Veniamo ora al risultato più importante della teoria dei semigruppi.

Teorema 9 (di Hille-Yosida) Siano $H \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, sia $A: D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso. Sono fatti equivalenti:

(a) $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > \omega\}$ e

$$\|R^k(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{H}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \mathrm{Re}\lambda > \omega;$$

(b) A è il g.i. di un sgfc. $G \in \mathcal{G}(H, \omega)$.

dim ($\Leftarrow$) Utilizzando la Proposizione 8, si ha

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x\, dt \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Possiamo derivare $k-1$ volte questa identità, grazie al teorema della convergenza dominata, ottenendo

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\, R^k(\lambda, A)x = (-1)^{k-1} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda t} G(t)x\, d\lambda,$$

da cui

$$\|R^k(\lambda, A)x\|_X \leq \frac{H}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-(\mathrm{Re}\lambda - \omega)t} \|x\|_X\, d\lambda =$$

(con $k-1$ integrazioni per parti)

$$\leq \frac{H}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^k} \|x\|_X.$$

($\Longrightarrow$) Poniamo per $n \in \mathbb{N}^+$, $n > \omega$,

$$J_n = nR(n, A), \qquad A_n = AJ_n = nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - nI;$$

gli operatori J_n e A_n sono lineari e limitati (gli A_n si chiamano approssimanti di Yosida). A giustificazione del loro nome, si ha per $n\to\infty$

(i) $J_n x \to x \quad \forall x \in X$,

(ii) $A_n x \to Ax \quad \forall x \in D(A)$,

e di conseguenza

(iii) $D(A^k)$ è denso in X per ogni $k \in \mathbb{N}^+$.

Proviamo (i): se $x \in D(A)$

$$J_n x - x = nR(n,A)x - x = AR(n,A)x = R(n,A)Ax \to 0$$

dato che $\|R(n,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{H}{n-\omega}$. Poiché $\overline{D(A)} = X$, e $\|J_n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{nH}{n-\omega} \le C$ per ogni $n > \omega$, si ricava subito $J_n x \to x$ per ogni $x \in X$.

Proviamo (ii): se $x \in D(A)$, per (i) otteniamo

$$A_n x - Ax = [nR(n,A) - I]Ax \to 0.$$

Proviamo (iii): per ogni $x \in X$ si ha $J_n^k x \in D(A^k)$; quindi basta mostrare che $J_n^k x \to x$ per $n\to\infty$. Per $k=1$ la tesi viene da (i); se la tesi vale per $k-1$, si ha, grazie alla limitatezza uniforme degli J_n^k rispetto a n, ed all'ipotesi induttiva,

$$J_n^k x - x = J_n^{k-1}(J_n x - x) + J_n^{k-1} x - x \to 0.$$

Consideriamo il sg e^{tA_n}; essendo $A_n = n^2 R(n,A) - nI$, si ha

$$e^{tA_n} = e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} R^k(n,A),$$

da cui

$$\|e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} \|R^k(n,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq$$

$$\leq He^{-nt} e^{\frac{n^2 t}{n-\omega}} = He^{\frac{n\omega t}{n-\omega}} \quad \forall t \geq 0, \forall n > \omega.$$

Inoltre

$$e^{tA_n}x \longrightarrow e^{tA}x \quad \forall x \in X, \text{ uniformemente in ogni } [0,T].$$

Infatti, possiamo scrivere per $n, m \geq \nu$, visto che A_n e A_m commutano,

$$e^{tA_n}x - e^{tA_m}x = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{(t-s)A_m} e^{sA_n} x \, ds =$$

$$= \int_0^t \left[-A_m e^{(t-s)A_m} e^{sA_n} + e^{(t-s)A_m} e^{sA_n} A_n\right] x \, ds =$$

$$= \int_0^t e^{(t-s)A_m} e^{sA_n} \left[A_n - A_m\right] x \, ds,$$

da cui, fissato $\varepsilon > 0$,

$$\|e^{tA_n}x - e^{tA_m}x\|_X \leq tH^2 e^{(\omega+\varepsilon)t} \|A_n x - A_m x\|_X \quad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon, \forall t \in [0,T];$$

poiché $x \in D(A)$, $A_n x \to Ax$ e dunque

$$\|e^{tA_n}x - e^{tA_m}x\|_X \leq C_T \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon, \forall t \in [0,T]$$

Perciò esiste $G(t)x := \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x$; grazie all'uniforme convergenza, G è un sgfc, con

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lim_{n\to\infty} \|e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq He^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

Proviamo che A è il gi. di G. Infatti, detto $B: D(B) \subseteq X \to X$ il gi. di G, se $x \in D(A)$ si ha

$$e^{tA_n}x \to G(t)x \quad \text{uniformemente in } [0,T],$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA_n}x = A_n e^{tA_n}x = e^{tA_n}A_n x \to G(t)Ax \quad \text{uniformemente in } [0,T]$$

Dunque

$$\exists \frac{d}{dt} G(t)x = G(t)Ax \quad \forall x \in D(A), \forall t \geq 0,$$

e per $t \to 0^+$,

$$\frac{G(t)x - x}{t} \to Ax,$$

ossia $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Viceversa, sia $x \in D(B)$. Per $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ sia $z = \lambda x - Bx$. Per quanto provato, essendo $R(\lambda,A)z \in D(A)$, si ha $R(\lambda,A)z \in D(B)$ e

$$(\lambda I - B)\, R(\lambda,A) z = (\lambda I - A) R(\lambda,A) z = z.$$

Ne segue, essendo $R(\lambda,B)(\lambda I - B) = I_{D(B)}$:

$$x = R(\lambda,B) z = R(\lambda,B)(\lambda I - B) R(\lambda,A) z = R(\lambda,A) z \in D(A),$$

$$Ax = A R(\lambda,A) z = -z + \lambda R(\lambda,A) z = -\lambda x + Bx + \lambda x = Bx.$$

Perciò $A = B$ e A è il g.i. di G. □

Osservazioni (1) Nel provare (a) $\Rightarrow$ (b) abbiamo usato l'ipotesi solo per $\lambda = n > \omega$. Dunque è sufficiente supporre in (a) che $\rho(A) \supseteq]\omega, +\infty[$ e che la stima per $R^k(\lambda,A)$ valga solo per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > \omega$.

(2) Se $M = 1$, per verificare (a) è sufficiente la stima per $k = 1$: le altre seguono di conseguenza.

Risoluzione del problema di Cauchy

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'(t) = A y(t) + f(t), & t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

quando A è g.i. di un sgfc G, $y_0 \in X$ e $f \in L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$.
Diamo anzitutto la definizione di due tipi di soluzione.

Definizione Siano $y_0 \in D(A)$, $f \in L^p(0,T;X)$. Diciamo che $y:[0,T] \to X$ è soluzione stretta di (P) se

$$y \in W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$$

e vale l'equazione in $[0,T]$ e la condizione $y(0)=y_0$.

Siano $y_0 \in X$ e $f \in L^p(0,T;X)$. Diciamo che $y:[0,T] \to X$ è soluzione forte di (P) se

$$y \in L^p(0,T,X)$$

ed esiste una successione $\{y_k\} \subseteq W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$ tale che

$$y_k \to y \text{ in } L^p(0,T;X), \quad y_k' - Ay_k \to f \text{ in } L^p(0,T;X), \quad y_k(0) \to y_0 \text{ in } X$$

per $k \to \infty$.

Diamo due teoremi di esistenza e unicità.

Teorema 10 Per ogni $y_0 \in X$, $f \in L^p(0,T;X)$ esiste un'unica soluzione forte y di (P), data da

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,T];$$

inoltre, $y \in C([0,T],X)$.

dim. Per $k > \omega$ siano

$$y_{0k} = J_k y_0, \qquad f_k(t) = J_k f(t).$$

Allora $y_{0k} \in D(A)$, $f_k \in L^p(0,T;D(A))$ e, posto

$$y_k(t) = G(t)y_{0k} + \int_0^t G(t-s)f_k(s)\,ds,$$

possiamo derivare questa funzione rispetto a t, ottenendo

$$\begin{cases} y_k'(t) - A y_k(t) = f_k(t) \to f(t) & \text{in } L^p(0,T;X) \\ y_k(0) = y_{0k} & \text{in } X; \end{cases}$$

inoltre

$$y_k(t) \to G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s) f(s)\,ds = y(t) \quad \text{in } C([0,T],X);$$

infatti

$$\|y_k(t) - y(t)\|_X = \left\| G(t)(y_{0k} - y_0) + \int_0^t G(t-s)[f_k(s) - f(s)]\,ds \right\|_X \leq$$

$$\leq He^{\omega t}\|y_{0k} - y_0\|_X + H\left[\int_0^t e^{\omega p'(t-s)}ds\right]^{1/p'}\left[\int_0^t \|f_k(s) - f(s)\|_X^p ds\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq H[e^{\omega T} \vee 1]\,\|y_{0k} - y_0\|_X + H\left[T \vee \frac{e^{\omega p' T} - 1}{\omega p'}\right]\|f_k - f\|_{L^p(0,T;X)} \to 0$$

uniformemente in $[0,T]$.

Dunque, essendo $y_k \in W^{1,p}(0,T;X) \subseteq C([0,T],X)$, si ha $y \in C([0,T],X)$.

Proviamo che y è l'unica soluzione: se z è un'altra soluzione, e se $z_k \to z$ in $L^p(0,T;X)$, $z_k' - Az_k \to f$ in $L^p(0,T;X)$ e $z_k(0) \to y_0$ in X, allora posto $f_k = z_k' - Az_k$ si ha per $s \in [0,t]$

$$\frac{d}{ds}[G(t-s)z_k(s)] = -A\,G(t-s)z_k(s) + G(t-s)[Az_k(s) + f_k(s)] = G(t-s)f_k(s).$$

Integrando in $[0,t]$,

$$z_k(t) - G(t)z_k(0) = \int_0^t G(t-s)f_k(s)\,ds,$$

e per $k \to \infty$

$$z(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds = y(t). \quad \square$$

Teorema 11. (i) Siano $y_0 \in D(A)$, $f \in L^p(0,T; D(A))$. Allora vi è un'unica soluzione stretta y di (P), data da

$$y(t) = G(t) y_0 + \int_0^t G(t-s) f(s)\, ds \, , \quad t \in [0,T] \, ;$$

inoltre $y \in C([0,T], D(A))$.

(ii) Siano $y_0 \in D(A)$, $f \in W^{1,p}(0,T, X)$. Allora vi è un'unica soluzione stretta di (P), data ancora dalla formula precedente; inoltre $y \in C^1[0,T], X) \cap C([0,T], D(A))$.

dim. Proviamo (i). Dato che $Af \in L^p(0,T; X)$ e $Ay_0 \in X$, per il Teorema 10 esiste un'unica soluzione forte v di

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Af(t) \, , & t \in [0,T] \\ v(0) = Ay_0 \, , \end{cases}$$

data da

$$v(t) = G(t) A y_0 + \int_0^t G(t-s) A f(s)\, ds = A G(t) y_0 + \int_0^t A G(t-s) f(s)\, ds \, .$$

Lemma 12. Se $h : [0,T] \to D(A)$, si ha per ogni $t \in [0,T]$

$$\int_0^t h(s)\, ds \in D(A) \quad e \quad A \int_0^t h(s)\, ds = \int_0^t A h(s)\, ds \, .$$

dim Si ha per $n \to \infty$, grazie alla convergenza dominata

$$J_n \int_0^t h(s)\, ds = n R(n, A) \int_0^t h(s)\, ds \longrightarrow \int_0^t h(s)\, ds \, ,$$

$$A J_n \int_0^t h(s)\, ds = A_n \int_0^t h(s)\, ds = \int_0^t A_n h(s)\, ds \longrightarrow \int_0^t A h(s)\, ds \, ,$$

da cui, essendo A chiuso, la tesi. □

Per il Lemma 12 possiamo scrivere

$$v(t) = A\left[G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds\right] = Ay(t),$$

dunque $y \in C([0,T], D(A))$.

Siano adesso y_n e v_n le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t), & t\in[0,T], \\ y_n(0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_n'(t) = A_n v_n(t) + A_n f(t), & t\in[0,T] \\ v_n(0) = A_n y_0 \end{cases}$$

in cui l'operatore A_n è limitato; dunque $y_n, v_n \in C^1([0,T], X)$ e si ha

$$y_n(t) = e^{tA_n}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s)\,ds, \qquad v_n(t) = e^{tA_n}A_n y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} A_n f(s)\,ds = A_n y_n(t).$$

Dato che $e^{tA_n}x \to G(t)x$ uniformemente in $[0,T]$ per ogni $x\in X$, si ricava

$$y_n(t) \to y(t) \text{ uniformemente in } [0,T] \text{ e } y(0) = y_0,$$
$$A_n y_n(t) = v_n(t) \to v(t) \text{ uniformemente in } [0,T],$$

dunque $y(t) \in D(A)$ e $Ay(t) = v(t)$ per ogni $t\in[0,T]$; inoltre

$$y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t) \to Ay(t) + f(t) \text{ uniformemente in } [0,T],$$

dunque

$$\exists\, y'(t) = Ay(t) + f(t) \quad \forall t\in[0,T].$$

Perciò $y \in C^1([0,T], X) \cap C([0,T], D(A))$ è soluzione stretta di (P).

Proviamo (ii). Dato che $f' \in L^p(0,T;X)$ e $Ay_0 + f(0) \in X$, esiste un'unica soluzione forte z di

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + f'(t), & t\in[0,T], \\ z(0) = Ay_0 + f(0) \end{cases}$$

data da

$$z(t) = G(t)[Ay_0 + f(0)] + \int_0^t G(t-s) f'(s)\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Siano y_n e z_n le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t) \\ y_n(0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_n'(t) = A_n z_n(t) + f'(t) \\ z_n(0) = A_n y_0 + f(0). \end{cases}$$

che appartengono rispettivamente a $C^1([0,T],X)$ e a $W^{1,p}(0,T;X)$ e sono date da

$$y_n(t) = e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s)\,ds,$$

$$z_n(t) = e^{tA_n}[A_n y_0 + f(0)] + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f'(s)\,ds =$$

$$= e^{tA_n}[A_n y_0 + f(0)] + \left[e^{(t-s)A_n} f(s)\right]_0^t + A_n\int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s)\,ds =$$

$$= A_n\left[e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s)\,ds\right] + f(t) = A_n y_n(t) + f(t) = y_n'(t).$$

Si ha allora:

$$y_n(t) \to y(t) \text{ uniformemente in } [0,T] \text{ e } y(0) = y_0,$$

$$y_n'(t) = z_n(t) \to z(t) \text{ uniformemente in } [0,T],$$

dunque $y\in C^1([0,T],X)$ e $y'(t) = z(t)$ per ogni $t\in[0,T]$; inoltre

$$A_n y_n(t) = y_n'(t) - f(t) \to z(t) - f(t) \text{ uniformemente in } [0,T],$$

quindi $y(t)\in C([0,T],D(A))$, e si ha $Ay(t) = z(t) - f(t) = y'(t) - f(t)$.

In particolare, y è soluzione stretta di (P). □