Il caso di uno spazio di Hilbert

Quando X è uno spazio di Hilbert, ci sono alcuni risultati specifici che sono più forti.

Teorema 12 (di Datko) Sia X uno spazio di Hilbert complesso, e sia A il g.i. di un sgfc G. Sono fatti equivalenti:

(i) $G \in \mathcal{G}(H, \omega)$ con $H \geq 1$, $\omega < 0$,

(ii) $\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 \, dt < \infty \quad \forall x \in X$,

(iii) $\exists\, P \in \mathcal{L}(X)$, $P = P^* \geq 0$, che risolve l'equazione di Lyapunov

$$(Px, Ay)_X + (Ax, Py)_X = -(x,y)_X \quad \forall x, y \in D(A).$$

dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è evidente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Proviamo anzitutto che esiste $K > 0$ per cui

$$\left[\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 \, dt\right]^{1/2} \leq K \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Definiamo a questo scopo, per $T > 0$, l'operatore $\Gamma_T : X \to L^2(0, \infty, X)$, dato da

$$(\Gamma_T x)(t) = G(t)x \cdot I_{[0,T]}(t), \quad t \geq 0.$$

Si ha $\Gamma_T \in \mathcal{L}(X, L^2(0,T; X))$: infatti, posto $K_x = \left[\int_0^\infty \|G(t)x\|^2 dt\right]^{1/2} < \infty$, si ha

$$\|\Gamma_T x\|_{L^2(0,\infty,X)} = \left[\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 dt\right]^{1/2} \leq K_x \quad \forall T > 0,$$

ovvero

$$\sup_{T>0} \|\Gamma_T x\|_{L^2(0,\infty,X)} \leq K_x \quad \forall x \in X.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus, si deduce

$$\sup_{T>0} \|\Gamma_T\|_{\mathcal{L}(X, L^2(0,\infty,X))} \leq K < \infty,$$

ossia

$$\sup_{T>0} \frac{1}{\|x\|_X} \left[\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 \, dt \right]^{1/2} \leq K,$$

il che prova la nostra affermazione.

Ciò premesso, siano

$$\phi(x,y) = \int_0^\infty (G(t)x, G(t)y)_X \, dt, \quad x,y \in X; \quad \phi_\lambda(x,y) = \int_0^\lambda (G(t)x, G(t)y)_X \, dt, \quad x,y \in X, \lambda > 0:$$

ϕ e ϕ_λ sono forme sesquilineari e continue su $X \times X$. Per ogni fissato $y \in X$, l'applicazione $x \to \phi(x,y)$ è lineare e continua da X in $\mathbb{C}$, con

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|_X} \leq K \|y\|_X \ ;$$

quindi, per il teorema di Riesz, esiste un unico elemento $z_y \in X$ tale che

$$\phi(x,y) = (x, z_y) \quad \forall x \in X, \quad \|z_y\|_X = \|\phi(\cdot,y)\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{C})}.$$

D'altra parte, essendo ϕ antilineare rispetto a y, la dipendenza di z_y da y risulta lineare; perciò esiste $P: X \to X$ lineare tale che $z_y = Py$. Inoltre P è continuo poiché $\|Py\|_X \leq K\|y\|_X$, è non negativo poiché $\phi(y,y) \geq 0$, ed è autoaggiunto perché ϕ è hermitiana.

Per definizione si ha $(Px,y)_X = (x,Py)_X = \phi(x,y)$ per ogni $x,y \in X$.
In modo analogo si trova $P_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, $P_\lambda = P_\lambda^* \geq 0$, tale che

$$(P_\lambda x, y)_X = \phi_\lambda(x,y).$$

Dalla definizione segue che per ogni $x,y \in H$

$$\phi_\lambda(x,y) \longrightarrow \phi(x,y) \quad \text{per } \lambda \to \infty,$$

e dunque

$$P_\lambda x \longrightarrow Px \quad \text{in } X \quad \forall x \in X.$$

Se ora $x,y \in D(A)$, si trova

$$(P_\lambda Ax, y)_X + (P_\lambda x, Ay)_X = \int_0^\lambda \left[(G(t)Ax, G(t)y)_X + (G(t)x, G(t)Ay)_X \right] dt =$$

$$= \int_0^\lambda \frac{d}{dt} (G(t)x, G(t)y)_X \, dt = (G(\lambda)x, G(\lambda)y)_X - (x,y)_X.$$

Dunque

$$(G(\lambda)x, G(\lambda)y)_X = (Ax, P_\lambda y)_X + (P_\lambda x, Ay)_X + (x,y)_X \quad \forall x,y \in D(A)$$

e per $\lambda \to \infty$

$$\exists \lim_{\lambda \to \infty} (G(\lambda)x, G(\lambda)y)_X = (Ax, Py)_X + (Px, Ay)_X + (x,y) \quad \forall x,y \in D(A).$$

Ma se questo limite esiste, osservato che $(G(\cdot)x, G(\cdot)y)_X \in L^1(0,\infty)$, esso deve essere nullo. Ne segue la tesi.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Sia $x \in D(A)$. Utilizziamo la funzione quadratica $(Px,x)_X$ come funzione di Lyapunov per l'equazione differenziale $y' = Ay$.

Si ha

$$\frac{d}{dt}(PG(t)x, G(t)x)_X = (PAG(t)x, G(t)x)_X + (PG(t)x, G(t)x)_X =$$

$$= (AG(t)x, PG(t)x)_X + (PG(t)x, AG(t)x)_X = -\|G(t)x\|^2_X,$$

e integrando su $[0,T]$,

$$(PG(T)x, G(T)x)_X - (Px,x)_X = -\int_0^T \|G(t)x\|^2_X\, dt,$$

da cui

$$\int_0^T \|G(t)x\|^2_X\, dt \leq (Px,x)_X \quad \forall x \in D(A).$$

Per densità ricaviamo

$$\int_0^T \|G(t)x\|^2_X\, dt \leq (Px,x)_X \quad \forall x \in X,$$

e per $T \to \infty$ si ottiene

$$\int_0^\infty \|G(t)x\|^2_X\, dt \leq (Px,x)_X \quad \forall x \in X,$$

che in particolare dà (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sappiamo che esistono $H_1 \geq 1$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_1 e^{\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Se $\omega_1 < 0$, abbiamo finito; supponiamo dunque $\omega_1 \geq 0$.

Nel caso in cui $\omega_1 = 0$, risulta $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_1$: allora, per ogni $z \in H$ si ha

$$t\|G(t)z\|^2_X = \int_0^t \|G(t)z\|^2_X\, ds \leq \int_0^t \|G(s)\|^2_{\mathcal{L}(X)} \|G(t-s)z\|^2_X\, ds \leq H_1^2 \int_0^t \|G(s)z\|^2_X\, ds,$$

e dunque
$$\|G(t)z\|_X^2 \le \frac{H_1^2 K^2}{t}\|z\|_X^2 \quad \forall z\in X,\ \forall t>0$$
(dove abbiamo usato la relazione $\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2\,dt \le K^2\|x\|_X^2$ già provata). Ne segue
$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{H_1 K}{\sqrt{t}} < 1 \quad \text{per } t \text{ grande},$$
e pertanto il tipo di G è
$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} < 0 .$$
Ne segue (i) quando $\omega_1 = 0$.

Se invece $\omega_1 > 0$, si procede in modo simile: se $z\in H$,
$$\frac{1-e^{-2\omega_1 t}}{2\omega_1}\|G(t)z\|_X^2 = \int_0^t e^{-2\omega_1 s}\|G(t)z\|_X^2\,ds \le$$
$$\le \int_0^t e^{-2\omega_1 s}\|G(s)\|_{\mathcal{L}(X)}^2\,\|G(t-s)z\|_X^2\,ds \le$$
$$\le H_1^2\int_0^t \|G(r)z\|_X^2\,dr \le H_1^2K^2\|z\|_X^2 ,$$
da cui
$$\|G(t)z\|_X^2 \le \frac{2\omega_1 K^2 H_1^2}{1-e^{-2\omega_1 t}}\|z\|_X^2 \quad \forall t>0,$$
e dunque
$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \le \frac{2\omega_1 K^2 H_1^2}{1-e^{-2\omega_1 t}} \quad \forall t>0.$$
Possiamo allora scrivere

$$\|G(t)\|^2_{\mathcal{L}(X)} \le \begin{cases} H_1^2 e^{2\omega_1} & \text{se } t\in[0,1] \\ \dfrac{2\omega_1 H_1^2 K^2}{1-e^{-2\omega_1}} & \text{se } t>1, \end{cases}$$

e dunque $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ è uniformemente limitata. Ci siamo così ricondotti al caso precedente in cui $\omega_1=0$. Ne segue la tesi. □

Anche in relazione al teorema di Hille-Yosida, nel caso Hilbertiano c'è un risultato specifico.

<u>Teorema</u> B Sia X uno spazio di Hilbert complesso, e sia $A: D(A)\subseteq X\to X$ un operatore lineare chiuso. Sono fatti equivalenti:

(a) $\overline{D(A)}=X$, $\rho(A)\supseteq\,]0,\infty[$ e $\mathrm{Re}(Ax,x)_X\le 0 \quad \forall x\in D(A)$,

(b) A è gi. di un sgfc G <u>contrattivo</u> (cioè $G\in\mathcal{G}(1,0)$).

<u>dim</u> (b)$\Rightarrow$(a) Sia $x\in D(A)$: allora

$$\mathrm{Re}(Ax,x)_X = \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\,\mathrm{Re}\left[(G(h)x,x)_X - \|x\|^2_X\right]\le 0 .$$

(a)$\Rightarrow$(b) Sia $\lambda>0$, sia $R(\lambda,A)x=y\in X$. Allora

$$\lambda y - Ay = x$$

e moltiplicando per y,

$$\lambda\|y\|^2_X - (Ay,y)_X = (x,y)_X ,$$

da cui

$$(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\|y\|^2_X \le \mathrm{Re}(Ay,y)_X + \|x\|_X\|y\|_X ,$$

che implica
$$\|y\|_X = \|R(\lambda,A)x\|_X \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}\|x\|_X .$$
Dal teorema di Hille-Yosida segue che A è gi. di un sgfc $G \in \mathcal{G}(1,0)$. □

<u>Osservazione</u> Si dice che A è <u>dissipativo</u> nello spazio di Hilbert X, quando $\mathrm{Re}(Ax,x)_X \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$, e che A è <u>massimale dissipativo</u> quando in più $\overline{D(A)} = X$. Pertanto gli operatori massimali dissipativi generano semigruppi contrattivi.

<u>Esempi</u> Consideriamo, in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana, il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace:
$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$
Un primo risultato di esistenza e unicità si ha in forma debole: si considera la forma
$$(u,v) \mapsto \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)_n \, dx \quad , \quad (u,v) \in H^1_0(\Omega),$$
si osserva che, in virtù della disuguaglianza di Poincaré
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$
tale forma è un prodotto scalare su $H^1_0(\Omega)$ equivalente a quello naturale (che è $(u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$); quindi, applicando il teorema

di Riesz, per ogni $T \in H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]'$ (duale di $H_0^1(\Omega)$) esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)_n \, dx = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La nostra f sta in $L^2(\Omega)$, quindi scelto

$$\langle T, \varphi \rangle = -\int_\Omega f \varphi \, dx$$

si ottiene che esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)_n \, dx = -\int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

In particolare, scelta $\varphi = u$, si ottiene

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

e dunque

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inoltre, una tecnica tipica della teoria ellittica (il cosiddetto metodo dei rapporti incrementali) consente di stabilire, utilizzando il fatto che $f \in L^2(\Omega)$ e non solo $f \in H^{-1}(\Omega)$, che in effetti $u \in H^2(\Omega)$ e che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Possiamo allora rappresentare astrattamente il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, definendo

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Dunque il problema di Dirichlet si esprime semplicemente scrivendo che $u \in D(A)$ e $Au = f$.

Osserviamo che risulta per ogni $u \in D(A)$

$$Re\,(Au, u)_{L^2(\Omega)} = Re \int_\Omega \Delta u \cdot u \, dx =$$

$$= \cancel{Re \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u \, d\sigma} - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0.$$

Inoltre, $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$, ed infine $\rho(A) \supset [0, \infty[$, poiché per ogni $\lambda \geq 0$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ha soluzione unica, come si vede con lo stesso procedimento visto poc'anzi nel caso $\lambda = 0$.

Dunque, per il teorema 13, A è gi. di un sgfc. di contrattiv.

<u>Osservazione</u> Nel caso del problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove n è il versore normale esterno a Ω, vi è una teoria parallela che dà gli stessi risultati: l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega\} \\ Au = \Delta u \end{cases}$$

è gi. di un sgfc. $G \in \mathcal{G}(1,0)$; l'unica differenza è che $0 \notin \rho(A)$, visto che ogni costante risolve il problema sopra scritto.