Dimostrazione del teorema 28

Per l'osservazione (5), tutti i controlli e gli stati sono definiti in $[T_0,T_1]$. Nei lemmi che seguono sono sottintese le ipotesi del teorema 28.

Lemma 34 Sia $\nu>0$.

(i) Per ogni $\eta>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$A\subseteq[T_0,T_1],\ m(A)<\delta,\ u\in L^1(T_0,T_1;U),\ \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt\le\nu \Rightarrow \int_A |u(t)|\,dt\le\eta;$$

(ii) esiste $M\geq 0$ tale che

$$u\in L^1(T_0,T_1;U),\ \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt\le\nu \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1}|u(t)|\,dt\le M.$$

dim (i) Sia b la costante tale che $g(u)\geq -b$ $\forall u\in U$ (osservazione (4)).

Per (v), per ogni $B>0$ esiste $\theta_B>0$ tale che

$$\lim_{B\to\infty}\theta_B=0,\qquad |u|\le\theta_B\, g(u)\quad \forall u\in U \text{ con } |u|>B.$$

Scegliamo B grande, in modo che $\theta_B\nu+\theta_B b(T_1-T_0)\le \eta/2$, e scegliamo δ, piccolo in modo che $B\delta\le\eta/2$. Posto

$$A_1=\{t\in A: |u(t)|\le B\},$$

otteniamo, se $A\subseteq[T_0,T_1]$ ha misura minore di δ:

$$\int_A|u(t)|\,dt=\int_{A_1}|u(t)|\,dt+\int_{A\setminus A_1}|u(t)|\,dt\le B\,m(A_1)+\theta_B\int_{A\setminus A_1}g(u(t))\,dt\le$$

$$\le B\delta+\theta_B\Big[\int_{T_0}^{T_1}g(u(t))\,dt-\int_{[T_0,T_1]\setminus(A\setminus A_1)}g(u(t))\,dt\Big]\le B\delta+\theta_B\int_{T_0}^{T_1}g(u(t))\,dt+b\theta_B(T_1-T_0)\le$$

$$\leq B\delta + \Theta_B \gamma + \Theta_B b(T_1 - T_0) \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

(ii) Si ha, posto $A_1 = \{t \in [T_0, T_1] : |u(t)| \leq B\}$,

$$\int_{T_0}^{T_1} |u(t)|\,dt = \int_{A_1} |u(t)|\,dt + \int_{[T_0,T_1]\setminus A_1} |u(t)|\,dt \leq$$

$$\leq B(T_1 - T_0) + \Theta_B \int_{[T_0,T_1]\setminus A_1} g(u(t))\,dt =$$

$$= B(T_1 - T_0) + \Theta_B \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt - \Theta_B \int_{A_1} g(u(t))\,dt \leq$$

$$\leq B(T_1 - T_0) + \Theta_B \gamma + b\,\Theta_B (T_1 - T_0) =: M. \quad \square$$

__Lemma 35__ Esiste una successione $\{(y_{0j}, u_j)\}_{j \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{F}$, tale che $J(y_{0j}, u_j) \to \inf_{\mathcal{F}} J$, e $y_j \to y^*$ uniformemente in $[T_0, T_1]$, ove $y^* \in AC([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$; y_j è lo stato corrispondente a u_j.

__dim.__ Sia $\{(y_{0j}, u_j)\}$ un'arbitraria successione minimizzante; allora essendo $J(y_{0j}, u_j) \to \inf_{\mathcal{F}} J$, si ha $J(y_{0j}, u_j) \leq \gamma \quad \forall j \in \mathbb{N}^+$.
Inoltre, essendo ϕ continua sul compatto S, si ha $|\phi(e)| \leq N \quad \forall e \in S$.
Dunque, se $u_j : [t_{0j}, t_{1j}] \to U$ e $e_j = (t_{0j}, y_{0j}, t_{1j}, y_j(t_{1j}))$, si ha

$$\int_{t_{0j}}^{t_{1j}} g(u_j(t))\,dt \leq \int_{t_{0j}}^{t_{1j}} L(t, y_j(t), u_j(t))\,dt \leq \gamma + N \quad \forall j \in \mathbb{N}^+;$$

di conseguenza, ricordando l'osservazione (5),

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u_j(t))\,dt \le |T_1 - T_0|\,|g(u_0)| + \gamma + N =: \nu .$$

Poniamo

$$X_{e,\nu} = \Big\{ y(\cdot) : \exists (y_0, u) \in S \text{ tale che } y \text{ è lo stato corrispondente a } u,\ e \in S,\ \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt \le \nu \Big\}$$

Mostriamo che $X_{e,\nu}$ è una famiglia equilimitata ed equi-assolutamente continua di funzioni da $[T_0, T_1]$ in $\mathbb{R}^n$.

L'equi-assoluta continuità significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $A = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ con $I_k = [s_k, t_k]$ sottointervalli disgiunti di $[T_0, T_1]$ con $m(A) < \delta$, risulta $\sum_{k=1}^{m} |y(t_k) - y(s_k)| < \varepsilon$ per ogni $y \in X_{e,\nu}$.

Infatti, per ogni $y \in X_{e,\nu}$ si ha, dal Lemma 34(ii) e da (d),

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt \le \nu \implies \int_{T_0}^{T_1} |u(t)|\,dt \le M \implies$$

$$\implies |y(t)| \le |y_0| + c_1 \int_{T_0}^{T_1} \big[1 + |y_0| + |u(s)|\big]\,ds \le$$

$$\le \big[1 + c_1 (T_1 - T_0)\big]\,|y_0| + c_1 M \le M_1$$

(con M_1 indipendente da $|y_0|$ grazie alla compattezza di S).

Ciò implica l'equi-limitatezza di $X_{e,\nu}$.

Proviamo l'equi-assoluta continuità.

Sia ora $\varepsilon>0$. Se $[s,t]\subseteq[T_0,T_1]$, si ha per ogni $y\in X_{c,v}$

$$|y(t)-y(s)| = \left|\int_s^t f(\tau,y(\tau),u(\tau))\,d\tau\right| \le$$

$$\le c_1\left|\int_s^t [1+|y_0|+|u(\tau)|]\,d\tau\right| \le$$

$$\le c_1[1+M_1]\,|t-s| + c_1\left|\int_s^t |u(\tau)|\,d\tau\right| =: \overline{c}\left[|t-s|+\left|\int_s^t |u(\tau)|\,d\tau\right|\right]$$

Poniamo $\eta=\frac{\varepsilon}{2\overline{c}}$ e sia δ il numero fornito dal Lemma 34 in corrispondenza di η e v: eventualmente lo rimpiccioliamo in modo che $\overline{c}\delta<\frac{\varepsilon}{2}$. Allora, se $A=\bigcup_{k=1}^m I_k$ con gli $I_k=[s_k,t_k]$ disgiunti e $m(A)<\delta$, dal Lemma 34(ii) segue per ogni $y\in X_{c,v}$

$$\sum_{k=1}^m |y(t_k)-y(s_k)| \le \overline{c}\sum_{k=1}^m (t_k-s_k) + \overline{c}\sum_{k=1}^m \left|\int_{s_k}^{t_k} |u(t)|\,dt\right| =$$

$$=\overline{c}\left[m(A)+\int_A |u(t)|\,dt\right] \le$$

$$\le \overline{c}\delta+\overline{c}\eta < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ciò prova l'equi-assoluta continuità di $X_{c,v}$.

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione $\{(y_{0j},v_j)\}\subseteq X_{c,v}$ ha una sottosuccessione convergente uniformemente in $[T_0,T_1]$ ad una funzione y^*, che risulta anch'essa assolutamente continua in $[T_0,T_1]$. $\square$

Lemma 36 Possiamo scegliere la successione minimizzante del Lemma 35 in modo che, posto

$$Z_j(t)=\int_{T_0}^t L(s,y_j(s),u_j(s))\,ds, \qquad t\in[T_0,T_1],$$

risulti $Z_j(t)\longrightarrow Z^*(t)$ $\forall t\in[T_0,T_1]$, con $Z^*(t)+b(t-T_0)$ monotona crescente.

<u>dim</u>. Si ha

$$0 \le \int_{t_{0j}}^{t_{1j}} L(t, y_j(t), y_j'(t))\,dt + b(t_{1j} - t_{0j}) \le \gamma + N + b(T_1 - T_0) =: \Gamma,$$

ove γ e N sono le costanti introdotte nella dimostrazione del lemma 35. Ricordando che $|y_n(t)| \le M_1$ (come si è visto in quella dimostrazione, tale stima vale per ogni $y \in X_{c,v}$), risulta per continuità di L

$$0 \le L(t, y_j(t), v_0) + b \le B \quad \forall t \in [T_0, T_1] \setminus [t_{0j}, t_{1j}], \ \forall j \in \mathbb{N}^+$$

e dunque esiste $B_0 > 0$ tale che

$$0 \le \int_{T_0}^{t} L(s, y_j(s), y_j'(s))\,ds + b(t - T_0) \le B_0 \quad \forall t \in [T_0, T_1], \ \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $\psi_j(t) = z_j(t) + b(t - T_0)$: ψ_j è crescente e $0 \le \psi_j(t) \le B_0$ per ogni $t \in [T_0, T_1]$.

Proviamo che esiste una sottosuccessione $\{\psi_{j_k}\} \subseteq \{\psi_j\}$ tale che $\psi_{j_k}(t) \longrightarrow \psi^*(t)$ puntualmente in $[T_0, T_1]$; allora, come vedremo, $z^*(t) = \psi^*(t) - b(t - T_0)$ sarà la funzione cercata.

Proveremo questa affermazione in 4 passi successivi.

1. Si estrae $\{\psi_{j_k}\} \subseteq \{\psi_j\}$ tale che

$$\exists \lim_{k\to\infty} \psi_{j_k}(t) =: \psi(t) \quad \forall t \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1]$$

Questo si fa in modo standard col metodo diagonale.

2. Si definisca per $t \in [T_0, T_1[\cap \mathbb{Q}$

$$\psi(t) := \liminf_{s \in \mathbb{Q},\, s \downarrow t} \psi(s)\,; \quad \psi(T_1) := \sup_{t \in [T_0,T_1[} \psi \quad (\text{se } T_1 \notin \mathbb{Q}).$$

in questo modo $\psi : [T_0, T_1] \to [0, k_0]$ è crescente.

3. Se $t_0 \in [T_0, T_1]$ è punto di continuità per ψ, si ha

$$\lim_{k \to \infty} \psi_{n_k}(t) = \psi(t).$$

Infatti, sia $\varepsilon > 0$: esistono $s, \sigma \in \mathbb{Q}$, con $\sigma < t_0 < s$, tali che $\psi(s) - \psi(\sigma) < \varepsilon$. Dalla relazione

$$\psi_{n_k}(\sigma) \le \psi_{n_k}(t_0) \le \psi_{n_k}(s)$$

per $k \to \infty$ si trova

$$\psi(\sigma) \le \liminf_{k \to \infty} \psi_{n_k}(t_0) \le \limsup_{k \to \infty} \psi_{n_k}(t) \le \psi(s),$$

e, per monotonia,

$$\psi(\sigma) \le \psi(t_0) \le \psi(s).$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di ε, che $\psi(t_0) = \lim_{k \to \infty} \psi_{n_k}(t_0)$.

4. Nell'insieme numerabile E dei punti di discontinuità di ψ, esiste un'ulteriore sottosuccessione, denominata ancora $\{\psi_{n_k}\}$, tali che

$$\exists \lim_{k \to \infty} \psi_{n_k}(t) =: \psi^*(t) \quad \forall t \in E.$$

Questo si fa ancora col metodo diagonale.

<u>Conclusione</u>: siano $t \in E$ e $s, \sigma \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1]$ con $\sigma < t < s$.

Dalla monotonia delle ψ_{n_k}, per $k \to \infty$, si ottiene

$$\psi(\sigma) \leq \psi^*(t) \leq \psi(s) \quad \forall \sigma, s \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1] \text{ con } \sigma < t < s.$$

Poiché ψ è crescente,

$$\limsup_{\substack{\sigma \nearrow t \\ \sigma \in \mathbb{Q}}} \psi(\sigma) \leq \psi^*(t) \leq \liminf_{\substack{s \searrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \psi(s) = \psi(t).$$

Inoltre per ogni $t' < t$, scelto $\theta \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1]$ con $t' < \theta < t$,

$$\psi(t') = \liminf_{s \in \mathbb{Q}, s \searrow t'} \psi(s) \leq \psi(\theta) \leq \limsup_{\sigma \in \mathbb{Q}, \sigma \nearrow t} \psi(\sigma) \leq \psi^*(t),$$

da cui per $t' \nearrow t$

$$\lim_{t' \to t^-} \psi(t') \leq \psi^*(t) \leq \psi(t) \qquad \forall t \in E.$$

Estendiamo ψ^* a $[T_0, T_1]$ ponendo $\psi^*(t) = \psi(t)$ $\forall t \in [T_0, T_1] \setminus E$.

Allora ψ^* è monotona crescente e vale

$$\lim_{k \to \infty} \psi_{j_k}(t) = \psi^*(t) \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \quad \square$$

Adesso consideriamo, per $(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fissato e per $q > 0$

$$\mathcal{C}_q(t,y) := \bigcup_{|s-t| + |y'-y| < q} \widetilde{F}(s, y'), \qquad C_q(t,y) = \mathrm{co}(\mathcal{C}_q(t,y))$$

(ove $\mathrm{co}(U)$ è l'<u>inviluppo convesso</u> di U).

<u>Lemma 37</u> Si ha $\widetilde{F}(t,y) = \bigcap_{q>0} \overline{C_q(t,y)}$ per ogni $(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

<u>dim</u> $(\subseteq)$ è ovvia.

$(\supseteq)$ Poniamo $\bar{z} = (z, w)$ per $z \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}$. Sia $\bar{z} \in \bigcap_{q>0} \overline{C_q(t,y)}$. Scegliendo

$q=\frac{1}{j}$, $j\in\mathbb{N}^+$, si costruisce una successione $\{\bar{z}_j\}$, con $\bar{z}_j\in C_{1/j}(t,y)$, tale che $\bar{z}_j\to z$. Ricordando che ogni punto di $C_\eta(t,y)$ è combinazione convessa di al più $n+2$ punti di $\mathcal{C}_\eta(t,y)$, possiamo scrivere

$$\bar{z}_j=(z_j,w_j)=\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_{ij}\bar{z}_{ij},\quad 0\le\lambda_{ij},\quad \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_{ij}=1,\quad \bar{z}_{ij}\in\tilde{F}(t_{ij},y_{ij})$$

con $|t_{ij}-t|+|y_{ij}-y|<\frac{1}{j}$; inoltre

$$\bar{z}_{ij}=(z_{ij},w_{ij}),\quad z_{ij}=f(t_{ij},y_{ij},u_{ij}),\quad w_{ij}\ge L(t_{ij},y_{ij},u_{ij}),\quad u_{ij}\in U.$$

Passando a sottosuccessioni, per $j\to\infty$ si ha

$$\lambda_{ij}\longrightarrow\lambda_i,\quad 0\le i\le n+1,$$

con $\lambda_i\ge0$ e $\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i=1$;

$$u_{ij}\to u_i \text{ oppure } |u_{ij}|\to\infty,\quad 0\le i\le n+1,$$

e possiamo supporre che

$$u_{ij}\to u_i,\quad 0\le i\le \ell;\qquad |u_{ij}|\to+\infty,\quad \ell+1\le i\le n+1,$$

con $u_i\in U$ per $0\le i\le\ell$; potrebbe essere, a priori, $\ell=-1$ (ossia $|u_{ij}|\to\infty$ per $0\le i\le n+1$). Proveremo che si ha $\bar{z}=(z,w)$ con

$$\text{(A)}\quad z=\sum_{i=0}^{\ell}\lambda_i f(t,y,u_i),\qquad \text{(B)}\quad w\ge\sum_{i=0}^{\ell}\lambda_i L(t,y,u_i).$$

Infatti,

$$w_j=\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_{ij}w_{ij}\ge\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_{ij}L(t_{ij},y_{ij},u_{ij})\ge\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_{ij}g(u_{ij}).$$

Per $j\to\infty$ si ha $w_j\to w$, $\lambda_{ij}\to\lambda_i$, nonché, per $0\le i\le\ell$, $u_{ij}\to u_i$. Invece, per $\ell+1\le i\le n+1$, si ha $|u_{ij}|\to+\infty$, quindi $g(u_{ij})\to+\infty$;

e di conseguenza, necessariamente, $\lambda_{ij} \to 0$ ossia $\lambda_i = 0$.

Ne segue $\ell \geq 0$ (altrimenti avremmo $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 0$). Si ha allora, visto che $\lambda_{ij}\, g(u_{ij}) \geq 0$ per $i \geq \ell+1$,

$$w_j \geq \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_{ij}\, g(u_{ij}),$$

e passando al limite,

$$w \geq \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i\, g(u_i),$$

che è la (2).

Poi,

$$z_j = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij}\, f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \to z \quad \text{per } j \to \infty.$$

Ma, per $\ell+1 \leq i \leq n+1$, fissato $\varepsilon > 0$ si ha

$$0 \leq \frac{|f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})|}{L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})} \leq \frac{c\,[1+|y_{ij}|+|u_{ij}|]}{g(u_{ij})} < \varepsilon \quad \text{per } j \geq j_\varepsilon,$$

da cui, per $j \geq j_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij}\, f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right| \leq \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij}\, L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \left[w_j - \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_{ij}\, L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right] \leq \varepsilon K$$

e dunque

$$\lim_{j\to\infty} \left| \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij}\, f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right| = 0.$$

Perciò

$$z = \lim_{j\to\infty} z_j = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij}\, f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i\, f(t_i, y_i, u_i)$$

che è la (1).

Dalla (2) segue che esistono $v_0, v_1, \dots, v_\ell \geq 0$ tali che
$$w = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \left[L(t,y,u_i) + v_i\right].$$
Allora, ponendo
$$\hat{z}_i = \left(f(t,y,u_i),\ L(t,y,u_i)+v_i\right) \in \tilde{F}(t,y),$$
dalla (1) segue
$$\bar{z} = \left(\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(t,y,u_i),\ \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \left[L(t,y,u_i)+v_i\right]\right) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \hat{z}_i,$$
ossia
$$\bar{z} \in co\left(\hat{F}(t,y)\right)$$
e per l'ipotesi (iv) del teorema si conclude che $\bar{z} \in \hat{F}(t,y)$. □

<u>Lemma 38</u> Sia $\{(y_{0j}, u_j)\}$ la successione minimizzante del lemma 36, con $z_j(t) = \int_0^t L(s, y_j(s), u_j(s))\,ds$. Posto
$$\bar{z}_j(t) = (y_j(t), z_j(t)) \quad e \quad \bar{z}^*(t) = (y^*(t), z^*(t)),$$
nei punti t di derivabilità di $\bar{z}^*$ risulta
$$(\bar{z}^*)'(t) \in \hat{F}(t, y^*(t)).$$

<u>dim</u> Ricordiamo che $y^* \in AC([T_0,T_1], \mathbb{R}^n)$ e che $z^*(t) + b(t-T_0)$ è monotona crescente, quindi $(\bar{z}^*)'(t)$ esiste q.o. in $[T_0,T_1]$. Sia t un punto di derivabilità per $\bar{z}^*$: anzitutto si ha, per definizione,

$$\bar{z}_j'(s) = \left(f(s, y_j(s), u_j(s)), L(s, y_j(s), u_j(s)\right) \quad \text{q.o. in } [t_0, T].$$

Fissato $q>0$, esistono $\delta>0$ e $j_0 \in \mathbb{N}^+$ tali che, per $|s-t|<\delta$ e $j \geq j_0$ si ha

$$|s-t| + |y_j(s) - y^*(t)| < \frac{1}{q},$$

ove si è usata l'equi-assoluta continuità delle y_j. Dunque

$$\bar{z}_j'(s) \in \tilde{F}(s, y_j(s)) \subseteq \mathcal{C}_q(t, y^*(t)) \quad \text{per } |s-t|<\delta \text{ e } j \geq j_0.$$

Se ne deduce

$$\frac{\bar{z}_j(t+h) - \bar{z}_j(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \bar{z}_j'(s)\,ds \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))} \quad \text{per } |h|<\delta \text{ e } j \geq j_0,$$

e quindi, per $j \to \infty$,

$$\frac{\bar{z}^*(t+h) - \bar{z}^*(t)}{h} \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))} \quad \text{per } |h|<\delta.$$

Infine, per $|h| \to 0$,

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))}.$$

Per l'arbitrarietà di q e per il lemma 37, si conclude che

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t)). \quad \square$$

Lemma 39 Esistono $u^* \in L^1([T_0,T_1]; U)$ e $v^* : [T_0,T_1] \to \mathbb{R}$, misurabile e non negativa, tali che
$$\begin{cases} (y^*)'(t) = f(t, y^*(t), u^*(t)) \\ (z^*)'(t) = L(t, y^*(t), u^*(t)) + v^*(t), \end{cases} \quad \text{q.o. in } [T_0,T_1].$$

dim. Poniamo $U' = U \times [0,\infty[$. Per $\bar{u} = (u,v) \in U'$ sia
$$\bar{f}(t,y,\bar{u}) = (f(t,y,u), L(t,y,u)+v), \quad (t,y) \in [T_0,T_1] \times \mathbb{R}^n.$$
Osserviamo che
$$\tilde{F}(t, y^*(t)) = [\bar{f}(t, y^*(t), \cdot)](U').$$
Adesso applichiamo un lemma di selezione:

Lemma 40 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ non vuoto, e per $z \in \mathbb{R}^p$ poniamo
$$D^z = \{u \in \mathbb{R}^m : (z,u) \in D\}, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{R}^p : D^z \neq \emptyset\}.$$
Se D è σ-compatto, esiste $u : \Delta \to \mathbb{R}^m$, misurabile, tale che
$$(z, u(z)) \in D \quad \text{per q.o. } z \in \Delta.$$

Dimostreremo questo lemma alla fine della dimostrazione del lemma 39.

Assumiamo, dunque, che il Lemma 40 sia vero.

La funzione $\bar{z}^*(t)=(y^*(t), z^*(t))$ è misurabile in $[T_0,T_1]$. Per il teorema di Lusin, esiste un sottoinsieme σ-compatto Δ di $[T_0,T_1]$, tale che $m([T_0,T_1]\setminus\Delta)=0$ e $(\bar{z}^*)'|_\Delta$ è continua. Poniamo

$$D=\{(t,\bar{u})\in\Delta\times U' : (\bar{z}^*)'(t)=\bar{f}(t,\bar{z}^*(t),\bar{u})\};$$

D è σ-compatto e, per il Lemma 38, si ha $(\bar{z}^*)'(t)\in\tilde{F}(t,y^*(t))$ per q.o. $t\in[T_0,T_1]$, da cui $D^t=\{\bar{u}\in U' : (t,\bar{u})\in D\}\neq\emptyset$ per q.o. $t\in[T_0,T_1]$.

Per il lemma di selezione, $\exists\,\bar{u}^*:\Delta\to U'$ misurabile, tale che $(t,\bar{u}^*(t))\in D$ per q.o. $t\in\Delta$, cioè per q.o. $t\in[T_0,T_1]$. Pertanto, posto $\bar{u}^*(t)=(u^*(t),v^*(t))$, si ha

$$\begin{cases}(y^*)'(t)=f(t,y^*(t),u^*(t)) \\ (z^*)'(t)=L(t,y^*(t),u^*(t))+v^*(t),\end{cases}\quad \text{q.o. in } [T_0,T_1]$$

con $u^*(t)\in U$, $v^*(t)\geq 0$. Resta da provare che $u^*\in L^1(T_0,T_1;\mathbb{R}^m)$.

Per la monotonia di ψ^*, ed il teorema di derivazione di Lebesgue,

$$\psi^*(T_1)-\psi^*(T_0)\geq\int_{T_0}^{T_1}(\psi^*)'(t)\,dt\,;\qquad \psi^*(t)=z^*(t)+b(t-T_0),$$

e per quanto provato

$$\psi^*(T_1)-\psi^*(T_0)\geq\int_{T_0}^{T_1}L(t,y^*(t),u^*(t))\,dt+b(T_1-T_0)\geq$$

$$\geq\int_{T_0}^{T_1}g(u^*(t))\,dt+b(T_1-T_0).$$

Perciò $g(u^*(\cdot))$ è sommabile e, per il Lemma 34(ii), anche u^* è sommabile. $\square$

Dimostrazione del Lemma 40

Supponiamo dapprima D compatto: allora anche Δ è compatto, essendo $\Delta = \pi(D)$ con $\pi(z,u) = z$ $\forall (z,u) \in \mathbb{R}^{p+m}$. In questo caso si prova la tesi per induzione su m.

Se $m=1$, ponendo $u(z) = \min D^z$, si ha u semicontinua inferiormente su Δ, quindi misurabile, e naturalmente $(z, u(z)) \in D$ per ogni $z \in \Delta$.

Se la tesi è vera per $m-1$, sia $\tilde{D} = \Pi(D)$, con $\Pi(z,u) = (z, u_1, \dots, u_{m-1})$ per ogni $(z,u) \in \mathbb{R}^{p+m}$. Per ipotesi induttiva, esistono $u_1(\cdot), \dots, u_{m-1}(\cdot)$ misurabili su Δ, tali che $(z, u_1(z), \dots, u_{m-1}(z)) \in \tilde{D}$ per q.o. $z \in \Delta$. Sia

$$u_m(z) = \min\{v \in \mathbb{R} : (z, u_1(z), \dots, u_{m-1}(z), v) \in D\};$$

per il teorema di Lusin, v'è un insieme σ-compatto K, contenuto in Δ, tale che $m(\Delta \setminus K) = 0$ e le restrizioni a K di $u_1, \dots, u_{m-1}$ sono continue. Dunque u_m è semicontinua inferiormente in K, per cui u_m è misurabile e $(z, u_1(z), \dots, u_m(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta$. Ciò prova il passo induttivo e quindi la tesi nel caso in cui D è compatto.

Se $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ con $D_i \subseteq D_{i+1}$ e D_i compatto, posto $\Delta_i = \pi(D_i)$ v'è $u_i : \Delta_i \to \mathbb{R}^m$ tale che $(z, u_i(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta_i$. Poniamo

$$u(z) = u_i(z) \quad \text{se } z \in \Delta_i \setminus \Delta_{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}^+.$$

Allora $u : \Delta \to \mathbb{R}^m$ è misurabile e $(z, u(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta$. $\square$

Andiamo a concludere la dimostrazione del teorema 28.

Sia $e_j = (t_{0j}, t_{1j}, y_{0j}, y_j(t_{1j}))$. Si ha

$$\inf_{\mathcal{F}} J = \lim_{j\to\infty} J(y_{0j}, u_j) = \lim_{j\to\infty} \left[Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \phi(e_j) \right].$$

Dobbiamo provare che $J(y_0^*, u^*) \le \inf_{\mathcal{F}} J$. Passando a sottosuccessioni, si ha

$$e_j \to e^* = (t_0^*, t_1^*, y_0^*, y^*(t_1^*)) \quad , \text{ con } t_0^* \le t_1^*,$$

dato che le y_j sono equi-assolutamente continue. Per la continuità di ϕ, avremo $\phi(e_j) \to \phi(e^*)$.

Supponendo $t_0^* < t_1^*$, siano t_0, t_1 tali che $t_0^* < t_0 < t_1 < t_1^*$; per la monotonia di $\psi_j(t) = Z_j(t) + b(t - T_0)$, si ha per j grande

$$\psi_j(t_{1j}) - \psi_j(t_{0j}) \ge \psi_j(t_1) - \psi_j(t_0),$$

e sottraendo ad entrambi i membri $b(t_{1j} - t_{0j})$, per $j\to\infty$ otteniamo

$$\lim_{j\to\infty} \left[Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) \right] \ge \lim_{j\to\infty} \left[\psi_j(t_1) - \psi_j(t_0) - b(t_{1j} - t_{0j}) \right] =$$

$$= \psi^*(t_1) - \psi^*(t_0) - b(t_1 - t_0) \ge \int_{t_0}^{t_1} (\psi^*)'(t)\,dt - b(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y^*(t), u^*(t))\,dt.$$

Se adesso $t_1 \to t_1^*$ e $t_0 \to t_0^*$ ricaviamo

$$\inf_{\mathcal{F}} J = \lim_{j\to\infty} \left[Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \phi(e_j) \right] \ge \int_{t_0^*}^{t_1^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\,dt + \phi(e^*) =$$

$$= J(y_0^*, u^*), \quad \text{ove } y_0^* = y^*(t_0^*).$$

Se invece $t_0^* = t_1^*$, si ha direttamente

$$\lim_{j\to\infty}\left[z_j(t_{1j})-z_j(t_{0j})\right]=\lim_{j\to\infty}\left[\psi_j(t_{1j})-\psi_j(t_{0j})-b(t_{1j}-t_{0j})\right]\geq 0;$$

dunque

$$\inf_{\mathcal{F}} J \geq \lim_{j\to\infty}\left[z_j(t_{1j})-z_j(t_{0j})+\phi(e_j)\right]\geq \phi(e^*)=J(y_0^*, u^*).$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema 28. □