L'equazione di Riccati

Dimostriamo anzitutto che $t \mapsto V(t,x)$ è lipschitziana quando $x \in D(A)$.

Lemma 22 Esiste $L'_T \geq 0$ tale che

$$|V(t,x) - V(\tau,x)| \leq L'_T \left[\|x\|_X + \|Ax\|_X \right] \|x\|_X \, |t-\tau| \quad \forall t,\tau \in [0,T], \ \forall x \in D(A).$$

dim. Anzitutto, la relazione

$$V(t,x) = J_t(Y^*_{t,x}(t), u^*_{t,x})$$

e le stime puntuali della Proposizione 14 mostrano che

$$(Q(t)x,x)_X = V(t,x) \leq C_T \|x\|^2_X \quad \forall x \in X.$$

Dunque l'operatore autoaggiunto e non negativo $Q(t)$ verifica

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_T.$$

Ne segue

$$|V(t,x) - V(t,z)| = \left| \langle Q(t)x,x \rangle_X - \langle Q(t)z,z \rangle_X \right| \leq$$

$$\leq \left| \langle Q(t)(x-z),x \rangle_X + \langle Q(t)z, x-z \rangle_X \right| \leq$$

$$\leq C_T \left[\|x\|_X + \|z\|_X \right] \|x-z\|_X \quad \forall x,z \in X.$$

Dunque per $t,\tau \in [0,T]$, $t > \tau$, dal Corollario 17 si ha

$$V(\tau,x) - V(t,x) = \int_\tau^t \left[\langle M Y^*_{\tau,x}(r), Y^*_{\tau,x}(r) \rangle_X + \langle N u^*_{\tau,x}(r), u^*_{\tau,x}(r) \rangle_U \right] dr$$

$$+ V(t, Y^*_{\tau,x}(t)) - V(t,x),$$

da cui

$$|V(\tau,x) - V(t,x)| \le L_T^2 \|M\| \|x\|_X^2 |t-\tau| + L_T^2 \|N\| \|x\|_X^2 |t-\tau| +$$

$$+ C_T [1 + L_T] \|x\|_X \|Y^*_{\tau,x}(t) - x\|_X .$$

D'altra parte

$$\|Y^*_{\tau,x}(t) - x\|_X \le \|G(t-\tau)x - x\|_X + \|[L_\tau(u^*_{\tau,x})](t)\|_X \le$$

$$\le \left\| \int_0^{t-\tau} G(\sigma) A x \, d\sigma \right\|_X + \left\| \int_\tau^t G(t-s) B u^*_{\tau,x}(s) \, ds \right\|_X \le$$

$$\le \left[H e^{\omega T} \|Ax\|_X + H e^{\omega T} \|B\| L_T \|x\|_X \right] |t-\tau| ,$$

da cui la tesi. □

<u>Proposizione 23</u> (Equazione di Riccati) Se $x \in D(A)$, allora $t \mapsto V(t,x)$ è derivabile q.o. in $[0,T]$; inoltre per ogni $x, y \in D(A)$ vale

$$\frac{d}{dt} \langle Q(t)x, y \rangle_X + \langle Q(t)x, Ay \rangle_X + \langle Ax, Q(t)y \rangle_X -$$

$$- \langle N^{-1} B^* Q(t)x, B^* Q(t)y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X = 0$$

per q.o. $t \in [0,T]$.

<u>dim</u> La derivabilità q.o. di $V(t,x)$ per $x \in D(A)$ segue dalla sua lipschitzianità (Lemma 22). Per il principio di ottimalità di Bellman, $u^*_{\tau,x}$ è ottimale anche in $[t,T]$ rispetto allo stato iniziale $Y^*_{\tau,x}(t)$: quindi, il Corollario 17, con x rimpiazzato da $Y^*_{\tau,x}(t)$ e s rimpiazzato da t, fornisce

$$\langle Q(t)\, Y^*_{\tau,x}(t),\, Y^*_{\tau,x}(t)\rangle_X = V(t, Y^*_{\tau,x}(t)) =$$

$$= \int_t^T \left[\langle M Y^*_{\tau,x}(r), Y^*_{\tau,x}(r)\rangle_X + \langle N u^*_{\tau,x}(r), u^*_{\tau,x}(r)\rangle_U\right] dr + \langle P_0 Y^*_{\tau,x}(T), Y^*_{\tau,x}(T)\rangle_X.$$

Se τ è un punto di derivabilità di $t \mapsto V(t,x)$, possiamo scrivere analizzando la formula precedente,

$$\exists \left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)\, Y^*_{\tau,x}(t),\, Y^*_{\tau,x}(t)\rangle_X\right]_{t=\tau} = -\langle Mx, x\rangle_X - \langle N u^*_{\tau,x}(\tau), u^*_{\tau,x}(\tau)\rangle_U ;$$

d'altra parte a 1° membro si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\langle Q(\tau+h)\, Y^*_{\tau,x}(\tau+h), Y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X - \langle Q(\tau)x, x\rangle_X\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[\langle Q(\tau+h)\,[Y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x], Y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X +$$

$$+ \langle Q(\tau+h)x, [Y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x]\rangle_X + \langle [Q(\tau+h) - Q(\tau)]x, x\rangle_X\Big].$$

Poichè

$$\frac{1}{h}\left[Y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x\right] = \frac{1}{h}\left[G(h)x - x + \int_\tau^{\tau+h} G(\tau+h-s) B^* u^*_{\tau,x}(s)\, ds\right] \to Ax + B u^*_{\tau,x}(\tau),$$

si ottiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\langle Q(\tau+h)\, Y^*_{\tau,x}(\tau+h), Y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X - \langle Q(\tau)x, x\rangle_X\right] =$$

$$= \langle Q(\tau)[Ax + B u^*_{\tau,x}(\tau)], x\rangle_X + \langle Q(\tau)x, Ax + B u^*_{\tau,x}(\tau)\rangle_X + \left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)x, x\rangle_X\right]_{t=\tau}.$$

Perciò, ricordando la formula feedback della Proposizione 20,

$$u^*_{\tau,x}(t) = -N^{-1}B^*Q(t)\,y^*_{\tau,x}(t),$$

otteniamo

$$\left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)x,x\rangle_X\right]_{t=\tau} + \langle Q(\tau)x, Ax\rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x\rangle_X -$$

$$-2\langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x\rangle_U = -\langle Mx,x\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x\rangle_U,$$

da cui, per q.o. $\tau\in[0,T]$ e per ogni $x\in D(A)$,

$$\frac{d}{d\tau}\langle Q(\tau)x,x\rangle_X + \langle Q(\tau)x, Ax\rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x\rangle_U +$$
$$+\langle Mx,x\rangle_X = 0.$$

Usiamo adesso la polarizzazione, cioè scriviamo questa formula per $x\pm y$, con $x,y\in D(A)$. Allora, per differenza,

$$\exists\ \frac{d}{d\tau}\langle Q(\tau)x,y\rangle_X = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{d\tau}\langle Q(\tau)(x+y), x+y\rangle_X - \frac{d}{d\tau}\langle Q(\tau)(x-y), x-y\rangle_X\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[-\langle Q(\tau)(x+y), A(x+y)\rangle_X - \langle A(x+y), Q(\tau)(x+y)\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)(x+y), B^*Q(\tau)(x+y)\rangle_U +$$
$$+\langle M(x+y), x+y\rangle_X +$$
$$+\langle Q(\tau)(x-y), A(x-y)\rangle_X - \langle A(x-y), Q(\tau)(x-y)\rangle_X + \langle N^{-1}B^*Q(\tau)(x-y), B^*Q(\tau)(x-y)\rangle_U -$$
$$-\langle M(x-y), x-y\rangle_X\Big] =$$

$$= -\langle Q(\tau)x, Ay\rangle_X - \langle Ax, Q(\tau)y\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)y\rangle_U + \langle Mx,y\rangle_X,$$

che è la tesi. □

<u>Osservazione</u> Formalmente, l'operatore Q risolve

$$\begin{cases} Q' = -A^*Q - QA + QBN^{-1}B^*Q - M \\ Q(T) = P_0 \end{cases}$$

che è un problema di Cauchy retrogrado. Si noti che l'operatore

$$\mathcal{A}Q := A^*Q + QA$$

è gi. di un sgfc in $\Sigma(X) = \{Q \in \mathcal{L}(X) : Q = Q^*\}$, vale a dire

$$\mathcal{G}(t)Q = G(t)^*QG(t), \qquad t \geq 0;$$

il suo dominio è

$$D(\mathcal{A}) = \{Q \in \Sigma(X) : |\langle Qx, Ay\rangle_X + \langle Ax, Qy\rangle_X| \leq C\|x\|_X\|y\|_X \quad \forall x, y \in D(A)\}.$$

<u>Osservazione</u> C'è un metodo euristico per dedurre la forma dell'equazione di Riccati: se (u^*, y^*) è la coppia ottimale in $[a,T]$, cerchiamo $Q(t)$ tale che $p^*(t) = Q(t)y^*(t)$: sostituendo nell'equazione di p^*,

$$Q'y^* + Q(y^*)' = -A^*Qy^* - My^*,$$

e ricordando l'equazione di y^*,

$$Q'y^* + QAy^* + QBu^* = -A^*Qy^* - My^*;$$

infine, dalla relazione $u^* = -N^{-1}B^*p^*$ segue

$$Q'y^* + QAy^* + A^*Qy^* - QBN^{-1}B^*Qy^* + My^* = 0$$

Poiché y^* è arbitrario (essendo arbitrario x), si ottiene la forma cercata.

Osservazione: Posto $P(t) = Q(T-t)$, $P(t)$ risolve per ogni $x, y \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X - \langle P(t)x, Ay\rangle_X - \langle Ax, P(t)y\rangle_X + \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U +$$
$$- \langle Mx, y\rangle_X = 0 .$$

Da questa osservazione segue:

Proposizione 24 Sia $P(t)$ soluzione dell'equazione sopra scritta. Allora

$$t \mapsto \langle P(t)x, x\rangle_X \quad \text{è crescente.}$$

dim. Sia $0 \le \tau < t$. Allora, essendo $P_0 = 0$, si ha

$$J_\tau(x,u) \ge J_t(x,u) \quad \forall u \in L^2(\tau, T; U).$$

Pertanto, se u^* è ottimale rispetto a x in $[\tau, T]$,

$$\langle Q(\tau)x, x\rangle_X = V(\tau, x) = J_\tau(x, u^*) \ge J_t(x, u^*) \ge V(t,x) = \langle Q(t)x, x\rangle_X ,$$

ossia

$$Q(\tau) \ge Q(t) \quad \text{se } \tau \le t .$$

Dunque si ha

$$P(\tau) = Q(T-\tau) \le Q(T-t) = P(t) \quad \text{se } \tau \le t ,$$

che è la tesi. □

Utilizzando $P(t) = Q(T-t)$ in luogo di $Q(t)$, la funzione valore del problema di controllo è $V(s,x) = \inf J_s(x,u) = \langle P(T-s)x, x\rangle_X$, e il controllo ottimale è $u^*_{s,x}(t) = -N^{-1}B^*P(T-t)y^*(t)$.