Elementi di Analisi Matematica

Prove in itinere dal 2011

Prova in itinere del 19 dicembre 2011

Esercizio 1 Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è assolutamente convergente.

(ii) Descrivere il comportamento della serie nei punti in cui non c'è convergenza assoluta.

Esercizio 2 Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'equazione

$$\cos x = \sin x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha un'unica soluzione x_n nell'intervallo $]0,1[$; si mostri anche che la successione $\{x_n\}$ è crescente e se ne calcoli il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua; si provi che esistono $a, b \geq 0$ tali che

$$|f(x)| \leq a|x| + b \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per una funzione continua è vero il viceversa?

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Utilizzando il criterio del rapporto si vede che la serie converge assolutamente per ogni $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$: infatti

$$\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\,|x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,|x|^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)|x|}{(n+1)^2} = |4x|\frac{n+1/2}{n+1} \to |4x| \quad \text{per } n \to \infty.$$

Se $|4x| > 1$ la serie non può convergere poiché il suo termine generale è definitivamente crescente e quindi non è infinitesimo per $n \to \infty$.
(ii) Vediamo cosa succede per $x = \pm\frac{1}{4}$: se $x = \frac{1}{4}$ osserviamo che si ha

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n?1)!!}{(2n)!!(2n)!!} = \frac{(2n?1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k-2} \geq \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

quindi la serie diverge positivamente per confronto con la serie armonica. Per $x = -\frac{1}{4}$ si ha invece

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = (-1)^n a_n,$$

ove

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2};$$

è facile vedere, come in precedenza, che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1/2}{n+1} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi la successione $\{a_n\}$ è decrescente. Inoltre

$$\ln a_n = \ln\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right) < -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k},$$

e dunque $\ln a_n \to -\infty$ per $n \to \infty$, il che implica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Pertanto, in virtù del criterio di Leibniz, la serie converge.
Esercizio 2 Consideriamo, per $n \in \mathbb{N}^+$ fissato, la funzione

$$g_n(x) = \cos x - \sin x^n, \qquad x \in [0,1]:$$

è immediato verificare che essa è continua e decrescente, con $g_n(0) = 1 > 0$ e $g_n(1) = \cos 1 - \sin 1 < 0$ (infatti $1 > \pi/4$, valore dove la funzione decrescente $\cos t - \sin t$ si annulla). Quindi esiste un unico punto $x_n \in]0,1[$ tale che $g_n(x_n) = 0$, ossia tale che sia soddisfatta l'equazione $\cos x_n = \sin(x_n)^n$.
Confrontiamo adesso x_n e x_{n+1}: si ha, essendo $0 < x_{n+1} < 1$,

$$g_n(x_{n+1}) = \cos x_{n+1} - \sin(x_{n+1})^n < \cos x_{n+1} - \sin(x_{n+1})^{n+1} = g_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

Poiché g_n decresce e $g_n(x_{n+1}) < 0$ mentre $g_n(x_n) = 0$, deve essere $x_{n+1} > x_n$. Ciò prova che $\{x_n\}$ è una successione crescente. Pertanto la successione $\{x_n\}$ ha limite $L \in]0,1]$. Se fosse $0 < L < 1$, avremmo per monotonia

$$0 \le \cos x_n = \sin(x_n)^n < \sin L^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ otterremmo

$$0 \le \cos L \le \sin 0 = 0,$$

il che è assurdo, essendo $\cos t > 0$ per ogni $t \in]0,1]$. Si conclude allora che $L = 1$.

Esercizio 3 Sia f uniformemente continua: scelto $\varepsilon = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x, x' \in \mathbb{R}, \quad |x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < 1.$$

Sia ora $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esiste un unico $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$m\delta \le |x| < (m+1)\delta;$$

per la precisione si ha

$$m = \begin{cases} \left[\frac{|x|}{\delta}\right] - 1 & \text{se } \frac{|x|}{\delta} \notin \mathbb{N} \\ \frac{|x|}{\delta} & \text{se } \frac{|x|}{\delta} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Allora possiamo scrivere, supposto $x > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(x) - f(m\delta)| + \sum_{k=1}^{m} |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(0)| \le \\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{m} 1 + |f(0)| = m + 1 + |f(0)| \le \frac{|x|}{\delta} + 1 + |f(0)|. \end{aligned}$$

Posto $a = 1/\delta$ e $b = 1 + |f(0)|$, si ha la tesi per $x > 0$. Se $x < 0$ si fa un conto analogo con $-k\delta$ in luogo di $k\delta$.

Per una funzione continua il viceversa di questo enunciato è falso. La funzione $f(x) = \sin x^2$ verifica la condizione data con $a = 0$ e $b = 1$, ma non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$: infatti, scelti $x_n = \sqrt{n\pi}$ e $x'_n = \sqrt{n\pi + \pi/2}$, si ha

$$|x'_n - x_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi + \pi/2} + \sqrt{n\pi}}\ ,$$

quindi $|x_n - x_n'|$ è definitivamente minore di qualunque $\delta > 0$, e d'altra parte

$$|\sin(x_n)^2 - \sin(x_n')^2| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ciò mostra che f non può essere uniformemente continua.

Prova in itinere del 19 aprile 2012

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^3)\,dt - \frac{x^4}{4}}{x\,\tan^3 x\,\arctan^3 x}.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} t^2\,e^{-t^2}\,dt.$$

(i) Si descrivano le principali proprietà di f (limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia, esistenza di massimi e minimi relativi), e se ne tracci un grafico approssimativo.

(ii) Si provi che f ha almeno 5 punti di flesso.

Esercizio 3 Si consideri l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\sin x^{\frac{3}{2}}}{[\ln(1+x)]^2}\,dx,$$

e si dica se esso:

(i) ha senso,

(ii) è convergente.

Risoluzione

Esercizio 1 Ricordando che per $x \to 0$ valgono gli sviluppi di Taylor

$$\tan x = x + \mathrm{o}(x), \quad \arctan x = x + \mathrm{o}(x), \quad \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \mathrm{o}(x^8),$$

possiamo scrivere

$$\int_0^x \ln(1+t^3)\,dt = \int_0^x \left(t^3 - \frac{1}{2}t^6 + \mathrm{o}(t^8)\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{14} + \mathrm{o}(x^9),$$

e dunque utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\frac{\int_0^x \ln(1+t^3)\,dt - \frac{x^4}{4}}{x\,\tan^3 x\,\arctan^3 x} = \frac{\frac{x^7}{14} + \mathrm{o}(x^9)}{x^7 + \mathrm{o}(x^7)} = -\frac{1}{14} + \mathrm{o}(x^2).$$

Pertanto il limite proposto vale $-1/14$.

Esercizio 2 (i) Per prima cosa osserviamo che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt$$

è convergente: quindi la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è limitata. Inoltre f è dispari:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} t^2\,e^{-t^2}\,dt = \ [s=-t]\ = \int_s^{2s} s^2\,e^{-s^2}\,(-ds) = -f(x).$$

Osservato che $f \geq 0$ in $[0,\infty[$ e che (evidentemente) $f(0)=0$, calcoliamo il limite a $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{2x} t^2\,e^{-t^2}\,dt - \int_0^x t^2\,e^{-t^2}\,dt\right] = \\ &= \int_0^\infty t^2\,e^{-t^2}\,dt - \int_0^\infty t^2\,e^{-t^2}\,dt = 0;\end{aligned}$$

pertanto si ha anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

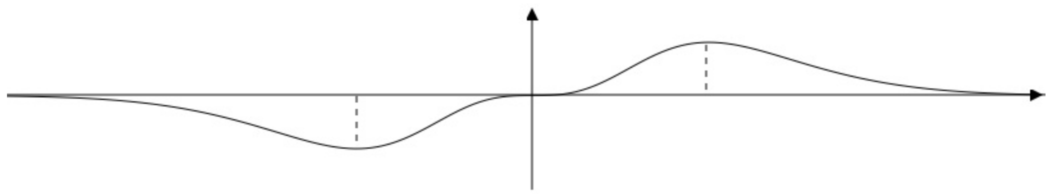
Analizziamo gli intervalli di monotonia. Si ha

$$f'(x) = 8x^2\,e^{-4x^2} - x^2\,e^{-x^2},$$

quindi f è non negativa se e solo se $8\,e^{-3x^2} \geq 1$, ovvero $|x| \leq \sqrt{\frac{1}{3}\,\ln 8}$, ossia

$$-\sqrt{\ln 2} \leq x \leq \sqrt{\ln 2}.$$

Si deduce che f ha un punto di minimo relativo in $x = -\sqrt{\ln 2}$ ed un punto di massimo relativo in $x = \sqrt{\ln 2}$. Il valore di f in tali punti non è calcolabile. Tenuto conto delle altre informazioni, ricaviamo che si tratta di punti rispettivamente di massimo assoluto e di minimo assoluto. Il grafico di f è approssimativamente il seguente:



(ii) La funzione ha derivata nulla in $x = 0$, ed è facile verificare che anche la derivata seconda è nulla in 0: dunque l'origine è un punto di flesso. Vediamo la situazione per $x \geq 0$: la funzione cresce nell'intervallo $[0, \sqrt{\ln 2}]$ ed ha derivata nulla agli estremi; ne segue che la sua pendenza deve prima crescere e poi decrescere, ossia deve esserci almeno un punto di flesso in tale intervallo. Analogamente, nella semiretta $]\sqrt{\ln 2}, +\infty[$ la funzione ha derivata nulla negli estremi e decresce, per cui la sua pendenza (negativa) deve prima decrescere e poi crescere: pertanto vi è almeno un altro punto di flesso in tale semiretta. Per disparità, altri due punti di flesso si trovano nella semiretta negativa. Il totale dei punti di flesso è dunque almeno 5.

Esercizio 3 (i)-(ii) L'integrando è una funzione continua in $]0, \infty[$, di segno non costante; quindi per vedere se esso ha senso conviene analizzare l'integrale del modulo:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin \frac{1}{x}|\,|\sin x^{\frac{3}{2}}|}{[\ln(1+x)]^2}\,dx.$$

Se esso converge, convergerà anche l'integrale originario; se esso non converge, l'integrale originario perderà probabilmente di senso perché, data l'oscillazione di $\sin x^{3/2}$, esso avrà presumibilmente la forma $+\infty - \infty$; valuteremo questa situazione se si presenterà.

Dobbiamo analizzare l'unica singolarità dell'integrando, che si trova in 0, nonché l'andamento dell'integrando per $x \to \infty$. In un intorno di 0 si ha

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1, \quad \sin x^{\frac{3}{2}} \simeq x^{\frac{3}{2}}, \quad [\ln(1+x)]^2 \simeq x^2.$$

Dunque

$$\frac{|\sin \frac{1}{x}|\,|\sin x^{\frac{3}{2}}|}{[\ln(1+x)]^2} \leq \frac{c}{\sqrt{x}} \qquad \text{per } x \text{ vicino a } 0,$$

e quindi
$$\int_0^a \frac{|\sin\frac{1}{x}|\,|\sin x^{\frac{3}{2}}|}{[\ln(1+x)]^2}\,dx < \infty \qquad \forall a > 0.$$
All'infinito invece risulta
$$\sin\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x}\,, \quad |\sin x^{\frac{3}{2}}| \leq 1, \quad [\ln(1+x)^2 \simeq \ln^2 x,$$
cosicché
$$\frac{|\sin\frac{1}{x}|\,|\sin x^{\frac{3}{2}}|}{[\ln(1+x)]^2} \leq \frac{c}{x\ln^2 x} \qquad \text{per } x \text{ vicino a } +\infty;$$
poiché
$$\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} < \infty \qquad \forall a > 1,$$
si può concludere che
$$\int_a^\infty \frac{|\sin\frac{1}{x}|\,|\sin x^{\frac{3}{2}}|}{[\ln(1+x)]^2}\,dx < \infty,$$
e pertanto l'integrale proposto ha senso ed è convergente.

Prova in itinere del 17 maggio 2012

Esercizio 1 **(i)** Descrivere qualitativamente i grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{x\,y}{1+|x\,y|}\,.$$
(ii) Mostrare in particolare che se $y(0) \neq 0$ la soluzione y ha un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.
Esercizio 2 Determinare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y'' + k\,y' + y = e^{-x}.$$
Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x} \\ y(1) = e^4, \quad y'(1) = e^2. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Osserviamo anzitutto che vi è la soluzione costante $y = 0$. Notiamo poi che ogni soluzione è pari: in effetti, se y è soluzione per $x \geq 0$ con $y(0) = b$, allora la funzione $v(x) = y(-x)$ verifica $v(0) = b$ ed è anch'essa soluzione; infatti

$$v'(x) = -y'(-x) = -\frac{(-x)y(-x)}{1 + |(-x)y(-x)|} = \frac{x\,v(x)}{1 + |x\,v(x)|}\,.$$

Per unicità si ha dunque $v(x) = y(x)$, ossia y è pari. Inoltre se y è soluzione con $y(0) = b$, anche $w(x) = -y(x)$ è soluzione con $w(0) = -b$, in quanto

$$w'(x) = -y'(x) = -\frac{x\,y}{1 + |x\,y|} = \frac{x\,w}{1 + |x\,w|}\,.$$

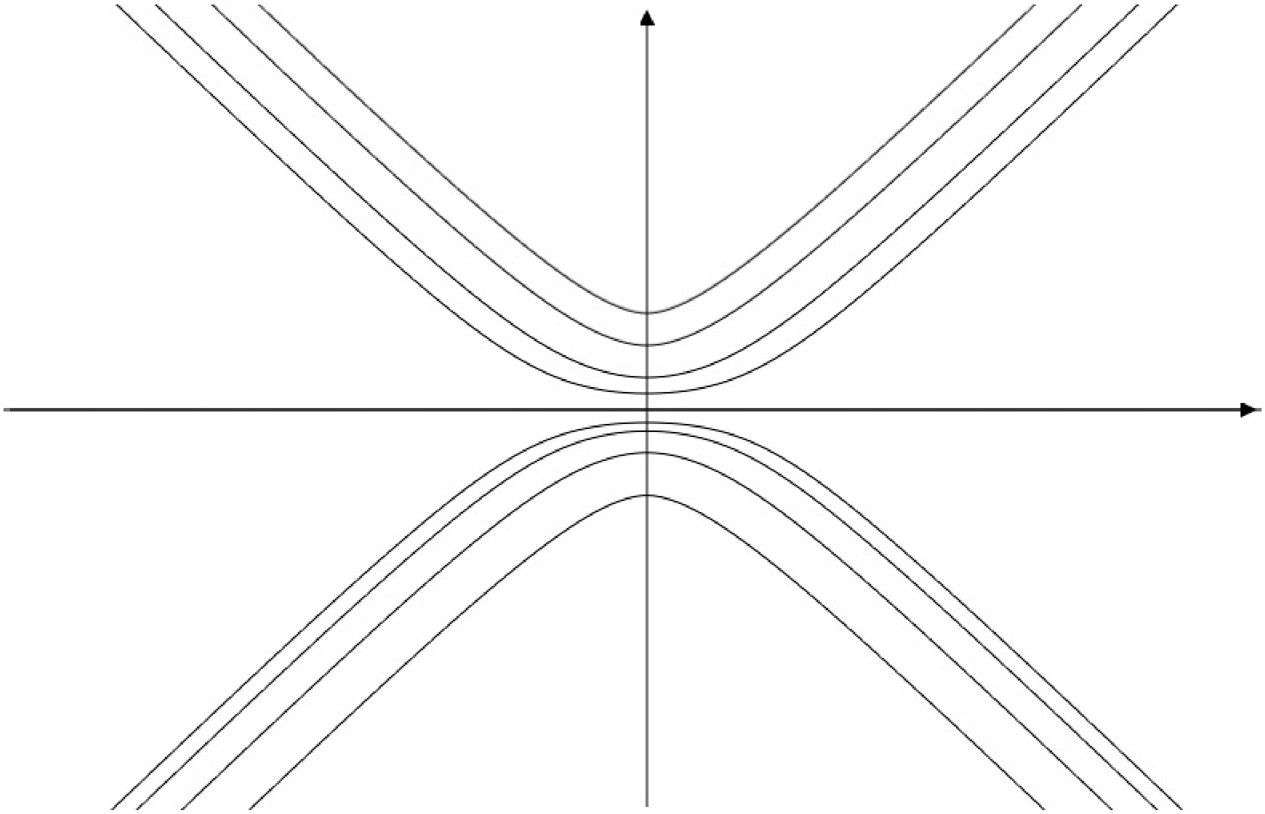
Pertanto è sufficiente analizzare soltanto i grafici che giacciono sul primo quadrante, ove l'equazione si riscrive più semplicemente così:

$$y' = \frac{x\,y}{1 + |x\,y|}\,, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

È immediato verificare allora che (nel primo quadrante) tutte le soluzioni sono crescenti ed hanno un minimo assoluto in $x = 0$. Analizziamo la convessità: si ha

$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{x\,y}{1 + x\,y} = \frac{x\,y' + y}{(1 + xy)^2} = \frac{1}{(1 + xy)^2}\left(\frac{x^2 y}{(1 + xy)^2} + y\right),$$

dunque tutte le soluzioni (nel primo quadrante) sono convesse e in particolare, a parte la soluzione nulla, tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$.



(ii) Per le simmetrie già osservate, basta provare che ogni soluzione il cui grafico passi per il primo quadrante ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Sappiamo già che le soluzioni tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$; a maggior ragione si avrà $x\,y(x) \to \infty$ per $x \to +\infty$, e dunque $y'(x) \to 1$ per $x \to +\infty$. È dunque naturale aspettarsi un asintoto obliquo che abbia pendenza 1: per verificarne l'esistenza, osserviamo che, utilizzando l'equazione differenziale, si ha

$$y(x) - x = y(0) + \int_0^x (y'(t) - 1)\,dt = y(0) - \int_0^x \frac{dt}{1 + t\,y(t)} \quad \forall x \geq 0;$$

quindi per provare la tesi basta mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t\,y(t)} < \infty,$$

poiché in tal caso l'asintoto cercato sarà la retta di equazione

$$y = x + y(0) - \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t\,y(t)}\,.$$

Notiamo che $y(x)$ è continua e positiva per ogni $x > 0$, quindi l'integrale $\int_0^A \frac{dt}{1+t\,y(t)}$ è certamente ben definito e finito per ogni $A > 0$. D'altra parte, per convessità si ha

$$y(x) \geq y(1) + y'(1)(x-1) \qquad \forall x \geq 0;$$

in particolare, perciò,

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+|t\,y(t)|} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{1+t[y(1)+y'(1)(t-1)]}\,.$$

Ancora per convessità si ha $y'(1) = c > 0$, mentre ovviamente $t\,y(1) > 0$; quindi

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+|t\,y(t)|} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{1+c\,t\,(t-1)} \leq \int_1^\infty \frac{dt}{1+c\,(t-1)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}.$$

Ciò prova l'esistenza dell'asintoto.

Esercizio 2 Risolviamo dapprima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$ e le sue radici sono

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = \frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2} & \lambda_2 = \frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2} & \text{se } |k| > 2, \\[2ex] \lambda = -\frac{k}{2} \text{ (doppia)} & & \text{se } k = \pm 2, \\[2ex] \lambda_1 = \frac{-k+i\sqrt{4-k^2}}{2} & \lambda_2 = \frac{-k-i\sqrt{4-k^2}}{2} & \text{se } |k| < 2. \end{array}$$

Nel primo caso, $|k| > 2$, le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1\, e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}\,x} + c_2\, e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C};$$

nel secondo caso, $k = \pm 2$, sono

$$c_1\, e^{-\frac{k}{2}\,x} + c_2\, x\, e^{-\frac{k}{2}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C};$$

nel terzo caso, $|k| < 2$, sono

$$c_1\, e^{-\frac{k}{2}\,x} \cos\left[\sqrt{4-k^2}\,x\right] + c_2\, e^{-\frac{k}{2}\,x} \sin\left[\sqrt{4-k^2}\,x\right], \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione v dell'equazione non omogenea: essa dovrà essere del tipo $A\,e^{-x}$ nel caso che -1 non sia radice dell'equazione caratteristica, oppure del tipo $A\,x^m\,e^{-x}$ in caso contrario, ove $m \in \{1, 2\}$ è la molteplicità della radice. È immediato constatare che

$$-1 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 2,$$

nel qual caso $-1 = -\frac{k}{2}$ è radice doppia. Con facili verifiche si ottiene che la soluzione particolare è

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-k}\, e^{-x} & \text{se } k \neq 2, \\ \frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x} & \text{se } k = 2. \end{cases}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione differenziale data sono:

$$\begin{array}{ll} cc_1\, e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}\, x} + c_2\, e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}\, x} + \frac{1}{2-k}\, e^{-x} & \text{se } |k| > 2, \\ c_1\, e^{-\frac{k}{2}\, x} + c_2\, x\, e^{-\frac{k}{2}\, x} + \frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x} & \text{se } k = 2, \\ c_1\, e^{-\frac{k}{2}\, x} + c_2\, x\, e^{-\frac{k}{2}\, x} + \frac{1}{2-k}\, e^{-x} & \text{se } k = -2, \\ c_1\, e^{-\frac{k}{2}\, x} \cos\left[\sqrt{4-k^2}\, x\right] + c_2\, e^{-\frac{k}{2}\, x} \sin\left[\sqrt{4-k^2}\, x\right] + \frac{1}{2-k}\, e^{-x} & \text{se } |k| < 2, \end{array}$$

ove $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Esercizio 3 L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, e la sua unica radice (doppia) è $\lambda = 2$. Quindi l'equazione omogenea ha le soluzioni

$$c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x}.$$

Per determinare una soluzione dell'equazione non omogenea occorre utilizzare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: cerchiamo dunque una soluzione della forma

$$v(x) = c_1(x)\, e^{2x} + c_2(x)\, e^{2x}.$$

Allora le funzioni incognite $c_1(x)$ e $c_2(x)$ devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{2x} + c_2'(x)\, x\, e^{2x} = 0 \\ 2c_1'(x)\, e^{2x} + c_2'(x)(1+2x)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{x}\, . \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene facilmente

$$c_2'(x) = \frac{1}{x}\, , \qquad c_1'(x) = -1,$$

da cui per esempio

$$c_2(x) = \ln x, \qquad c_1(x) = -x.$$

Ne segue

$$v(x) = -x\, e^{2x} + x\, \ln|x|\, e^{2x}.$$

Dato che $x\,e^{2x}$ risolve l'equazione omogenea, possiamo più semplicemente scegliere

$$v(x) = x\,\ln|x|\,e^{2x};$$

quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data è

$$\left\{c_1\,e^{2x} + c_2\,x\,e^{2x} + x\,\ln|x|\,e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Imponiamo adesso le condizioni di Cauchy: siccome

$$y'(x) = 2c_1\,e^{2x} + c_2(1+2x)e^{2x} + (1 + \ln|x| + 2x\,\ln|x|)e^{2x},$$

si deve avere

$$e^4 = y(1) = (c_1 + c_2)e^2, \quad e^2 = y'(1) = (2c_1 + 3c_2 + 1)e^2,$$

da cui facilmente

$$c_1 = 3e^2, \qquad c_2 = -2e^2$$

ed infine

$$y(x) = 3e^{2+2x} - 2x\,e^{2+2x} + x\,\ln|x|\,e^{2x}.$$

Prova in itinere del 22 gennaio 2013

Esercizio 1 Sia n un numero naturale maggiore di 1, e siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali non negativi.

(a) Si provi che

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

(b) Si precisi in quali casi la prima disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

(c) Si precisi in quali casi la seconda disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

Esercizio 2 Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6},$$

con la condizione iniziale $a_0 = \lambda$.

(a) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione è ben definita.

(b) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione è convergente, e se ne calcoli il limite L.

(c) Fra questi, si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - L).$$

Esercizio 3 Si consideri l'equazione, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{N}$,

$$x^2 = (\cos x)^k.$$

(a) Si provi che nella semiretta $x \geq 0$ l'equazione ha una e una sola soluzione x_k e che $0 < x_k < 1$.

(b) Si provi che esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} x_k$$

e lo si calcoli.

Risoluzione

Esercizio 1 (a) Proviamo la prima disuguaglianza per induzione: se $n = 2$ si ha

$$1 + a_1 + a_2 \leq 1 + a_1 + a_2 + a_1 a + 2 = (1 + a_1)(1 + a_2).$$

Se la tesi vale per n, allora

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{n=1} a_i &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) + a_{n+1} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) = \prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i). \end{aligned}$$

Proviamo adesso la seconda disuguaglianza. Essendo $\ln(1 + t) \leq t$ per ogni $t > 0$, si ha

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln(1 + a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\,,$$

da cui la tesi.
(b) Affinché valga la prima uguaglianza è sufficiente che tutti gli a_i, salvo al più uno, siano nulli: infatti, se $a_1 > 0 = a_2 = \ldots = a_n$, si ha

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + a_1 = \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i).$$

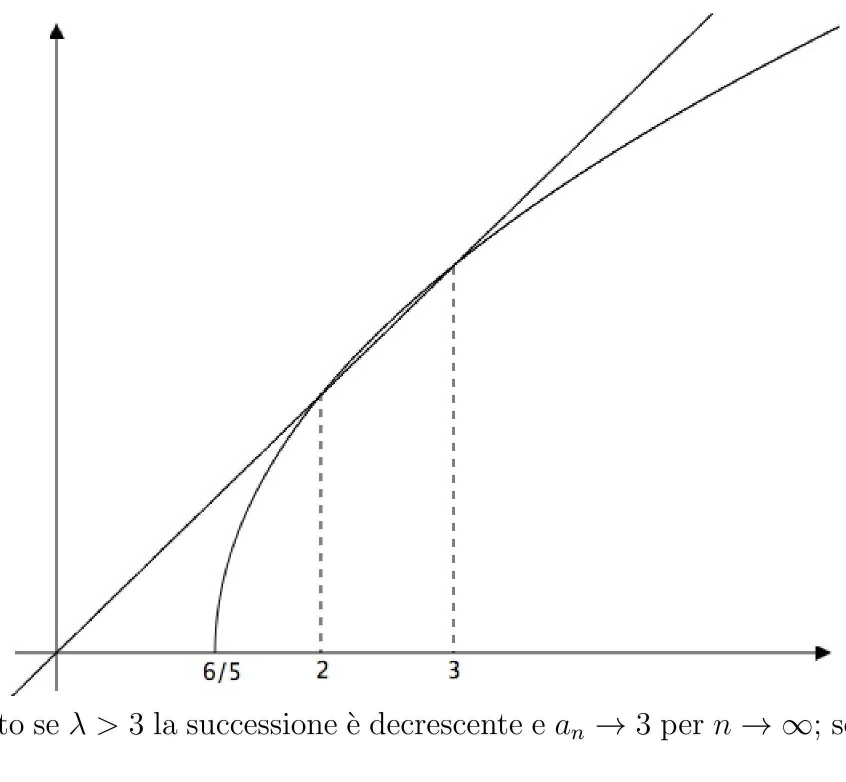
Viceversa, se vale l'uguaglianza, e se ad esempio $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$, allora

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i < 1+\sum_{i=1}^{n} a_i+a_1a_2 \leq 1+\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i\neq j} a_ia_j \leq \prod_{i=1}^{n}(1+a_i),$$

il che è assurdo.
(c) Affinché valga la seconda uguaglianza è sufficiente che tutti gli a_i siano nulli, in quanto si ha $\ln(1 + t) = t$ se e solo se $t = 0$. Il viceversa è evidente.

Esercizio 2 (a)-(b) La successione non è definita se $\lambda < 6/5$, ed è quindi sempre non negativa. Osserviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{5x - 6}$ verifica

$$f(x) < x \quad\iff\quad x^2 - 5x + 6 < 0 \quad\iff\quad 2 < x < 3.$$



Pertanto se $\lambda > 3$ la successione è decrescente e $a_n \to 3$ per $n \to \infty$; se $\lambda = 3$

la successione è costante, $a_n = 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; se $2 < \lambda < 3$ la successione è crescente e $a_n \to 3$ per $n \to \infty$; se $\lambda = 2$ la successione è costante, $a_n = 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; infine se $6/5 \leq \lambda < 2$ la successione non è ben definita: infatti per $6/5 \leq \lambda < 2$ i primi termini della successione sono definiti ma essa decresce e, non avendo punti fissi a cui convergere, scavalca il valore $6/5$ dopo un numero finito di termini: in altre parole, vi è un indice ν tale che $a_\nu < 6/5$, per cui non è definito $a_{\nu+1}$.

(c) Se $\lambda = 2$ oppure $\lambda = 3$ la serie è nulla e quindi converge. Supponiamo dunque $\lambda > 2$ e $\lambda \neq 3$ cosicché in particolare $L = 3$. Possiamo scrivere

$$f(x) - f(x') = \sqrt{5x-6} - \sqrt{5x'-6} = \frac{5(x-x')}{\sqrt{5x-6} + \sqrt{5x'-6}},$$

e ricordando che $f(3) = 3$ si ha

$$a_{n+1} - 3 = f(a_n) - f(3) = \frac{5(a_n - 3)}{a_{n+1} + 3}.$$

Dunque, essendo $a_n \to 3$ e pertanto, definitivamente, $a_n > 5/2$, otteniamo definitivamente la seguente stima:

$$|a_{n+1} - 3| = 5\frac{|a_n - 3|}{a_{n+1} + 3} < \frac{5}{\frac{5}{2} + 3}|a_n - 3| = \frac{10}{11}|a_n - 3|.$$

Ciò prova che, definitivamente,

$$\frac{|a_{n+1} - 3|}{|a_n - 3|} < \frac{10}{11},$$

cosicché la serie converge assolutamente per il criterio del rapporto.

Esercizio 3 (a) Poniamo

$$g_k(x) = x^2 - (\cos x)^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che

$$g(0) = -1, \quad g(1) = 1 - (\cos 1)^k > 0,$$

e che g è strettamente crescente, essendo la differenza fra x^2 (strettamente crescente) e $(\cos x)^k$ ((strettamente decrescente fra 0 e $\pi/2$). pertanto esiste un unico punto $x_k \in]0,1[$ tale che $g_k(x_k) = 0$. Inoltre per $x > 1$ si ha

$g_k(x) > 1 - (\cos x)^k > 0$, quindi g_k non ha altri punti in cui si annull
(b) Proviamo che la successione $\{x_k\}$ è decrescente: siccome nella semiretta $x \geq 0$ si ha $g_k(x) < 0$ se e solo se $0 \leq x < x_k$, dalla relazione

$$0 = g_{k+1}(x_{k+1}) = (x_{k+1})^2 - (\cos x_{k+1})^{k+1} > (x_{k+1})^2 - (\cos x_{k+1})^k = g_k(x_{k+1})$$

si deduce $x_{k+1} < x_k$. Dunque x_k ha limite $L \geq 0$; proviamo che $L = 0$. Si ha, per la decrescenza del coseno,

$$(x_k)^2 = (\cos x_k)^k < (\cos x_1)^k,$$

e quindi, per confronto, se $k \to \infty$ si trova, essendo $\cos x_1 < 1$,

$$L^2 \leq \lim_{k\to\infty} (\cos x_1)^k = 0,$$

ossia $L = 0$.

Prova parziale del 24 aprile 2013

Esercizio 1 Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita sul sottoinsieme aperto $J \subset \mathbb{R}$. Si assuma che la derivata f' abbia esattamente n zeri in J.

(a) Si provi che se J è un intervallo, il numero di zeri di f in J è minore o uguale a $n + 1$.

(b) Come deve essere modificata la precedente stima dall'alto sul numero di zeri di f in J, se il dominio J è, più in generale, l'unione di m intervalli aperti disgiunti?

(c) Siano A, B, C polinomi reali di gradi rispettivamente a, b, c, con C non identicamente nullo. Si provi che il numero di zeri reali dell'equazione

$$A(x)e^{B(x)} = C(x)$$

è minore o uguale di $a+b+c+\min(a, c)$ (si applichi la stima precedente ad una opportuna funzione $f : J \to \mathbb{R}$).

Esercizio 2 Sia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di funzioni definite su $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$, verificante le seguenti condizioni:

(i) risulta

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| \le K|x - x'| \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in A;$$

(ii) esiste $M \ge 0$ tale che

$$|f_\alpha(0)| \le M \qquad \forall \alpha \in A.$$

Si provi allora che:

(a) la funzione $f(x) = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$ è definita su $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$;

(b) essa è tale che

$$|f(x) - f(x')| \le K|x - x'| \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 6x^2} - \sqrt[5]{1 + 10x^2}}{\arctan^2 x - x^2}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (a) Se x_1 e x_2 sono zeri reali consecutivi di f, nel senso che $f \neq 0$ in $]x_1, x_2[$, allora per il teorema di Rolle f' deve annullarsi almeno una volta in $]x_1, x_2[$. Pertanto, avendo f' esattamente n zeri in J, la f non può averne più di $n + 1$ (e chiaramente può averne di meno, ma questo non ci interessa).

(b) Se J è unione di m intervalli aperti J_k disgiunti, detto n_k il numero di zeri di f' in J_k (cosicché $\sum_{k=1}^m n_k = n$), per (a) la f ha al più $n_k + 1$ zeri in J_k: pertanto il numero complessivo di zeri di f in J sarà al più

$$\sum_{k=1}^m (n_k + 1) = n + \sum_{k=1}^m 1 = n + m.$$

(c) Supponiamo dapprima che A e C non abbiano zeri reali comuni. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$f(x) := \frac{A(x)e^{B(x)}}{C(x)} - 1 = 0,$$

e notiamo che essa vale in $J = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : C(x) = 0\}$. Questo insieme è l'unione di al più $m = c + 1$ intervalli contigui, nel senso che essi hanno a due a due un estremo in comune, il quale è una radice di C.
Vediamo quanti sono al più gli zeri di f' in J: si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(A'(x)e^{B(x)} + A(x)B'(x)e^{B(x)})C(x) - A(x)e^{B(x)}C'(x)}{C(x)^2} = \\ &= \frac{e^{B(x)}(A'(x)C(x) + A(x)B'(x)C(x) - A(x)C'(x))}{C(x)^2}, \end{aligned}$$

e il polinomio a numeratore ha grado al più $a + b + c - 1$. Ne segue che f' ha al più $n = a + b + c - 1$ zeri in $J = \bigcup_{k=1}^{c+1} J_k$.
Da (a) segue allora che f ha al più $n+m = a+b+c-1+(c+1) = a+b+2c$ zeri in J. Tali zeri sono tutte e sole le radici dell'equazione data in J; ma non vi sono altre radici in $\mathbb{R} \setminus J$, perché in tali punti si annulla C ma non A.
Se invece A e C hanno h zeri reali comuni (con $0 < h \leq \min\{a, c\}$), allora queste h radici risolvono l'equazione data. Poi, dividendo per C e procedendo come sopra, siccome A in J ha al più $a - h$ radici, come prima si arriva alla stima di al più $a - h + b + 2c$ zeri di f in J. Ne segue che l'equazione data ha al più $a - h + b + 2c$ zeri in J, oltre agli h zeri in $\mathbb{R} \setminus J$, e quindi ha al più $a + b + 2c$ zeri reali, proprio come nel caso $h = 0$.
D'altra parte osserviamo che possiamo riscrivere l'equazione data in un altro modo:

$$g(x) := \frac{C(x)e^{-B(x)}}{A(x)} - 1 = 0,$$

e allora ripetendo lo stesso discorso otteniamo che g ha al più $2a + b + c$ zeri in $I = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : A(x) = 0\}$ e di conseguenza l'equazione data ha al più $2a + b + c$ zeri reali.
Allora, scegliendo f quando $c \leq a$ e g quando $c > a$, si ottiene che l'equazione data ha al più $a + b + c + \min\{a, c\}$ zeri reali.
Esercizio 2 (a) Per ogni $\alpha \in A$ possiamo scrivere

$$|f_\alpha(x)| \leq |f_\alpha(x) - f_\alpha(0)| + |f_\alpha(0)| \leq K|x| + M \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e ciò mostra che

$$\sup_{\alpha \in A} |f_\alpha(x)| \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

dunque f è a valori in $\mathbb{R}$.

(b) Per ogni $\alpha \in A$ e per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$ si ha

$$f_\alpha(x) \leq |f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| + f_\alpha(x') \leq K|x - x'| + \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x');$$

quindi

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \leq K|x - x'| + \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x'),$$

da cui

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) - \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x') \leq K|x - x'|.$$

Scambiando i ruoli di x e x' otteniamo

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x') - \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \leq K|x' - x|$$

e dunque

$$\left| \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) - \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x') \right| \leq K|x - x'| \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 Utilizziamo gli sviluppi di Taylor nell'origine: posto $g(t) = (1+t)^a$, con $a > 0$, si ha

$$g'(t) = a(1+t)^{a-1}, \qquad g''(t) = a(a-1)(1+t)^{a-2},$$

e dunque

$$g(t) = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2}\, t^2 + \mathrm{o}(t^2) \quad \text{per} \quad t \to 0.$$

pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+t} &= 1 + \tfrac{1}{3}\, t - \tfrac{1}{9}\, t^2 + \mathrm{o}(t^2) \\ \sqrt[5]{1+t} &= 1 + \tfrac{1}{5}\, t - \tfrac{2}{25}\, t^2 + \mathrm{o}(t^2) \end{aligned} \qquad \text{per} \quad t \to 0,$$

e in definitiva

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+6x^2} &= 1 + 2x^2 - 4x^4 + \mathrm{o}(x^5) \\ \sqrt[5]{1+10x^2} &= 1 + 2x^2 - 8x^4 + \mathrm{o}(x^5) \end{aligned} \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$

Inoltre, essendo

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall t \in [-1, 1],$$

risulta

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}\,t^3 + \mathrm{o}(t^4) \qquad \text{per} \quad t \to 0,$$

da cui

$$\arctan^2 x = \left(x - \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{2}{3}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Valutiamo finalmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+6x^2} - \sqrt[5]{1+10x^2}}{\arctan^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4 + \mathrm{o}(x^5)}{-\frac{2}{3}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5)} = -6.$$

Prova parziale del 29 maggio 2013

Esercizio 1 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b]$. Supponiamo che essa sia convergente uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione f, ossia che risulti

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Si provi che anche f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ e che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Esercizio 2 Sia $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente.

(a) Provare che se l'integrale improprio

$$\int_0^\infty g(x)\,dx$$

è convergente, allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\,g(x) = 0.$$

(b) Dimostrare che il viceversa è falso.

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$u(x) = (x-1)\,e^{-x}\,\ln x, \qquad x > 0.$$

(a) Verificare che u è integrabile in senso improprio su $]0, \infty[$.

(b) Calcolare l'integrale
$$\int_0^\infty u(x)\, dx.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Per ipotesi si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0.$$

Proviamo che f è integrabile secondo Riemann: sia $\varepsilon > 0$ e sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che
$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu.$$
Adesso osserviamo che se I è un qualsiasi intervallo contenuto in $[a, b]$ risulta

$$\sup_I f \leq \sup_I (f - f_n) + \sup_I f_n \leq \sup_I |f - f_n| + \sup_I f_n$$

e simmetricamente

$$\sup_I f_n \leq \sup_I (f_n - f) + \sup_I f \leq \sup_I |f_n - f| + \sup_I f,$$

il che implica
$$\left|\sup_I f - \sup_I f_n\right| \leq \sup_I |f - f_n|.$$
In modo assolutamente analogo si prova che

$$\left|\inf_I f - \inf_I f_n\right| \leq \inf_I |f - f_n|.$$

Di conseguenza, si ha per ogni $n \geq \nu$

$$|S(f, \sigma) - S(f_n, \sigma)| \leq S(|f - f_n|, \sigma) < \varepsilon,$$
$$|s(f, \sigma) - s(f_n, \sigma)| \leq s(|f - f_n|, \sigma) < \varepsilon.$$

Ora fissiamo $n = \nu$: essendo f_ν integrabile secondo Riemann, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ di $[a, b]$, con $t_i - t_{i-1} < \delta$ per ogni $i = 1, \ldots, N$, risulta

$$S(f_\nu, \sigma) - s(f_\nu, \sigma) < \varepsilon.$$

Quindi, per ogni suddivisione σ di $[a, b]$, con $t_i - t_{i-1} < \delta$ per ogni $i = 1, \ldots, N$, si ha

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq& \\ &\leq |S(f, \sigma) - S(f_\nu, \sigma)| + [S(f_\nu, \sigma) - s(f_\nu, \sigma)] + |s(f_\nu, \sigma) - s(f, \sigma)| < \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

e ciò prova che $f \in \mathcal{R}(a, b)$.
Proviamo adesso la seconda parte dell'enunciato. Fissato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$: ne segue

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty \, dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty < (b-a)\varepsilon \quad \forall n \geq \nu$$

il che dimostra la tesi.
Esercizio 2 (a) Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$\int_M^\infty g(t) \, dt < \varepsilon,$$

e quindi per ogni $x \geq 2M$ si ha, essendo $g \geq 0$,

$$\int_{x/2}^x g(t) \, dt < \varepsilon.$$

Dunque, per la decrescenza di g,

$$\frac{x}{2} g(x) \leq \int_{x/2}^x g(t) \, dt < \varepsilon \qquad \forall x \geq 2M,$$

ossia

$$x \, g(x) \leq 2\varepsilon \qquad \forall x \geq 2M,$$

che è la tesi.
(b) Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1/e & \text{se } 0 \le x \le e \\ \frac{1}{x \ln x} & \text{se } x > e. \end{cases}$$

Essa è positiva, continua, decrescente e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} x\, g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0;$$

Tuttavia il suo integrale su $[0,\infty[$ vale

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = 1 + \int_e^\infty \frac{dx}{x\,\ln x} = 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t} = +\infty.$$

Esercizio 3 Certamente la funzione u, essendo continua, è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,b]$ con $0 < a < b < \infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}u(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x/2}u(x) = 0,$$

e dunque esistono due costanti positive A, B tali che

$$|u(x)| \le A\,x^{-1/2} \quad \text{in un intervallo }]0,\delta],$$
$$|u(x)| \le B\,e^{-x/2} \quad \text{in una semiretta } [M,\infty[\,;$$

pertanto esistono finiti entrambi gli integrali impropri

$$\int_0^1 u(x)\,dx, \qquad \int_1^\infty u(x)\,dx.$$

Ne segue che u è integrabile in senso improprio su $[0,\infty[$.
Calcoliamone l'integrale. Conviene integrare per parti, cercando una primitiva di $(x-1)e^{-x}$ e derivando $\ln x$: per ogni $0 < a < b < \infty$ si ha

$$\int_a^b (x-1)e^{-x}\,dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_a^b + \int_a^b e^{-x}\,dx = \left[-x\,e^{-x}\right]_a^b,$$

e dunque si ottiene

$$\int_0^\infty (x-1)\,e^{-x}\,\ln x\,dx = \left[-x\,e^{-x}\ln x\right]_0^\infty + \int_0^\infty x\,e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Dato che la funzione $x\,e^{-x}\ln x$ ha limite 0 per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, si conclude che

$$\int_0^\infty (x-1)\,e^{-x}\,\ln x\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$