, esiste $T_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left\|[P(t)-\bar{P}]\,\bar{y}\left(\tfrac{k}{p_\varepsilon}T\right)\right\|_X < \varepsilon \quad \forall t \ge T_\varepsilon, \quad k=0,1,\dots,p_\varepsilon-1.$$

Ne segue, per ogni $r \in \left[\tfrac{k}{p_\varepsilon}T, \tfrac{k+1}{p_\varepsilon}T\right]$,

$$\left\|\left[\overline{P}-P(t-r)\right]\overline{Y}(r)\right\|_X \le \|\overline{P}\|\cdot\left\|\overline{Y}(r)-\overline{Y}\left(\frac{k}{p_\varepsilon}T\right)\right\|_X +$$

$$+\left\|\left[\overline{P}-P(t-r)\right]\overline{Y}\left(\frac{k}{p_\varepsilon}T\right)\right\|_X \le$$

$$\le \|\overline{P}\|\varepsilon + \varepsilon \quad \text{se} \quad t-r \ge T_\varepsilon ;$$

ne segue, per $t \ge T_\varepsilon + T$,

$$\left\|\left[\overline{P}-P(t-r)\right]\overline{Y}(r)\right\|_X \le \left(\|\overline{P}\|+1\right)\varepsilon \qquad \forall r\in[0,T],$$

e ciò implica che il 2° termine va a 0 uniformemente: il lemma è provato □

Sotto quali condizioni l'equazione algebrica di Riccati ha soluzione unica? Sotto particolari ipotesi legate alla stabilizzabilità di (A,B).

<u>Definizione</u> la coppia (A,B) è <u>esponenzialmente stabilizzabile</u> se esiste $K\in\mathcal{L}(X,U)$ (il <u>feedback stabilizzante</u>) tale che l'operatore

$$\begin{cases} D(A_K)=D(A) \\ A_K y = Ay + BKy \end{cases}$$

sia g.i. di un s.g.f.c. esponenzialmente stabile.

<u>Definizione</u> Sia $C\in\mathcal{L}(X,Y)$ ove Y è un altro spazio di Hilbert separabile. La coppia (A,C) è <u>esponenzialmente rilevabile</u> (detectable) se (A^*,C^*) è una coppia esponenzialmente stabilizzabile; dunque esiste un feedback $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ tale che A^*+C^*L è g.i. di un s.g.f.c. esponenzialmente stabile. Lo stesso vale allora per $A+L^*C$.

<u>Teorema 33</u> (i) Se (A,B) è esponenzialmente stabilizzabile, allora l'equazione algebrica di Riccati ha almeno una soluzione $P \in \Sigma(X)$ non negativa.

(ii) Se $M = C^*C$, con (A,C) esponenzialmente rilevabile, allora l'equazione algebrica di Riccati ha esattamente una soluzione $P \in \Sigma(X)$ non negativa; inoltre (A,B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback $K = -N^{-1}B^*P$ (e quindi vi è un unico controllo ottimale).

<u>dim</u> (i) Dall'ipotesi segue che $U_x \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$: basta risolvere l'equazione $y' = (A+BK)y$, $y(0) = x$, che fornisce $y = G_K(t)x$ (ove G_K è il sg generato da $A+BK$), e poi scegliere $u = -Ky$. A questo punto si applica il Teorema 31

(ii) Siano P, P_1 soluzioni dell'equazione algebrica di Riccati con $M = C^*C$, e poniamo $K = -N^{-1}B^*P$. Allora si ha per $x, y \in D(A)$

$$\langle (A+BK)x, Py\rangle_X + \langle Px, (A+BK)y\rangle_X + \langle NKx, Ky\rangle_U + \langle Cx, Cy\rangle_Y =$$

$$= \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X + \langle BKx, Py\rangle_X + \langle Px, BKy\rangle_X + \langle NKx, Ky\rangle_U + \langle Cx, Cy\rangle_Y =$$

$$= \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X - 2\langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \langle C^*Cx, y\rangle_X =$$

$$= \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \langle C^*Cx, y\rangle_X = 0.$$

Adesso c'è un lemma che ci fa concludere.

Lemma 34 Se $R \in \Sigma(X)$, $R \geq 0$, e $K \in \mathcal{L}(X)$ soddisfano l'equazione

$$\langle (A+BK)x, Rx\rangle_X + \langle Rx, (A+BK)x\rangle_X + \langle NKx, Kx\rangle_U + \langle Cx, Cy\rangle_Y = 0$$

per ogni $x \in D(A)$, risulta:

(i) se (A, C) è esponenzialmente rilevabile, allora (A, B) è esponenzialmente stabile con feedback K;

(ii) se inoltre $P \in \Sigma(X)$, $P \geq 0$ è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati con $M = C^*C$, allora $P \leq R$.

<u>dim.</u> posposta.

Concludiamo la dimostrazione del Teorema 33: applicando il lemma 34 con R, P dati da P e P_1, si ottiene $P_1 \leq P$. Ripetendo la dimostrazione di (ii) con P_1 al posto di P, applicando di nuovo il lemma 34 con R, P dati da P_1 e P, si ottiene $P \leq P_1$.
Dunque $P = P_1$ e ciò fornisce l'unicità della soluzione della equazione algebrica di Riccati. L'esistenza segue dalla (i) del lemma 34, e dalla (i) già dimostrata. Ciò prova il Teorema 33. □

<u>dim del lemma 34</u> (i) Sia G_K il sgfc. generato da $A+BK$: esso esiste, perchè l'equazione

$$\lambda u - Au - BKu = f \in X$$

equivale, se $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, a

181

$$u = R(\lambda, A)[f - BKu],$$

da cui

$$\|u\|_X \le \frac{H}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|f\|_X + \frac{H\|B\|\,\|K\|}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|u\|_X.$$

Poniamo $\omega_1 = \omega + 2H\|B\|\,\|K\|$: se $\operatorname{Re}\lambda > \omega_1$ possiamo scrivere

$$\|u\|_X \le \frac{H}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|f\|_X + \frac{1}{2}\|u\|_X,$$

cioè

$$\|u\|_X \le \frac{2H}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|f\|_X \le \frac{2H}{\operatorname{Re}\lambda - \omega_1}\|f\|_X,$$

quindi

$$\rho(A+BK) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega_1\},$$

e per il teorema di Hille-Yosida $A+BK$ è g.i. di un sgfc $G_K \in \mathcal{G}(2H, \omega_1)$.

Per ipotesi, (A, C) è esponenzialmente stabilizzabile: quindi, come osservato nella definizione, esiste un operatore $L \in \mathcal{L}(Y, X)$ tale che $A + L^*C$ sia g.i. di un sgfc G_L esponenzialmente stabile.

Sia allora

$$y(t) = G_K(t)x, \qquad t > 0.$$

Scrivendo

$$A+BK = A+L^*C + (BK-L^*C),$$

possiamo scrivere

$$y(t) = G_K(t)x = G_L(t)x + \int_0^t G_L(t-s)[BK - L^*C]y(s)\,ds.$$

Proviamo che $Cy \in L^2(0,\infty,Y)$ e $Ky \in L^2(0,\infty,U)$. Supponiamo dapprima $x \in D(A)$: allora $y'(t) = (A+BK)y(t)$ e, usando l'equazione risolta da R,

$$\frac{d}{dt}\langle Ry(t), y(t)\rangle_X = \langle (A+BK)y(t), Ry(t)\rangle_X + \langle Ry(t), (A+BK)y(t)\rangle_X =$$

$$= -\langle NKy(t), Ky(t)\rangle_U - \langle Cy(t), Cy(t)\rangle_Y.$$

Perciò, integrando in $[0,t]$,

$$\langle Ry(t), y(t)\rangle_X + \int_0^t \|N^{1/2}Ky(s)\|_U^2\,ds + \int_0^t \|Cy(s)\|_Y^2\,ds = \langle Rx, x\rangle_X.$$

Per densità, questa relazione vale per ogni $x \in X$. Per $t \to \infty$, si ottiene $Cy \in L^2(0,\infty,Y)$ e $Ky \in L^2(0,\infty,U)$.

Poi, la relazione esplicita di y in termini di G_L mostra che

$$\|y\|_{L^2(0,\infty,X)} \le c\,\|x\|_X + c\,\|Ky\|_{L^2(0,\infty,U)} + c\,\|Cy\|_{L^2(0,\infty,Y)}.$$

Perciò, $y(t) = G_K(t)x$ sta in $L^2(0,\infty,X)$: per il teorema 12 di Datko si ottiene che G_K è esponenzialmente stabile, e (i) è provata.

(ii) Poniamo $W = R-P$. Per $x \in D(A)$ si ha, usando l'equazione algebrica di Riccati con $M = C^*C$ risolta da P,

$$\langle (A+BK)x, Wx\rangle_X + \langle Wx, (A+BK)x\rangle_X =$$

$$= \cancel{-\langle C^*Cx, x\rangle_X} - \langle NKx, Kx\rangle_U -$$

$$-\langle BKx, Px\rangle_X - \langle Px, BKx\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Px\rangle_U + \cancel{\langle Mx,x\rangle_X}.$$

Poniamo $K_0 = -N^{-1}B^*P$: allora $NK_0 = -B^*P$, $PB = -K_0^*N$ e perciò

$$\langle (A+BK)x, Wx\rangle_X + \langle Wx, (A+BK)x\rangle_X =$$

$$= -\langle K^*NKx, x\rangle_X + \langle K_0^*NKx, x\rangle_X + \langle K^*NK_0x, x\rangle_X - \langle K_0^*NK_0x, x\rangle_X =$$

$$= -\langle N(K-K_0)x, (K-K_0)x\rangle_U \le 0 \quad \forall x \in D(A).$$

Sostituendo $G_K(t)x$ al posto di x, si ottiene per ogni $t \ge 0$,

$$\frac{d}{dt}\langle G_K(t)x, WG_K(t)x\rangle_X = \langle (A+BK)G_K(t)x, WG_K(t)x\rangle_X + \langle WG_K(t)x, (A+BK)G_K(t)x\rangle_X \le 0,$$

e integrando in $[0,t]$

$$\langle WG_K(t)x, G_K(t)x\rangle_X \le \langle Wx, x\rangle \quad \forall x \in D(A).$$

Per densità,

$$\langle WG_K(t)x, G_K(t)x\rangle_X \le \langle Wx, x\rangle \quad \forall x \in X.$$

Per $t \to +\infty$, il 1° membro tende a 0: ne segue $\langle Wx, x\rangle_X \ge 0$ per ogni $x \in X$, e in definitiva $W \ge 0$, cioè $R \ge P$. Ciò prova (iii) e conclude la dimostrazione del Lemma 34. □