Unicità per l'equazione di Riccati

Cominciamo con un'osservazione importante, anche se collaterale.
Utilizzando il semigruppo $\mathcal{G}(t)Q = G(t)^* Q G(t)$, l'equazione di Riccati

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle P(t)x, Ay\rangle_X + \langle Ax, P(t)y\rangle_X - \langle N^{-1}B^* P(t)x, B^* P(t)y\rangle_U + \langle Mx, y\rangle_X \quad \forall x, y \in D(A)$$

si scrive nella forma mild seguente:

$$P(t)x = G(t)^* P_0 G(t)x + \int_0^t G(t-s)^* [M - P(s)BN^{-1}B^* P(s)] G(t-s)x \, ds, \quad x \in X.$$

Poniamo $C_s([0,T], \Sigma(X)) = \{Q : [0,T] \to \Sigma(X) : t \mapsto Q(t)x \in C([0,T], X) \ \forall x \in X\}$.

Proposizione 25 Sia $P \in C_s([0,T], \Sigma(X))$. Sono fatti equivalenti:

(i) P è soluzione mild dell'equazione di Riccati,

(ii) $\langle P(t)x, y\rangle_X$ è derivabile q.o. in $[0,T]$, e verifica l'equazione differenziale di Riccati per ogni $x, y \in D(A)$.

dim Se $x, y \in D(A)$ e P è soluzione mild, possiamo scrivere

$$\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle P_0 G(t)x, G(t)y\rangle_X + \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^* P(s)] G(t-s)x, G(t-s)y\rangle_X \, ds,$$

quindi possiamo derivare e otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X = {} & \langle P_0 G(t)Ax, G(t)y\rangle_X + \langle P_0 G(t)x, G(t)Ay\rangle_X + \\ & + \langle [M - P(t)BN^{-1}B^* P(t)] x, y\rangle_X + \\ & + \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^* P(s)] G(t-s)Ax, G(t-s)y\rangle_X \, ds + \\ & + \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^* P(s)] G(t-s)x, G(t-s)Ay\rangle_X \, ds =\end{aligned}$$

$$= \langle Ax, G(t)^* P_0 G(t) y \rangle_X + \langle G(t)^* P_0 G(t) x, Ay \rangle_X + \langle Mx, y \rangle_X$$

$$- \langle N^{-1} B^* P(t) x, B^* P(t) y \rangle_U +$$

$$+ \langle Ax, \int_0^t G(t-s)^* [M - P(s) B N^{-1} B^* P(s)] G(t-s) y \, ds \rangle_X +$$

$$+ \langle \int_0^t G(t-s)^* [M - P(s) B N^{-1} B^* P(s)] G(t-s) x \, ds, Ay \rangle_X =$$

$$= \langle Ax, P(t) y \rangle_X + \langle P(t) x, Ay \rangle_X + \langle Mx, y \rangle_X - \langle N^{-1} B^* P(t) x, B^* P(t) y \rangle_U .$$

Viceversa, se $P(t)$ risolve l'equazione differenziale, allora per $x, y \in D(A)$ si ha

$$\frac{d}{ds} \langle P(t-s) G(s) x, G(s) y \rangle_X =$$

$$- \cancel{\langle AG(s)x, P(t-s) G(s) y \rangle_X} - \cancel{\langle P(t-s) G(s) x, AG(s) y \rangle_X} - \langle MG(s) x, G(s) y \rangle_X$$

$$+ \langle N^{-1} B^* P(t-s) G(s) x, B^* P(t-s) G(s) y \rangle_U +$$

$$+ \cancel{\langle P(t-s) AG(s) x, G(s) y \rangle_X} + \cancel{\langle P(t-s) G(s) x, AG(s) y \rangle_X} =$$

$$= - \langle MG(s) x, G(s) y \rangle_X + \langle N^{-1} B^* P(t-s) G(s) x, B^* P(t-s) G(s) y \rangle_U .$$

Integrando in $[0,t]$,

$$\langle P_0 G(t) x, G(t) y \rangle_X - \langle P(t) x, y \rangle_X = - \int_0^t \langle MG(s) x, G(s) y \rangle_X \, ds +$$

$$+ \int_0^t \langle N^{-1} B^* P(t-s) G(s) x, B^* P(t-s) G(s) y \rangle_U \, ds ,$$

da cui

$$\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle G(t)^* P_0 G(t)x, y\rangle_X +$$

$$+\int_0^t \langle G(r)^* [M - P(t-r)BN^{-1}B^* P(t-r)] G(r)x, y\rangle_X \, dr .$$

Per densità, la stessa relazione vale per ogni $x, y \in X$, e per l'arbitrarietà di y si ottiene che P è soluzione mild $\square$

Stabiliamo adesso un lemma fondamentale per il seguito.

<u>Lemma 26</u> Sia $\sigma \in [0,T]$, sia $K \in C_S([\sigma,T], \mathcal{L}(X))$. Allora per ogni $x \in X$ l'equazione integrale

$$y(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)K(r)\,y(r)\,dr \quad , \; t \in [\sigma, T],$$

ha un'unica soluzione in $C([\sigma,T],X)$. Tale soluzione dipende linearmente da x, e verrà perciò denominata

$$y(t) =: U(t,\sigma)x .$$

L'operatore $U(t,\sigma)$ verifica:

$$\begin{cases} U(t,\sigma)x = U(t,\tau)U(\tau,\sigma)x & \forall \tau \in [\sigma, t], \\ U(\sigma,\sigma)x = x \end{cases} \qquad \|U(t,\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \le 2H e^{d(t-\sigma)},$$

ed inoltre, per ogni $g \in C([\sigma,T],X)$ la soluzione dell'equazione

$$z(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)\cdot[K(r)\,y(r) + g(r)]\,dr$$

è la funzione

$$z(t) = U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,r)\,g(r)\,dr, \quad t \in [\sigma, T].$$

<u>dim</u> Lo spazio $C_S([\sigma,T], \mathcal{L}(X))$ è di Banach con la norma

$$\|K\| = \sup_{t\in[\sigma,T]} \|K(t)\|_{\mathcal{L}(X)} ;$$

tale estremo superiore è finito in virtù del teorema di Banach-
- Steinhaus.

Introduciamo in $C([\sigma,T],X)$ una nuova norma: per $\alpha>0$ poniamo

$$\|g\|_\alpha = \sup_{t\in[\sigma,T]} e^{-\alpha(t-\sigma)} \|g(t)\|_X ;$$

chiaramente

$$\|g\|_\alpha \le \|g\|_\infty \le e^{\alpha(T-\sigma)} \|g\|_\alpha .$$

Detto

$$[Ly](t) = \int_\sigma^t G(t-r)\,K(r)\,y(r)\,dr ,$$

si ha $L\in\mathcal{L}(C([\sigma,T],X))$ e inoltre per $t\in[\sigma,T]$ risulta

$$e^{-\alpha(t-\sigma)}\|Ly(t)\|_X = \left\| \int_\sigma^t e^{-\alpha(t-r)} G(t-r)\,K(r)\,e^{-\alpha(r-\sigma)}\,y(r)\,dr \right\|_X \le$$

$$\le H\int_\sigma^t e^{-(\alpha-\omega)(t-r)} \|K\|\,\|y\|_\alpha\,dr \le \frac{H\|K\|}{\alpha-\omega}\|y\|_\alpha ,$$

per cui, se $\alpha>\omega$ è sufficientemente grande (basta $\alpha>2H\|K\|+\omega$)

$$\|Ly\|_\alpha \le \frac{1}{2}\|y\|_\alpha .$$

Posto allora

$$\mathcal{L}(y)(t) = G(t-\sigma)x + Ly(t) ,$$

$\mathcal{L}$ è una contrazione da $C([\sigma,T],X)$ in sé, essendo

$$\|\mathcal{L}(y)-\mathcal{L}(z)\|_\alpha = \|L(y-z)\|_\alpha \le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha .$$

Quindi vi è una unica $y(t)$ tale che
$$y(t) = \mathcal{L}(y)(t) \quad \forall t \in [\sigma, T].$$
La linearità di y rispetto a x è immediata. Notiamo poi che
$$\|y(t)\|_X = \|G(t-\sigma)x + Ly(t)\| \le He^{\omega(t-\sigma)}\|x\|_X + \|Ly(t)\|_X,$$
da cui
$$e^{-\alpha(t-\sigma)}\|y(t)\|_X \le He^{-(\alpha-\omega)(t-\sigma)}\|x\|_X + e^{-\alpha(t-\sigma)}\|Ly(t)\|_X$$
e pertanto
$$\|y\|_\alpha \le H\|x\|_X + \|Ly\|_\alpha \le H\|x\|_X + \frac{1}{2}\|y\|_\alpha ;$$
dunque
$$\|y\|_\alpha \le 2H\|x\|_X$$
e infine
$$\|y(t)\|_X \le e^{\alpha(t-\sigma)} 2H\|x\|_X \quad \forall t \in [\sigma, T].$$
Ciò prova la stima per $\|U(t,\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)}$. La relazione $U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$ è facile conseguenza dell'unicità, mentre ovviamente $U(\sigma,\sigma)x = x$.

Consideriamo infine la funzione
$$w(t) = U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,s)g(s)\,ds:$$
partendo dalla relazione che definisce $U(t,\sigma)x$, cioè
$$U(t,\sigma)x = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)K(r)U(r,\sigma)x\,dr,$$
si ricava:

$$U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,s)g(s)\,ds =$$

$$= G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)K(r)U(r,\sigma)x\,dr +$$

$$+ \int_\sigma^t \left[G(t-s)g(s) + \int_s^t G(t-r)K(r)U(r,s)g(s)\,dr \right] ds =$$

$$= G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)g(s)\,ds +$$

$$+ \int_\sigma^t G(t-r)K(r)U(r,\sigma)x\,dr + \int_\sigma^t G(t-r)K(r)\int_\sigma^r U(r,s)g(s)\,ds\,dr =$$

$$= G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)g(r)\,dr + \int_\sigma^t G(t-r)K(r)\left[U(r,\sigma)x + \int_\sigma^r U(r,s)g(s)\,ds\right] dr$$

Perciò w risolve l'equazione

$$z(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-r)\left[g(r) + K(r)z(r)\right] dr.$$

Ma questa equazione ha soluzione unica, poiché se z_1 e z_2 sono soluzioni, allora $y = z_1 - z_2$ risolve

$$y(t) = \int_\sigma^t G(t-r)K(r)y(r)\,dr,$$

ossia

$$y(t) = U(t,\sigma)0 = 0.$$

Ne segue la tesi del lemma $\square$

Veniamo ora all'enunciato chiave ai fini dell'unicità della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati.

Proposizione 27 Sia $R:[0,T]\to\Sigma(X)$ una soluzione dell'equazione differenziale di Riccati, con $R(T)=P_0$. Allora per ogni $x\in X$, per ogni $u\in L^2(s,T;U)$ e per lo stato y corrispondente al valore iniziale $y(s)=x$, si ha
$$\langle R(s)x,x\rangle_X = J_s(x,u) - \int_s^T \|N^{1/2}[u(t)+N^{-1}B^*R(t)y(t)]\|_U^2\,dt .$$

dim. Supponiamo dapprima $u\in C^1([s,T],U)$: allora $y\in C^1([s,T],X)$ e si ha, aggiungendo e togliendo, alla fine, $\|N^{1/2}u(t)\|_U^2$,
$$\frac{d}{dt}\langle R(t)y(t),y(t)\rangle_X = \frac{d}{dt}\langle R(t)z,z\rangle_X\Big|_{z=y(t)} + \langle y'(t),R(t)y(t)\rangle_X + \langle R(t)y(t),y'(t)\rangle_X =$$
$$= -\cancel{\langle R(t)y(t),Ay(t)\rangle_X} - \cancel{\langle Ay(t),R(t)y(t)\rangle_X} + \langle N^{-1}B^*R(t)y(t),B^*R(t)y(t)\rangle_U -$$
$$-\langle My(t),y(t)\rangle_X + \cancel{\langle Ay(t),R(t)y(t)\rangle_X} + \langle Bu(t),R(t)y(t)\rangle_X +$$
$$+\cancel{\langle R(t)y(t),Ay(t)\rangle_X} + \langle R(t)y(t),Bu(t)\rangle_X =$$
$$= -\|M^{1/2}y(t)\|_X^2 + \|N^{-1/2}B^*R(t)y(t)\|_U^2 + \langle u(t),B^*R(t)y(t)\rangle_U + \langle B^*R(t)y(t),u(t)\rangle_U =$$
$$= -\|M^{1/2}y(t)\|_X^2 - \|N^{1/2}u(t)\|_U^2 + \|N^{1/2}[u(t)+N^{-1}B^*R(t)y(t)]\|_U^2 .$$
Integrando su $[s,T]$,
$$\langle P_0y(T),y(T)\rangle_X + \int_s^T[\langle My(t),y(t)\rangle_X + \langle Nu(t),u(t)\rangle_U]\,dt -$$
$$-\int_s^T \|N^{1/2}[u(t)+N^{-1}B^*R(t)y(t)]\|_U^2\,dt = \langle R(s)x,x\rangle_X ,$$
cioè la tesi. □

Corollario 28 (unicità). Sia $R:[0,T]\to\Sigma(X)$ una soluzione in $[0,T]$ della equazione differenziale di Riccati. Allora $R(t)=Q(t)$, ove Q è l'operatore tale che $\langle Q(s)x,x\rangle_X = V(s,x)$ $\forall x\in X$, $\forall s\in[0,T[$.

dim Fissato $s\in[0,T[$, la proposizione 27 dice che
$$\langle R(s)x,x\rangle_X \le J_s(x,u) \quad \forall u\in L^2(s,T;U),$$
ma scegliendo la soluzione $\bar y(t)$ dell'equazione
$$\bar y(t) = G(t-s)x - \int_s^t G(t-r)\, BN^{-1}B^* R(r)\bar y(r)\,dr,$$
e
$$\bar u(t) = -N^{-1}B^* R(t)\bar y(t),$$
si vede subito che
$$\langle R(s)x,x\rangle_X = J_s(x,\bar u) \le J_s(x,u) \quad \forall u\in L^2(s,T;U).$$
Dunque deve essere $\bar u(t) = u^*_{s,x}(t)$, il controllo ottimale. Ne segue
$$\langle R(s)x,x\rangle_X = V(s,x) = \langle Q(s)x,x\rangle_X \quad \forall s\in[0,T[$$
cioè, per polarizzazione,
$$R(s) = Q(s) \quad \forall s\in[0,T]. \ \square$$

Corollario 29 Per ogni $P_0\in\Sigma(X)$, $P_0\ge 0$, esiste un'unica soluzione $P(t)\ge 0$ dell'equazione differenziale di Riccati in avanti
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle P(t)x,y\rangle_X = \langle P(t)x,Ay\rangle_X + \langle Ax,P(t)y\rangle_X - \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U + \langle Mx,y\rangle_X \\ \qquad\qquad \forall x,y\in D(A), \\ P(0) = P_0\,; \end{cases}$$
inoltre si ha $P_0\le P(t)\le P(t')$ per $0\le t\le t'$.

Per ogni $T>0$, vi è un unico operatore $Q_T\in\Sigma(X)$, $Q_T\ge 0$, tale che $(Q_T x,x) = V(T,x)$ (la funzione valore del funzionale J_T), e Q_T risolve univocamente l'equazione di Riccati retrograda. Ne segue che $P(t) = Q_T(T-t)$

è l'unica soluzione in $[0,T]$ dell'equazione di Riccati in avanti.
Se ora $T_1 > T$, allora $P_1(t) = Q_{T_1}(T_1 - t)$ risolve l'equazione di Riccati in avanti, in $[0,T_1]$ e quindi in $[0,T]$, con lo stesso dato P_0 per $t=0$.
Quindi $P_1(t) = P(t)$ in $[0,T]$, e dunque $P(t)$ è estendibile a $[0,T_1]$ a una soluzione in $[0,T_1]$. Per l'arbitrarietà di T_1, $P(t)$ è definita in $[0,\infty[$ ed è l'unica soluzione in $[0,\infty[$ dell'equazione in avanti.
Proviamo la crescenza di $P(t)$: scelto $T > t' \geq t \geq 0$, per ogni $u \in L^2(t,T;U)$ si ha

$$J_t(x,u) \geq J_{t'}(x,u) \geq J_{t'}(x, u^*_{t',x}) = V(t',x)$$

e quindi

$$V(t,x) \geq V(t',x).$$

Perciò

$$\langle P(T-t)x, x\rangle_X = \langle Q_T(t)x, x\rangle_X = V(t,x) \geq$$
$$\geq V(t',x) = \langle Q_T(t')x, x\rangle_X = \langle P(T-t')x, x\rangle_X,$$

ovvero, essendo $T-t \geq T-t'$, si ha $P(\cdot)$ crescente come richiesto. □