che implica

$$\|y\|_X = \|R(\lambda,A)x\|_X \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda} \|x\|_X .$$

Dal teorema di Hille-Yosida segue che A è gi. di un sgfc $G \in \mathcal{G}(1,0)$. □

__Osservazione__ Si dice che A è __dissipativo__ nello spazio di Hilbert X, quando $\mathrm{Re}(Ax,x)_X \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$, e che A è __massimale dissipativo__ quando in più $\overline{D(A)} = X$. Pertanto gli operatori massimali dissipativi generano semigruppi contrattivi.

__Esempio__ Consideriamo, in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana, il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 . \end{cases}$$

Un primo risultato di esistenza e unicità si ha in forma debole: si considera la forma

$$(u,v) \mapsto \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)_n \, dx \quad , \quad (u,v) \in H^1_0(\Omega),$$

si osserva che, in virtù della disuguaglianza di Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

tale forma è un prodotto scalare su $H^1_0(\Omega)$ equivalente a quello naturale (che è $(u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$); quindi, applicando il teorema di Riesz, per ogni $T \in H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]'$ (duale di $H_0^1(\Omega)$) esiste un' unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)_n \, dx = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La nostra f sta in $L^2(\Omega)$, quindi scelto

$$\langle T, \varphi \rangle = -\int_\Omega f \varphi \, dx$$

si ottiene che esiste un' unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)_n \, dx = -\int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

In particolare, scelta $\varphi = u$, si ottiene

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

e dunque

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inoltre, una tecnica tipica della teoria ellittica (il cosiddetto metodo dei rapporti incrementali) consente di stabilire, utilizzando il fatto che $f \in L^2(\Omega)$ e non solo $f \in H^{-1}(\Omega)$, che in effetti $u \in H^2(\Omega)$ e che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Possiamo allora rappresentare astrattamente il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, definendo

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Dunque il problema di Dirichlet si esprime semplicemente scrivendo che $u\in D(A)$ e $Au=f$.

Osserviamo che risulta per ogni $u\in D(A)$

$$\mathrm{Re}\,(Au,u)_{L^2(\Omega)} = \mathrm{Re}\int_\Omega \Delta u\cdot u\,dx =$$

$$= \cancel{\mathrm{Re}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot u\,d\sigma} - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le 0.$$

Inoltre, $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$, ed infine $\rho(A)\supset[0,\infty[$, poiché per ogni $\lambda\geq 0$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f\in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

ha soluzione unica, come si vede con lo stesso procedimento visto poc'anzi nel caso $\lambda=0$.

Dunque, per il teorema 13, A è gi. di un sgfc. di contrazioni.

<u>Osservazione</u> Nel caso del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove n è il versore normale esterno a Ω, vi è una teoria parallela che dà gli stessi risultati: l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega\} \\ Au = \Delta u \end{cases}$$

è gi. di un sgfc. $G \in \mathcal{G}(1,0)$; l'unica differenza è che $0 \notin \rho(A)$, visto che ogni costante risolve il problema sopra scritto.

Possiamo dunque considerare l'<u>equazione del calore</u>

$$\begin{cases} y_t(t,x) - \Delta y(t,x) = Bu(t,x) & \text{in }]0,T] \times \Omega, \\ y(t,x) = 0 & \text{in }]0,T] \times \partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

con un termine di controllo $Bu(t,x)$ distribuito in Ω, riscrivendola in modo astratto come

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in]0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ove

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \quad Ay = \Delta y(\cdot), \quad X = L^2(\Omega),$$

e A genera un sgfc.

Anche l'<u>equazione delle onde</u> in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso e limitato, con frontiera regolare

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) - \Delta y(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in]0,T] \times \Omega, \\ y(t,x) = 0, & (t,x) \in]0,T] \times \partial\Omega, \\ y(0,x) = y_0, \; y_t(0,x) = y_1, & x \in \Omega \end{cases}$$

si può ridurre ad una equazione astratta dello stesso tipo.
Poniamo $v = y_t$: allora l'equazione $y_{tt} - \Delta y = f$ diventa

$$\begin{cases} y_t = v \\ v_t = \Delta y + f \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

con le condizioni $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, e $y(t,x) = 0$ su $\partial\Omega$. Usando $A = \Delta$ su $D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, otteniamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Analizziamo le proprietà spettrali di $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ nello spazio $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, che appare la scelta più naturale; si ha allora $D(\mathcal{A}) = D(A) \times L^2(\Omega)$. L'equazione $\lambda \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} - \mathcal{A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ equivale a

$$\begin{cases} \lambda y - v = f \\ \lambda v - Ay = g \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} v = \lambda y - f \\ \lambda^2 y - Ay = g + \lambda f . \end{cases}$$

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario si ha $\lambda^2 \geq 0$ e quindi $\lambda^2 \in \rho(A)$. Ne segue

$$R(\lambda, a)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda^2, A)(g+\lambda f) \\ \lambda R(\lambda^2, A)(g+\lambda f) - f \end{pmatrix},$$

ovvero, semplificando,

$$R(\lambda, a)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Il problema è che questo operatore si stima piuttosto male:

$$\left\| R(\lambda, a)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X \leq c\left[1 + \frac{1}{|\lambda|}\right] \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X ,$$

e il teorema di Hille-Yosida non è applicabile: si noti anche che

$$\left(a\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right)_X = \left(\begin{pmatrix} v \\ Ay \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right) = \int_\Omega [vy + \Delta y \cdot v]\,dx$$

non ha segno determinato.

Consideriamo invece lo spazio $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, con il prodotto scalare

$$\left(\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)_X = \int_\Omega [\nabla y \cdot \nabla z + vw]\,dx .$$

Allora l'operatore $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}$, con $D(a) = D(A) \times H_0^1(\Omega)$, verifica

$$\left(a\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right)_X = \left(\begin{pmatrix} v \\ \Delta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right)_X = \int_\Omega [\nabla v \cdot \nabla y + (\Delta y) v]\,dx =$$

$$= \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla y)\,dx + \cancel{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n} \cdot v\,d\sigma} - \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla v)\,dx = 0.$$

Perciò, sia A che $-A$ sono massimali dissipativi, e quindi possiamo applicare il teorema di Hille-Yosida ottenendo che A genera un gruppo fortemente continuo e contrattivo. L'equazione delle onde, con controllo distribuito in Ω, si rappresenta dunque con l'equazione astratta

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, & t \in]0,T], \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

in $X = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Torniamo allora al problema originale:

Minimizzare

$$J(x,u) = \int_0^T \left[\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \right] dt + \langle P_0 y(T), y(T) \rangle_X$$

tra le $u \in L^2(0,T;U)$, con $y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu(s)\,ds$,

dove X, U sono spazi di Hilbert reali (e separabili), $B \in \mathcal{L}(U,X)$, $M, P_0 \in \mathcal{L}(X)$, autoaggiunti e non negativi, $N \in \mathcal{L}(U)$, autoaggiunto e coercivo (cioè $\langle Nu,u \rangle_U \geq \delta \|u\|_U^2$ per ogni $u \in U$), $x \in X$ e infine $A : D(A) \subseteq X \to X$ è il g.i. di un sgfc. $G(t)$.

Il funzionale quadratico J è strettamente convesso e coercivo: quindi è immediato verificare che per ogni $x \in X$ esiste un unico controllo ottimale u^*, a cui corrisponde un unico stato ottimale y^*.
Sia infatti $\{u_n\} \subseteq L^2(0,T;U)$ una successione minimizzante:

$$J(x,u_n) \longrightarrow \inf J(x,u) \geq 0.$$

Allora per la coercività di N la successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0,T;U)$. Dunque esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \quad \text{in } L^2(0,T;U).$$

Ma allora

$$y_{n_k}(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu_{n_k}(s)\,ds \rightharpoonup G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu^*(s)\,ds =: y^*(t),$$

in $L^2(0,T;X)$, e anche

$$y_{n_k}(T) = G(T)x + \int_0^T G(T-s)Bu_{n_k}(s)\,ds \rightharpoonup y^*(T) \quad \text{in } X.$$

Per la semicontinuità inferiore della norma, si ricava

$$J(x,u^*) \leq \liminf_{k\to\infty} J(x,u_{n_k}) = \inf J(x,u),$$

dunque (u^*,y^*) è la coppia ottimale.
Vogliamo ora caratterizzare (u^*,y^*). Il teorema di Pontrjagin ci dà molte informazioni: le condizioni necessarie ottenute per il problema di Bolza in $\mathbb{R}^n$ valgono anche in questo caso più generale. Ricordando il criterio di pag 57, si ottiene nella nostra situazione:

$$\begin{cases} 2Nu^* - \psi(Bu^*) = 0 \\ \psi' = -\psi A + 2My^* \\ \psi(T) + 2P_0 y^*(T), \end{cases}$$

ovvero, ponendo per comodità $p = -\dfrac{\psi}{2}$,

$$\begin{cases} Nu^*(t) = -B^* p(t), & t \in [0,T] \\ p'(t) = -A^* p(t) - My^*(t), & t \in [0,T] \\ p(T) = P_0 y^*(T) \end{cases}$$

Il moltiplicatore p si chiama co-stato e risolve un problema di Cauchy all'indietro.

Immergiamo il nostro problema in una famiglia più generale: per $s \in [0,T[$, consideriamo il funzionale

$$J_s(x,u) = \int_s^T \left[\langle My(t), y(t)\rangle_X + \langle Nu(t), u(t)\rangle_U\right] dt + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle_X$$

da minimizzare fra le $u \in L^2(s,T,U)$, con

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r)\,dr, \quad t \in [s,T].$$

La <u>funzione valore</u> di questo problema di controllo è

$$V(s,x) = \inf\left\{J_s(x,u) : u \in L^2(s,T,U),\ y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r)\,dr\right\}.$$

Indicheremo la coppia ottimale e il relativo co-stato con

$$\left(u^*_{s,x}(\cdot), y^*_{s,x}(\cdot)\right), \quad p^*_{s,x}(\cdot),$$

con cui

$$\begin{cases} (P^*_{s,x})'(t) = -A P^*_{s,x}(t) - M Y^*_{s,x}(t) \\ P^*_{s,x}(T) = P_0 Y^*_{s,x}(T), \end{cases}$$

$$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1} B^* P^*_{s,x}(t), \quad Y^*_{s,x}(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r) B u^*_{s,x}(r)\,dr,$$

e in particolare

$$V(s,x) = \int_s^T \left[\langle M Y^*_{s,x}(t), Y^*_{s,x}(t) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(t), u^*_{s,x}(t) \rangle_U \right] dt + \langle P_0 Y^*_{s,x}(T), Y^*_{s,x}(T) \rangle_X.$$

<u>Proposizione 14</u> Risulta

$$x \mapsto u^*_{s,x} \in \mathcal{L}(X, C([s,T],U)); \quad x \mapsto Y^*_{s,x},\ x \mapsto P^*_{s,x} \in \mathcal{L}(X, C([s,T],X)),$$

e in particolare esiste $L_T \geq 0$ tale che

$$\|Y^*_{s,x}(t)\|_X + \|u^*_{s,x}(t)\|_U + \|P^*_{s,x}(t)\|_X \leq L_T \|x\|_X \quad \forall x \in X, \forall s \in [0,T[, \ \forall t \in [s,T].$$

<u>dim</u> Per una coppia qualunque (u,y), con $y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r)\,dr$, vogliamo inserire y in $J_s(x,u)$. A questo scopo poniamo

$$[L_s u](t) = \int_s^t G(t-r)Bu(r)\,dr, \quad L_{sT} u = \int_s^T G(T-r)Bu(r)\,dr;$$

si ha

$$L_s : L^2(s,T,U) \to L^2(s,T,X), \quad L_{sT} : L^2(s,T,U) \to X,$$

questi operatori sono lineari e continui con

$$\|L_s\|_{\mathcal{L}(L^2(s,T,U), L^2(s,T,X))} \leq \frac{He^{\omega(T-s)}}{2\omega} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}$$

$$\|L_{sT}\|_{\mathcal{L}(L^2(s,T,U),X)} \leq \frac{He^{\omega(T-s)}}{2\omega} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}.$$

mentre $L_s^*: L^2(s,T;Y) \to L^2(s,T;U)$, $L_{sT}^*: X \to L^2(s,T;U)$, con

$$[L_s^* v](t) = \int_t^T B^* G(r-t)^* v(r)\,dr, \qquad [L_{sT}^* y](t) = B^* G(T-t)^* y .$$

Si ha allora

$$J_s(x,u) = \int_s^T \Big[\langle M[G(t-s)x + L_s u(t)], G(t-s)x + L_s u(t) \rangle_X + \langle N u(t), u(t) \rangle_U \Big] dt +$$

$$+ \langle P_0 [G(T-s)x + L_{sT} u], G(T-s)x + L_{sT} u \rangle_X =$$

$$= \int_s^T \langle G(t-s)^* M G(t-s)x, x \rangle_X \, dt + \langle G(T-s)^* P_0 G(T-s)x, x \rangle_X +$$

$$+ 2 \int_s^T \Big[\langle [L_s^* M G(\cdot - s)x](t) + [L_{sT}^* P_0 G(T-s)x](t), u(t) \rangle_U \, dt +$$

$$+ \int_s^T \Big[\langle [L_s^* M L_s u](t), u(t) \rangle_U + \langle N u(t), u(t) \rangle_U + \langle [L_{sT}^* P_0 L_{sT} u](t), u(t) \rangle_U \Big] dt .$$

Per $u = u^*_{s,x}$, il funzionale $J_s(x,u)$ è minimo, dunque $\frac{\partial}{\partial u} J_s(x,u)$ è nullo per $u = u^*_{s,x}$. Si ha quindi

$$2 \left(L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT} \right) u^*_{s,x} + 2 \left(L_s^* M G(\cdot - s)x + L_{sT}^* P_0 G(T-s)x \right) = 0 .$$

L'operatore $L := L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT}$ è autoaggiunto e coercivo da $L^2(s,T;U)$ in sè, con $(Lu,u)_{L^2(s,T;U)} \geq \delta \|u\|^2_{L^2(s,T;U)}$. Quindi è iniettivo e, siccome $\overline{R(L)} \oplus \ker L = L^2(s,T;U)$, ha immagine densa. Ma è immediato verificare che la coercività implica $R(L) = \overline{R(L)}$, e dunque L è bigettivo con $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(s,T;U))} \leq \frac{1}{\delta}$. Ne segue

$$u^*_{s,x}(\cdot) = -L^{-1} \left(L_s^* M G(\cdot - s)x + L_{sT}^* P_0 G(T-s)x \right) ,$$

cioè $x \mapsto u^*_{s,x}$ è lineare; essendo $y^*_{s,x}$ lineare rispetto a x e $u^*_{s,x}$, anche $x \mapsto y^*_{s,x}$ è lineare. Poi, essendo $p^*_{s,x}$ lineare rispetto a $y^*_{s,x}$, anche $x \mapsto p^*_{s,x}$ è lineare. (150)

Proviamo le stime puntuali: anzitutto

$$\|u^*_{s,x}\|_{L^2(s,T;U)} \le \frac{1}{\delta}\left[\|L_s^*\| \, \|M\| \, \|G(\cdot-s)x\|_{L^2(s,T;X)} + \|L_{sT}^*\| \, \|P_0\| \, \|G(T-s)x\|_X\right] \le$$

$$\le C_T \|x\|_X .$$

Dunque

$$\|y^*_{s,x}(t)\| \le He^{\omega T}\|x\|_X + \|L_s\| \, \|u^*_{s,x}\|_{L^2(s,T;U)} \le C_T\|x\|_X$$

e infine, essendo

$$p^*_{s,x}(t) = G(T-t)^* P_0 \, y^*_{s,x}(T) + \int_t^T G(T-r)^* M y^*_{s,x}(r)\,dr ,$$

troviamo

$$\|p^*_{s,x}(t)\|_X \le He^{\omega T}\|P_0\| \, \|y^*_{s,x}(T)\|_X + \int_t^T He^{\omega(T-r)}\|M\| \, \|y^*_{s,x}(r)\|_X\,dr$$

$$\le C_T\|x\|_X ,$$

da cui

$$\|u^*_{s,x}(t)\|_U = \|N^{-1}B^* p^*_{s,x}(t)\|_U \le C_T\|x\|_X .$$

Ciò prova le stime. Il fatto che $y^*_{s,x}$ e $p^*_{s,x}$ siano funzioni continue segue dalla continuità forte del semigruppo G e dalla loro espressione esplicita; la continuità di $u^*_{s,x}$ segue da quella di $p^*_{s,x}$. □

<u>Corollario 15</u> Per ogni $s \in [0,T[$ esiste $Q(s) \in \mathcal{L}(X)$, autoaggiunto e positivo, tale che

$$V(s,x) = (Q(s)x, x)_X \quad \forall x \in X .$$

dim. Dalla proposizione precedente segue che la funzione valore $V(s,x) = J_s(x, u^*_{s,x})$ è quadratica rispetto a $y^*_{s,x}$ e $u^*_{s,x}$, le quali sono lineari rispetto a x: ne segue che $V(s,x)$ è quadratica rispetto a x, nonché positiva. Ne segue la tesi. □

Adesso vogliamo ricavare le proprietà dell'operatore di Riccati $Q(s)$.

<u>Proposizione 16</u> (<u>Principio di ottimalità di Bellman</u>) Se $x \in X$ e $s \in [0,T]$, allora $u^*_{0,x}|_{[s,T]} \equiv u^*_{s, y^*_{0,x}(s)}$; in altre parole, $u^*_{0,x}$ è ottimale anche in $[s,T]$, rispetto al valore iniziale $y^*_{0,x}(s)$.

<u>dim</u>. Sia $\hat{u} \in L^2(s,T,U)$ e sia $\hat{y}$ lo stato corrispondente al valore $y^*_{0,x}(s)$:

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = A\hat{y}(t) + B\hat{u}(t), & t \in [s,T] \\ \hat{y}(s) = y^*_{0,x}(s). \end{cases}$$

Poniamo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*_{0,x}(t) & \text{se } t \in [0,s] \\ \hat{u}(t) & \text{se } t \in]s,T] \end{cases}, \qquad \bar{y}(t) = \begin{cases} y^*_{0,x}(t) & \text{se } t \in [0,s] \\ \hat{y}(t) & \text{se } t \in]s,T]; \end{cases}$$

è chiaro che risulta

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = A\bar{y}(t) + B\bar{u}(t), & t \in [0,T], \\ \bar{y}(0) = x. \end{cases}$$

Dunque, per minimalità di $u^*_{0,x}$,

$$J(x, u^*_{0,x}) \le J(x, \bar{u}).$$

Sottraendo ad entrambi i membri la quantità

$$\int_0^s \left[\langle M y^*_{0,x}(t), y^*_{0,x}(t) \rangle_X + \langle N u^*_{0,x}(t), u^*_{0,x}(t) \rangle_U \right] dt ,$$

si ottiene

$$J_s\left(y^*_{0,x}(s), u^*_{0,x}\big|_{[s,T]}\right) \le J_s\left(y^*_{0,x}(s), \hat{u}\right) ;$$

dunque $u^*_{0,x}\big|_{[s,T]}$ è ottimale in $[s,T]$ per il valore iniziale $y^*_{0,x}(s)$. □

Corollario 17 Per $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$ si ha

$$V(s,x) = \int_s^t \left[\langle M y^*_{s,x}(r), y^*_{s,x}(r) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(r), u^*_{s,x}(r) \rangle_U \right] dr + V(t, y^*_{s,x}(t)) .$$

dim Riscriviamo la relazione $V(s,x) = J_s(x, u^*_{s,x})$ spezzando l'integrale all'istante t: si ottiene

$$V(s,x) = \int_s^t \left[\langle M y^*_{s,x}(r), y^*_{s,x}(r) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(r), u^*_{s,x}(r) \rangle_U \right] dr +$$
$$+ J_t\left(y^*_{s,x}(t), u^*_{s,x}\big|_{[t,T]}\right) ;$$

per il principio di ottimalità di Bellman, l'ultimo termine coincide con $V(t, y^*_{s,x}(t))$. □

Corollario 18 (Equazione di Bellman) Per $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$ si ha

$$V(s,x) = \inf \Big\{ \int_s^t \left[\langle M y(r), y(r) \rangle_X + \langle N u(r), u(r) \rangle_U \right] dr + V(t, y(t)) :$$
$$u \in L^2(s,t,U),\ y'(r) = Ay(r) + Bu(r) \text{ in } [s,t];\ y(s) = x \Big\} .$$

dim Indicando con K il secondo membro, dal corollario 17 segue che

$$V(s,x) \geq K .$$

Viceversa, sia $\hat{u} \in L^2(s,t;U)$ e sia $\hat{y}$ tale che $\hat{y}'(r) = A\hat{y}(r) + B\hat{u}(r)$, $r \in [s,t]$, $\hat{y}(s) = x$. Poniamo poi, per ogni $u \in L^2(t,T;U)$,

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} \hat{u}(r) & \text{se } r \in [s,t] \\ u(r) & \text{se } r \in]t,T], \end{cases} \qquad \bar{y}(r) = \begin{cases} \hat{y}(r) & \text{se } r \in [s,t] \\ y(r) & \text{se } r \in]t,T], \end{cases}$$

ove

$$\begin{cases} y'(r) = Ay(r) + Bu(r), & r \in [t,T] \\ y(t) = \hat{y}(t) . \end{cases}$$

Allora

$$V(s,x) \leq \int_s^T [\langle M\bar{y}(r), \bar{y}(r)\rangle_X + \langle N\bar{u}(r), \bar{u}(r)\rangle_U] dr + \langle P_0 \bar{y}(T), \bar{y}(T)\rangle_X =$$

$$= \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r)\rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r)\rangle_U] dr +$$

$$+ \int_t^T [\langle My(r), y(r)\rangle_X + \langle Nu(r), u(r)\rangle_U] dr + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle_X =$$

$$= \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r)\rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r)\rangle_U] dr + J_t(\hat{y}(t), u) .$$

Passando all'estremo inferiore sulle $u \in L^2(t,T;U)$ ricaviamo

$$V(s,x) \leq \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r)\rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r)\rangle_U] dr + V(t, \hat{y}(t)) ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $(\hat{u}, \hat{y})$,

$$V(s,x) \leq K . \quad \square$$

Corollario 19 Per $0 \leq s \leq t < T$ e $x \in X$ si ha

$$V(s,x) = \int_s^t [\langle M y^*_{0,x}(r), y^*_{0,x}(r)\rangle_X + \langle N u^*_{0,x}(r), u^*_{0,x}(r)\rangle_U] dr + V(t, y^*_{0,x}(t)) \quad .$$

dim. Ricordando che, per il principio di ottimalità di Bellman,

$$u^*_{0,x}(r) = u^*_{s,y^*_{0,x}(s)}(r), \quad y^*_{0,x}(r) = y^*_{s,y^*_{0,x}(s)}(r) \quad \forall r \in [s,T],$$

la tesi si ottiene sostituendo, nel Corollario 17, x con $y^*_{0,x}(s)$. □

Proposizione 20 Se $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$, si ha

$$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1}B^* Q(t) y^*_{s,x}(t).$$

dim. La coppia ottimale (u,y) del problema

$$\begin{cases} \min \left\{ \int_s^t [\langle My(r), y(r)\rangle_X + \langle Nu(r), u(r)\rangle_U] dt + \langle Q(t)y(t), y(t)\rangle_X \right\} \\ \begin{cases} y' = Ay + Bu \text{ in } [s,t] \\ y(s) = x \end{cases} \end{cases}$$

soddisfa, per il teorema di Pontrjagin,

$$\begin{cases} \begin{cases} p'(r) = -A^* p(r) - My(r), & r \in [s,t] \\ p(t) = Q(t) y(t) \end{cases} \\ u(r) = -N^{-1}B^* p(r), \quad r \in [s,t]. \end{cases}$$

Ma tale coppia è proprio $(u^*_{s,x}, y^*_{s,x})$: infatti, per i corollari 17 e 18

$$\int_s^t [\langle My^*_{s,x}(r), y^*_{s,x}(r)\rangle_X + \langle Nu^*_{s,x}(r), u^*_{s,x}(r)\rangle_U] dr + V(t, y^*_{s,x}(t)) =$$

$$= V(s,x) \le$$

$$\le \int_s^t [\langle My(r), y(r)\rangle_X + \langle Nu(r), u(r)\rangle_U] dr + V(t, y(t))$$

per ogni $u \in L^2(s,t;U)$ con $y' = Ay + Bu$ in $[s,t]$, $y(s) = x$. Ne segue

$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1}B^* p^*_{s,x}(t) = -N^{-1}B^* Q(t) y^*_{s,x}(t)$. □

Corollario 21 (Closed-loop equation) Se $0\le s<T$ e $x\in X$, si ha

$$\begin{cases} (Y^*_{s,x})'(t) = A\,Y^*_{s,x}(t) - BN^{-1}B^*Q(t)Y^*_{s,x}(t), & t\in[s,T], \\ Y^*_{s,x}(s) = x. \end{cases}$$

dim. Evidente, visto che $u^*_{s,x} = -N^{-1}B^*Q(\cdot)Y^*_{s,x}$. $\square$

Il significato della closed-loop equation, se risolta, e della formula feedback per $u^*_{s,x}$ è che ad ogni istante $t\in[s,T]$, per ogni $x\in X$, i valori del controllo e dello stato ottimale sono determinati solo da x e t, ossia non vi è memoria del passato né predizione del futuro.
Però, l'equazione coinvolge $Q(t)$, cioè $V(t,x)$, che nella sua definizione coinvolge i valori futuri del controllo.
Quindi è importante mostrare che $V(t,x)$ è soluzione di una equazione differenziale ordinaria, che si può cercare di risolvere direttamente. Tale equazione è l'<u>equazione di Riccati</u>.