UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

IL PROBLEMA DI STEINHAUS PER SPAZI DI BANACH

Relatore:
Prof. *Paolo Acquistapace*

Candidato:
Renato Infante

ANNO ACCADEMICO 2012–2013

Indice

Introduzione

In questo lavoro di tesi vedremo come si può generalizzare a spazi di Hilbert e Banach un problema elementare di geometria del piano che si trova tra i cento problemi elementari della raccolta del matematico polacco Hugo Steinhaus. Il risultato stabilisce la proprietà del piano euclideo secondo cui per ogni numero naturale n esiste un cerchio al cui interno giacciono esattamente n punti del reticolo degli interi.

In un generico spazio metrico, la nozione che estende ai nostri scopi il reticolo degli interi è quella di insieme quasi finito, ossia di insieme infinito numerabile che interseca ogni palla in un numero finito di punti. Ci interrogheremo su quali siano gli spazi di Hilbert e gli spazi di Banach in cui, assegnato un sottoinsieme quasi finito A dello spazio, esiste un denso Y tale che per ogni $y \in Y$ e ogni naturale n esiste una palla centrata in y che interseca A in n punti. Da principio dimostreremo che tale proprietà, denotata con (S), è posseduta da ogni spazio di Hilbert, il che rafforza il risultato enunciato per il piano euclideo.

Lo stesso non si può dire nell'ambito degli spazi di Banach. Si farà uso di una riformulazione della proprietà di Steinhaus in termini della geometria della palla unitaria per dimostrare che godono di essa gli spazi strettamente convessi e gli spazi $L_p(\mu)$ dove μ è una misura senza atomi e $1 \leq p < \infty$, mentre non godono di (S) gli spazi $C(K)$ delle funzioni scalari continue su un compatto T2 con almeno due punti. Di nostro particolare interesse sarà la relazione tra stretta convessità e proprietà (S). Già il risultato sulle funzioni integrabili esibisce un esempio di spazio non strettamente convesso ma dotato di (S): lo spazio $L_1(\lambda)$ ove λ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Un altro tale esempio in dimensione bassa si troverà costruendo una norma su $\mathbb{R}^3$ come funzionale di Minkowski di un opportuno sottoinsieme limitato, simmetrico e convesso.

Dopo aver introdotto i concetti di filtro ed ultrafiltro, ed aver visto alcune utili applicazioni come la riformulazione della nozione di limite, si costruirà a partire da una famiglia di spazi di Banach $(X_i)_{i \in \Gamma}$ un nuovo spazio, detto ultraprodotto della famiglia, che ne riassume alcune proprietà. In particolare, mostreremo che l'ultraprodotto rispetto ad ultrafiltri σ-completi, dei quali viene discussa l'esistenza, preserva la stretta convessità e la proprietà (S) degli spazi di partenza.

Studieremo un percorso intrapreso nella ricerca dell'esempio di uno spazio dotato della proprietà di Steinhaus ma senza norme equivalenti strettamente convesse, che però non porta ad una risposta. L'esistenza di un tale esempio rimane tuttora un problema aperto.

Il lavoro è organizzato come segue. Nel primo capitolo viene introdotto il problema come è esposto nella raccolta di Steinhaus, ne viene data una soluzione elementare, e si mostra che anche la sua generalizzazione a spazi di Hilbert ha risposta positiva. Nel secondo capitolo si riformula (S) per mostrare i risultati di cui sopra, e si studiano le proprietà di convessità per alcuni spazi noti. Nel terzo capitolo si espone la riformulazione del concetto di limite mediante l'impiego dei filtri, e come con questo si possa costruire lo spazio ultraprodotto; studieremo le principali proprietà degli ultrafiltri κ-completi e dei cardinali misurabili, concentrandoci anche alle questioni legate alla loro esistenza; vedremo quindi che sia la stretta convessità sia la proprietà di Steinhaus sono ereditate dall'ultraprodotto di una famiglia di spazi di Banach rispetto ad un ultrafiltro κ-completo.

Capitolo 1

Problema di Steinhaus

1.1 Il problema nel piano euclideo

Nella sua raccolta di cento problemi elementari ([8]) H. Steinhaus propone di provare la proprietà del piano euclideo secondo cui per ogni numero naturale n esiste una circonferenza che circonda esattamente n punti del reticolo degli interi. Originariamente Steinhaus pose il quesito su Matematyka (**2** (46), 1957, problema 498), rivista polacca rivolta a professori di scuola secondaria. In questo contesto ci riferiremo comunque alla raccolta, dove il problema è preceduto da un altro che apre la strada per la prova qui proposta, in cui si suggerisce di cercare circonferenze con uno stesso dato centro. Per entrambe le soluzioni si usano argomenti di geometria analitica ed aritmetica di base.

Il numero tra parentesi indica la posizione del problema all'interno della raccolta dei cento problemi.

Problema 1 (no. 23)**.** *Dimostrare che una circonferenza avente centro in* $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ *può, con un'appropriata scelta del raggio, passare per un qualunque punto del reticolo, ma che non esistono circonferenze con questo centro che passino per due o più punti del reticolo.*

Soluzione. Tra le circonferenze concentriche di centro $C = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ se ne trova una passante per un qualunque punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{C\}$, e ciò vale in particolare per i punti del reticolo $\mathbb{Z}^2$.
Supponiamo ora che due punti $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ appartengano ad una stessa circonferenza di centro C. Avremmo:

$$\begin{aligned}
(a-\sqrt{2})^2 + (b-\sqrt{3})^2 &= (c-\sqrt{2})^2 + (d-\sqrt{3})^2 \\
a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 2(a-c)\sqrt{2} - 2(b-d)\sqrt{3} \\
\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 &= \left(2(a-c)\sqrt{2} - 2(b-d)\sqrt{3}\right)^2 \\
k &= -8(a-c)(b-d)\sqrt{6}
\end{aligned}$$

dove $k = \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - \left(2(a-c)\sqrt{2}\right)^2 - \left(2(b-d)\sqrt{3}\right)^2$ è un numero intero. Essendo $\sqrt{6}$ irrazionale, si deve avere $a - c = 0$ oppure $b - d =$

0. Assumendo una qualsiasi di queste, grazie alla seconda equazione delle precedenti ed al fatto che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono irrazionali, troviamo che è vera anche l'altra. Dunque i due punti (a,b), (c,d) coincidono. $\square$

Problema 2 (no. 24)**.** *Dimostrare che per ogni numero naturale n esistono cerchi che contengono al loro interno esattamente n punti del reticolo.*

Soluzione. Continuiamo a considerare le circonferenze di centro $C = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e per ogni $r \in \mathbb{R}_+$ indichiamo con $f(r)$ il numero di punti del reticolo interni al cerchio di centro C e raggio r. La funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, oltre ad essere nulla per piccoli valori di r, ha la proprietà di crescere con salti unitari al crescere di r: infatti per il risultato precedente punti del reticolo distinti hanno distanze distinte da C.

Allora per vedere che f è surgettiva è sufficiente mostrare che essa è illimitata. A questo scopo basta notare che per ogni naturale $n \geq 1$, scelti arbitrariamente n punti del reticolo $z_1, \ldots, z_n$ ed un numero reale $r_0 > \max_{i=1,\ldots,n} \|C - z_i\|$, il disco $B(C, r_0)$ contiene almeno gli n punti z_i: in altre parole $f(r_0) \geq n$. $\square$

Nel paragrafo successivo vedremo come sia possibile porsi domande analoghe in un contesto più generale, in cui il reticolo degli interi è rimpiazzato con un appropriato tipo di insieme che ne ricorda alcune proprietà.

1.2 Generalizzazione a spazi di Hilbert

In un suo articolo ([9], 2011), il matematico polacco Paweł Zwoleński dimostra un risultato che estende quello di H. Steinhaus nel piano, e che ha validità per un generico spazio di Hilbert sui campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ in cui si consideri, al posto del reticolo degli interi, un sottoinsieme *quasi finito* dello stesso spazio.

Definizione 1.2.1. Sia X uno spazio metrico. Un insieme $A \subset X$ si dice *quasi finito* se è numerabile e se per ogni palla aperta B di X, l'intersezione $A \cap B$ è finita.

Si osserva che $\mathbb{Z}^n$ è un sottoinsieme quasi finito dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, infatti ogni palla aperta è contenuta in un cubo del tipo $[-r, r]^n$, il quale contiene $(2\lfloor r \rfloor + 1)^n$ punti del reticolo.

Viene comodo introdurre una notazione per indicare ciò che chiameremo la *proprietà di Steinhaus* di uno spazio di Hilbert X, ma della quale ha senso parlare per un generico spazio metrico:

(S) Per ogni insieme quasi finito $A \subset X$ esiste un denso $Y \subset X$ tale che per ogni $y \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$ esiste una palla B centrata in y con $|A \cap B| = n$.

All'inizio del prossimo capitolo vedremo che per uno spazio di Banach la proprietà (S) equivale ad una condizione che coinvolge solamente la forma della sfera unitaria dello spazio. Faremo largo uso di tale equivalenza, sfruttandola per scoprire che per determinate classi di spazi di Banach il problema di Steinhaus ha risposta affermativa (come nel caso degli spazi strettamente convessi e degli spazi $L_p(\mu)$ dove $1 \leq p < \infty$ e μ è una misura senza atomi su un dato spazio misurabile) mentre per altre ha risposta negativa (come per lo spazio delle funzioni reali continue su uno spazio topologico compatto di Hausdorff con almeno due punti).

Il teorema di Zwoleński afferma che gli spazi di Hilbert, invece, non si distinguono al livello della proprietà di Steinhaus, in quanto ciascuno di loro risulta essere dotato della proprietà (S). In particolare si dimostra quanto segue:

Teorema 1.2.1 (Zwoleński)**.** *Sia A un sottoinsieme quasi finito di uno spazio di Hilbert X su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Allora l'insieme*

$$Y_A = \{y \in X : \forall n \in \mathbb{N}\, \exists r > 0 \ |A \cap B(y,r)| = n\}$$

è denso in X.

Dimostrazione. Iniziamo enumerando $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ e poniamo

$$A^i_j = \{x \in X : \|x - x_i\| = \|x - x_j\|\} \text{ per } i \neq j.$$

Facciamo vedere che A^i_j è chiuso ed ha parte interna vuota per ogni scelta di indici $i \neq j$. Fissiamo quindi due interi positivi distinti i, j, e consideriamo la funzione $\phi : X \to \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(x) = \|x - x_i\| - \|x - x_j\|.$$

Per la continuità della norma, anche ϕ è una funzione continua, e così si vede che $A^i_j = \phi^{-1}(\{0\})$ è chiuso in X.

Ora definiamo la mappa $\psi : X \to X$ e l'insieme B ponendo

$$\psi(x) = x + \frac{x_i + x_j}{2}$$

$$B = \{x \in X : \|x - w\| = \|x + w\|\}\,, \text{ dove } w = \frac{x_i - x_j}{2}.$$

Poiché $x \in A^i_j$ se e solo se $x - \frac{x_i + x_j}{2} \in B$, l'insieme A^i_j coincide con l'immagine mediante la traslazione ψ di B, e quindi per mostrare che A^i_j ha parte interna vuota basterà vederlo per B. Fissiamo un arbitrario elemento $x \in B$. Allora

$$\begin{aligned}
\langle x - w, x - w\rangle &= \langle x + w, x + w\rangle \\
\|x\|^2 - \langle x, w\rangle - \langle w, x\rangle + \|w\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, w\rangle + \langle w, x\rangle + \|w\|^2 \\
-\langle x, w\rangle &= \langle w, x\rangle = \overline{\langle x, w\rangle}
\end{aligned}$$

da cui:

$$2\Re\langle x, w\rangle = \overline{\langle x, w\rangle} + \langle x, w\rangle = 0.$$

Dalle uguaglianze precedenti si ha $B = \{x \in X : \Re\langle x, w\rangle = 0\}$, perciò B è un sottospazio lineare di X. Dunque se B contenesse un aperto avremmo $B = X$, da cui $w \in B$ e $\|w\| = 0$, assurdo.

Dal teorema della categoria di Baire segue che anche l'insieme $U = \bigcup_{i \neq j} A_j^i$ ha parte interna vuota. Allora il suo complementare $Y_A = X \setminus U$ è un sottoinsieme denso di X.

Mostriamo che Y_A è l'insieme cui siamo interessati. Fissiamo un intero non negativo n e $y \in Y_A$. Poiché $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(y, k)$ ed A è quasi finito, esiste un k_0 per cui $B(y, k_0)$ contiene almeno n punti di A, ma comunque un numero finito N di essi. Diciamo $A \cap B(y, k_0) = \{y_1, \dots, y_N\}$ ed indichiamo con d_i le distanze $\|y - y_i\|$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Per definizione di Y_A, le d_i sono tutte distinte, e senza perdita di generalità si può assumere che

$$d_0 := 0 < d_1 < \cdots < d_N < d_{N+1} := k_0.$$

Scegliendo un qualsiasi $r > 0$ tale che $d_n < r < d_{n+1}$, la palla aperta di centro y e raggio r contiene esattamente n punti di A. □

Avendo osservato che il reticolo $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme quasi finito dello spazio di Hilbert $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard, viene ora naturale vedere il risultato di Steinhaus nel piano come immediata conseguenza del teorema precedente:

Corollario 1.2.2 (Problema di Steinhaus). *Per ogni numero naturale n esistono cerchi nel piano euclideo che contengono al loro interno esattamente n punti del reticolo $\mathbb{Z}^2$. Anzi, vi è un denso D tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ i cerchi $B(y, r)$, con $y \in D$ e r opportunamente scelto in dipendenza da y e n, contengono esattamente n punti di $\mathbb{Z}^2$.*

Capitolo 2

Il problema per spazi di Banach

2.1 Una riformulazione della proprietà (S)

In questo paragrafo mostreremo una semplice caratterizzazione geometrica della proprietà di Steinhaus per uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|)$. Ricordiamo come si esprime la condizione (S) ed introduciamo la sua riformulazione qui di seguito:

(S) Per ogni insieme quasi finito $A \subset X$ esiste un denso $Y \subset X$ tale che per ogni $y \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$ esiste una palla B centrata in y con $|A \cap B| = n$.

(S') Per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, e ogni $\delta > 0$, esiste uno $z \in X$ con $\|z\| \leq \delta$ tale che uno tra i vettori $x + z, y + z$ ha norma maggiore di 1 mentre l'altro ha norma minore di 1.

La condizione (S') esprime il fatto che la sfera unitaria $S_X \subset X$ ha un aspetto localmente diverso in ciascuna coppia di punti diversi.

Teorema 2.1.1. *Per ogni spazio di Banach X le condizioni (S) e (S') sono equivalenti.*

Dimostrazione. (S) $\Rightarrow$ (S') : Assunta (S), fissiamo arbitrari $\delta > 0$ e $x, y \in X$ tali che $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Prendiamo un insieme quasi finito $A \subset X$ tale che $A \cap (1 + \delta)B_X = \{x, y\}$, dove $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ denota la palla chiusa unitaria di X. Un tale insieme A esiste, in quanto si può costruire partendo da un qualunque insieme quasi finito $A' \subset X$, privando poi A' dei punti con norma minore a $1 + \delta$ ed aggiungendo infine x e y: in simboli $A = (A' \setminus (1+\delta)B_X) \cup \{x, y\}$. Grazie all'ipotesi (S) si trova un $u \in X$ di norma $\|u\| \leq \delta/2$ e tale che per qualche $r > 0$ si abbia $|B(u, r) \cap A| = 1$; vediamo che questo unico elemento è uno tra x e y. Supponiamo per assurdo che un $a \in A \setminus \{x, y\}$ appartenga a $B(u, r)$. Avremmo

$$r > \|a - u\| \geq \|a\| - \|u\| > (1 + \delta) - \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2},$$

da cui

$$\|x - u\| \leq \|x\| + \|u\| \leq 1 + \frac{\delta}{2} < r$$

e quindi $x \in B(u, r)$, una contraddizione. Quindi $B(u, r)$ contiene esattamente uno tra i punti x e y, diciamo per fissare le idee $x \in B(u, r)$ e $y \notin B(u, r)$. In questa situazione:

$$1 - \frac{\delta}{2} < \|x - u\| < r \leq \|y - u\| < 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Analizziamo il caso $r \leq 1$, in cui si scrive $r = 1 - \epsilon$ con $\epsilon \in [0, \delta/2)$. Sia ora ρ un numero reale tale che

$$0 < \rho < \min\Big\{r - \|x - u\|,\ \frac{\delta}{2} - \epsilon\Big\}.$$

Mostriamo come trovare un $v \in X$ tale che

$$\|v\| \leq \epsilon + \rho, \quad \|y - (u + v)\| \geq r + \epsilon + \rho > 1. \tag{2.1}$$

Sulla semiretta uscente da u opposta a quella contenente y scegliamo un punto v_1 che disti $\epsilon + \rho$ da u, cosicché prendendo v definito da $v_1 = u + v$ si trova un punto che rispetta le relazioni desiderate.

Per la prima delle condizioni (2.1) si ha $\|(x - u) - v)\| < r - \rho + \|v\| \leq 1$ e $\|u + v\| < \delta/2 + \epsilon + \rho < \delta$, e allora posto $z = -(u + v)$ si conclude la dimostrazione della prima implicazione nel caso $0 < r \leq 1$. L'alternativa $r > 1$ si tratta in modo analogo.

(S') $\Rightarrow$ (S) : Sia $A \subset X$ un insieme quasi finito. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $G_n = \{x \in X : \exists r > 0\ |A \cap B(x, r)| = n\}$. Ciascuno dei G_n è aperto per la definizione di quasi finito: per punti vicini ad un $x \in G_n$ esiste una palla di raggio poco inferiore al raggio r relativo ad x e che interseca A negli stessi n punti di $A \cap B(x, r)$. Vediamo che G_n è anche denso in X.

Essendo $G_0 = X \setminus A$, si può assumere $n \geq 1$. Supponiamo per assurdo che esista una palla aperta $U = B(x_0, r_0) \subset X$ che non interseca G_n; inoltre, essendo A quasi finito, a meno di cambiare centro e restringere r_0 si può supporre che anche $A \cap U = \emptyset$. Per comodità di scrittura, denotiamo con U_t l'insieme U scalato di un fattore t, cioè $U_t = x_0 + t(U - x_0)$ è la palla di centro x_0 e raggio $r_0 t$. Detto $m = \max\{k \in \mathbb{N},\ k < n : \exists r > 1\ |A \cap U_r| = k\}$, e denotato r un numero reale maggiore di 1 per cui $|A \cap U_r| = m$, si trova che per ogni $s > r$ vale $|A \cap U_s| = m$ oppure $|A \cap U_s| > n$. Poniamo anche

$$s = \inf\big\{r > 1 : |A \cap U_r| > n\big\}.$$

A questo punto, esattamente m punti $a_1, \dots, a_m \in A$ sono all'interno di U_s, mentre almeno due punti di A sono sul suo bordo. Indichiamo i punti sul bordo con $b_1, \dots, b_k (k \geq 2)$. Scegliamo ora un $\delta > 0$ tale che per ogni $u \in X$ con $\|u\| < r_0 s \delta$ la palla $B(x_0 + u, s)$ continui a contenere i punti a_i ma che non abbia altri punti di A eccetto qualche b_j:

$$\{a_i : 1 \leq i \leq m\} \subseteq A \cap B(x_0 + u, s) \subseteq \{a_i, b_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k\}.$$

Ciascuno dei vettori $(b_j - x_0)/(r_0 s)$ giace sulla sfera unitaria, dunque per l'ipotesi (S') applicata a due di tali vettori (ad esempio per $j = 1, 2$) con il δ scelto sopra si trova uno $z \in X$ di norma $\|z\| < \delta$ tale che uno tra i vettori $b_1 - x_0 - r_0 sz$ e $b_2 - x_0 - r_0 sz$ ha norma minore di $r_0 s$ mentre l'altro ha norma maggiore di $r_0 s$. Pur di rimpicciolire δ si può supporre anche che $x_0 + r_0 sz \in U$, cosicché per quanto detto sopra $B(x_0 + r_0 sz, s)$ contiene gli a_i ed almeno uno ma non tutti i b_j poiché, vista la scelta di z, certamente contiene uno tra b_1 e b_2 ma non l'altro. La scelta di δ può essere fatta anche in modo che tutti i punti a_i siano più vicini a $x_0 + r_0 sz$ rispetto ai b_j. Allora ripetendo lo stesso procedimento un numero finito di volte, prima restringendo il raggio ad un $s_1 < s$ affinché $B(x_0 + r_0 sz, s_1)$ abbia sul bordo $k_1 < k$ punti tra i b_j ed al suo interno i soli a_i, poi cambiando eventualmente centro in U per abbassare ancora k_1, si trova che esiste uno $z_0 \in U$ tale che per un certo $r > 0$ vale

$$|B(z_0, r) \cap A| = m + 1.$$

Se $m + 1 = n$ troviamo l'assurdo $z_0 \in U \cap G_n$. Se $m + 1 < n$ ripartiamo da capo considerando una nuova palla $U' \subset U$ di centro z_0: il più grande intero $m' < n$ per cui $\exists r > 0$ $|A \cap U'_r|$ sarà $m' \geq m + 1$ e così via fino a trovare un punto di $U \cap G_n$ e dunque finalmente l'assurdo. Quindi ogni G_n è aperto e denso in X.

Per il teorema di Baire, l'insieme $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ è anch'esso denso in X e per la sua definizione è l'insieme cercato: per ogni naturale n, ogni punto $y \in Y$ è il centro di una palla B tale che $|A \cap B| = n$. Ciò completa la dimostrazione dell'equivalenza tra le due proprietà (S) e (S'). $\square$

Nel resto del capitolo verrà applicato il teorema precedente in situazioni concrete, sfruttando la formulazione (S') della proprietà di Steinhaus per decidere se certi spazi di Banach sono dotati di tale proprietà.

In particolare inizieremo estendendo il Teorema 1.2.1 di Zwoleński alla classe degli spazi di Banach strettamente convessi, di cui ciascuno spazio di Hilbert è un rappresentante. Cercheremo, facendo uso della nozione di funzionale di Minkowski, un esempio di spazio di Banach con la proprietà (S) ma non strettamente convesso.

2.2 Spazi di Banach strettamente convessi

In questo paragrafo sfrutteremo la caratterizzazione appena data per mostrare che il risultato di Zwoleński vale per una classe più grande di spazi di Banach.

Nel seguito indicheremo con B_X la palla chiusa unitaria di un dato spazio di Banach $(X, \|\cdot\|)$, cioè l'insieme $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$; il suo bordo $\partial B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ sarà indicato con S_X e la sua parte interna sarà $U_X = \{x : \|x\| < 1\}$. Inoltre con $\mathbb{K}$ intenderemo il campo dei numeri reali nel caso di uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$, o quello dei numeri complessi nel caso di uno spazio su $\mathbb{C}$.

Ricordiamo che in uno spazio vettoriale reale (e in particolare in uno spazio vettoriale complesso) si definisce *segmento* congiungente due punti distinti x, y come l'insieme $\overline{xy}$ dei vettori della forma $tx+(1-t)y$ per $0 \leq t \leq 1$; uno di tali vettori è *interno* al segmento qualora $0 < t < 1$. Riportiamo ora la solita definizione di insieme convesso in uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, introducendo anche la nozione di insieme strettamente convesso.

Definizione 2.2.1. Un sottoinsieme $D \subset X$ di uno spazio vettoriale reale X si dice *convesso* se, presi arbitrariamente due punti $x, y \in D$, esso contiene il segmento $\overline{xy}$. Un punto z di un insieme convesso D si dice *punto estremo* di D se z non è punto interno di alcun segmento contenuto in D. Un sottoinsieme $E \subset X$ si dice *strettamente convesso* se tutti i punti della sua frontiera ∂E sono punti estremi di E.

Due semplici esempi di insiemi convessi nel piano $\mathbb{C}$ sono la palla unitaria $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e l'insieme $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| + |\Im z| \leq 1\}$. Di questi, la palla B è anche strettamente convessa, mentre Q non lo è in quanto gli unici punti estremi del suo bordo sono $1, i, -1$ e $-i$.

Si può definire una nozione di stretta convessità per uno spazio di Banach X a partire dalle proprietà della sua palla unitaria.

Definizione 2.2.2. Uno spazio di Banach X si dice *strettamente convesso* se la sua palla unitaria è strettamente convessa, ossia se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in S_X$ il segmento $\overline{xy} \subset X$ congiungente x e y interseca S_X in due soli punti: $S_X \cap \overline{xy} = \{x, y\}$. Equivalentemente, si dice che X è strettamente convesso se la retta reale affine $L(x, y) = \{tx+(1-t)y : t \in \mathbb{R}\}$ interseca S_X nei soli x e y.

Osserviamo subito che se lo spazio X è strettamente convesso, tale è ogni suo sottospazio lineare $V \subset X$ (naturalmente dotato della struttura di Banach che eredita da X), in quanto tutti i calcoli di norme che si fanno in V valgono anche in X.

Riprendendo gli esempi precedenti si vede che $\ell_2^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach strettamente convesso, mentre $\ell_1^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ non lo è. Similmente a quanto visto per ℓ_1^2, i punti estremi della palla unitaria di ℓ_∞^2

sono solo i quattro punti $(\pm 1, \pm 1)$, e questo fa di ℓ^2_∞ un altro esempio di spazio di Banach non strettamente convesso.

La nozione di stretta convessità come è stata appena introdotta ha numerose versioni equivalenti, molte delle quali continuano a basarsi sull'aspetto della sfera unitaria S_X. Nel seguito di questo lavoro ci verrà pratico sfruttare una di queste riformulazioni:

Proposizione 2.2.1. *Per uno spazio di Banach X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è strettamente convesso;

(b) per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$, se $\|x+y\| = 2$, allora necessariamente $x = y$.

È naturale riferirsi alla condizione (b) dicendo che la norma di X è una applicazione strettamente convessa.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) : Se $x, y \in X$ sono due vettori con le proprietà $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$, allora il punto medio $u = (x+y)/2$ ha norma $\|u\| = 1$; perciò, se x e y fossero diversi, u dovrebbe essere contemporaneamente interno al segmento $\overline{xy}$ e punto estremo della palla unitaria, contro l'ipotesi di stretta convessità. Dunque $x = y$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Supponiamo per assurdo che esista uno $z_0 \in S_X$ che non è punto estremo per la palla unitaria: esiste un $t \in (0, 1)$ tale che

$$z_0 = tx_0 + (1-t)y_0 \quad \text{con } x_0, y_0 \in B_X,\ x_0 \neq y_0.$$

Dal fatto che $1 = \|z_0\| \leq t\|x_0\| + (1-t)\|y_0\| \leq t + (1-t) = 1$ si trova che anche $x_0, y_0 \in S_X$. Se avessimo $\|x_0+y_0\| < 2$, troveremmo la contraddizione

$$\begin{aligned} 1 = \|z_0\| = \|tz_0 + (1-t)z_0\| = \|t^2x_0 + t(1-t)(x_0+y_0) + (1-t)^2y_0\| < \\ < t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1. \end{aligned}$$

Allora $\|x_0 + y_0\| = 2$, contro l'ipotesi (b). Avendo raggiunto l'assurdo, è provata l'equivalenza tra le due condizioni. $\square$

Veniamo ora al risultato principale di questo paragrafo:

Teorema 2.2.2. *Ogni spazio di Banach strettamente convesso X gode della proprietà (S).*

Dimostrazione. Proviamo che X soddisfa (S'). Siano $\delta > 0$ e $x, y \in X$ con $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Poiché ogni punto interno al segmento $\overline{xy}$ ha norma minore di 1 ed ogni punto sulla retta $L(x, y)$ esterno al segmento ha norma maggiore di 1, basta prendere uno $z \in X$ tale che $0 < \|z\| < \delta$ e $x + z \in \overline{xy}$ per trovare verificata la condizione (S'). $\square$

L'osservazione che segue giustifica il fatto che il Teorema 2.2.2 per spazi strettamente convessi estende il Teorema 1.2.1 per spazi di Hilbert.

Osservazione 2.2.1. Ogni spazio di Hilbert è uno spazio di Banach strettamente convesso. Un modo di dedurre questo fatto utilizza la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: dati $x, y \in S_X$, supponiamo per assurdo che esista un punto $v \in S_X$ interno al segmento $\overline{xy}$ e scriviamo $v = t(y - x) + x$ per un certo $t \in (0, 1)$. Ma $\|v\| = 1$ se e solo se $\Re\langle x, y\rangle = 1$, e allora $x, y \in S_X$ devono essere opposti in quanto

$$1 \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| = 1.$$

Quindi $v = (1 - 2t)x$ con norma $1 = \|v\| = |1 - 2t| < 1$, una contraddizione.

La classe degli spazi di Banach che soddisfano la proprietà di Steinhaus, però, contiene propriamente la classe degli spazi strettamente convessi. Già in dimensione 3 si può costruire una norma $\|\cdot\|$ per cui $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ risulti uno spazio non strettamente convesso ma verificante la condizione (S); questo esempio verrà discusso in dettaglio in 2.2.1, e tale norma $\|\cdot\|$ viene prodotta facendo uso del cosiddetto *funzionale di Minkowski*, sul quale apriamo una breve parentesi.

Il funzionale di Minkowski

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, e denotiamo con $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}$ l'insieme delle parti C di X con le proprietà:

1. C è convesso;
2. C è limitato;
3. $0 \in \operatorname{int} C$.

Il *funzionale di Minkowski* è la mappa

$$p : \mathcal{C} \to [0, +\infty)^X$$

definita dalla formula

$$p_C(x) = (p(C))(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\right\} \qquad \forall C \in \mathcal{C},\ \forall x \in X.$$

Il teorema seguente elenca alcune caratteristiche delle mappe p_C e mostra che ogni fissato $C \in \mathcal{C}$ induce una norma $\|\cdot\|_C$ su X data dalla stessa $p(C)$ e definita in modo che l'insieme dei vettori unitari sia la frontiera di C:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_C : X & \to & [0, +\infty) \\ x & \mapsto & p_C(x) \\ S_{(X, \|\cdot\|_C)} & = & \partial C. \end{array}$$

Teorema 2.2.3. *Siano X uno spazio normato, $C \in \mathcal{C}$ con $r_1 B_X \subset C \subset r_2 B_X$ per certi $0 < r_1 < r_2$. Allora*

(a) $\mathrm{int}C \subset \{x \in X : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : p_C(x) \leq 1\} \subset \overline{C}$*;*

(b) $\frac{1}{r_2}\|x\| \leq p_C(x) \leq \frac{1}{r_1}\|x\|$ *per ogni* $x \in X$*;*

(c) $p_C(x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*

(d) $p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x)$ *per ogni* $\alpha \geq 0$ *e* $x \in X$*;*

(e) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ *per ogni* $x, y \in X$*;*

(f) p_C *è* $\frac{1}{r_2}$*-lipschitziano su X;*

(a') $\mathrm{int}C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$ *e* $\overline{C} = \{x \in X : p_C(x) \leq 1\}$.

2.2.1 Un primo controesempio

Esiste una norma $\| \cdot \|$ su $\mathbb{R}^3$ per cui lo spazio di Banach $X = (\mathbb{R}^3, \| \cdot \|)$ soddisfa la condizione (S) e contiene isometricamente $\ell^2_\infty = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$, e quindi non è strettamente convesso. Otterremo tale norma come funzionale di Minkowski p_B di un certo sottoinsieme convesso, limitato e simmetrico $B \subset \mathbb{R}$ del quale si descrive il bordo, cioè l'insieme dei vettori con norma unitaria.

Iniziamo ponendo sul piano xy il quadrato Q con vertici $(\pm 1, \pm 1, 0)$, che coincide con la porzione di B in tale piano. Allora discende dalla definizione di p_B che lo stesso sottospazio $\{z = 0\} \subset X$ è una copia di ℓ^2_∞. Dividiamo ora il quadrato nei quattro triangoli

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = \ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\} \cap Q, \\
\Delta_2 = \ & \{(x, y) : x \geq |y|\} \cap Q, \\
\Delta_3 = \ & \{(x, y) : y \leq -|x|\} \cap Q, \\
\Delta_4 = \ & \{(x, y) : x \leq -|y|\} \cap Q
\end{aligned}
$$

e descriviamo la parte di frontiera di B per $z > 0$ come unione di quattro superfici, ciascuna sopra un triangolo Δ_i:

- la superficie sopra Δ_1 sarà costituita da opportune curve congiungenti i punti $(x, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ per ogni $x \in [-1, 1]$ ognuna delle quali giace sul piano generato dagli estremi $(x, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Una scelta appropriata di tali curve ci assicurerà la proprietà (S);

- la superficie sopra Δ_2 è ottenuta simmetrizzando quella relativa a Δ_1 rispetto al piano $\{y = x\} \subset \mathbb{R}^3$;

- la parte di bordo di B sopra $\Delta_3 \cup \Delta_4$ si ottiene simmetrizzando la superficie costruita sopra $\Delta_1 \cup \Delta_2$ rispetto al piano $\{y = -x\} \subset \mathbb{R}^3$.

A questo punto si completa la frontiera di B nel semispazio $\{z < 0\}$ simmetrizzando rispetto all'origine ciò che è stato prodotto finora.

Passiamo quindi a descrivere le curve che congiungono i punti $(x, 1, 0) \in \Delta_1$ a $(0, 0, 1)$, le quali saranno fatte in modo che, se $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, la curva corrispondente a x_1 sia più piatta in $(x_1, 1, 0)$ di quanto quella corrispondente a x_2 sia piatta in $(x_2, 1, 0)$. Fissiamo un $x \in [-1, 1]$; la curva relativa ad x giace sul piano $\langle (x, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, in cui inizia da $(\sqrt{x^2 + 1}, 0)$ e termina in $(0, 1)$, avendo posto su tale piano le coordinate $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ e z. Definiamo tale curva con l'espressione

$$z_\alpha(t) = 1 - \left(\frac{t}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^\alpha \quad \text{per } 0 \leq t \leq \sqrt{x^2 + 1},$$

dove una scelta appropriata del parametro $\alpha = \alpha(x)$ produce l'effetto di appiattimento desiderato: per ogni $x \in [-1, 1]$ si calcola $z'_\alpha(\sqrt{x^2 + 1}) = -\alpha/\sqrt{x^2 + 1}$. Dunque una qualunque α della forma $\alpha(x) = \beta(x)\sqrt{x^2 + 1}$, con $\beta : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ positiva e strettamente crescente, ha la proprietà voluta. Inoltre chiediamo che $\beta > 1/\sqrt{x^2 + 1}$ per $-1 \leq x \leq 1$, così $z_\alpha(t)$ è strettamente concava. Abbiamo quindi trovato la superficie che costituisce il bordo di B sopra il triangolo Δ_1:

$$z(x, y) = 1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 1} \right)^{\alpha(x)/2} \quad \text{per } (x, y) \in \Delta_1.$$

Per le figure qui riportate è stata fatta la scelta $\beta(x) = \sqrt{x + 1} + 1$. Esse sono state realizzate mediante le funzioni *meshgrid* e *mesh* di Octave, incontrate nel Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale del secondo anno.

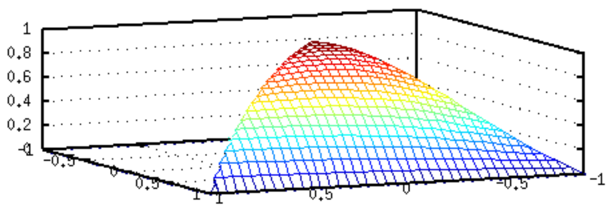

Figura 2.1: La porzione del bordo di B sopra Δ_1.

Con il procedimento di simmetrie descritto sopra si ottiene un insieme convesso e limitato al cui interno si trova $0 \in \mathbb{R}^3$.

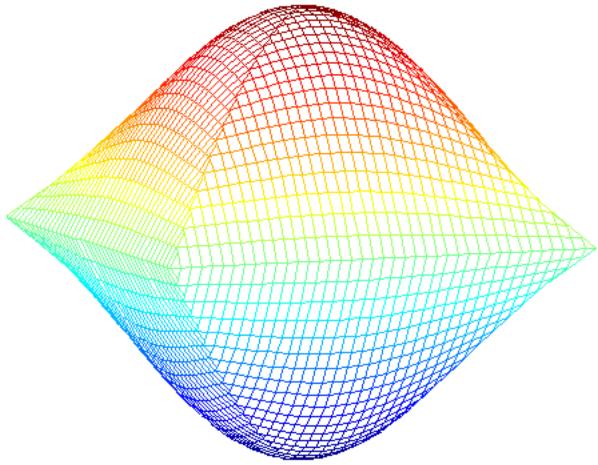

Figura 2.2: L'insieme B costruito col procedimento di simmetrie descritto.

Come annunciato, sia $\| \cdot \| = p(B)$ il funzionale di Minkowski di B. Andiamo ora a mostrare che X verifica la proprietà (S'). Siano dati $\delta > 0$ e due punti distinti con norma unitaria $u, v \in \partial B$. Poichè la scelta di $\alpha(x)$ rende $z(x, y)$ una funzione strettamente concava, ci si può ridurre al caso in cui u e v giacciano su uno stesso lato del quadrato Q, in quanto il solito argomento di convessità (come nella dimostrazione del Teorema 2.2.2) risolve tutte le altre configurazioni. Allora senza perdita di generalità prendiamo $u_1, u_2 \in [-1, 1] \times \{1\} \times \{0\}$, in particolare scriviamo $u = (x_1, 1, 0)$ e $v = (x_2, 1, 0)$ con $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Per ogni $x \in [-1, 1]$ indichiamo con $\xi(x)$ il vettore unitario tangente nel punto $(x, 1, 0)$ alla curva corrispondente ad x (che congiunge $(x, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$). Per costruzione, l'angolo tra $\xi(x_1)$ e $\{z = 0\}$ è minore dell'angolo tra $\xi(x_2)$ e lo stesso piano $\{z = 0\}$. Scelto $\epsilon < \delta$, prendiamo uno z di norma ϵ vicino a $\epsilon\xi(x_2)$ in modo che $u_2 + z$ vada dentro B, e quindi per la proprietà di pendenza realizzata, a meno di ridurre la norma di z si ha anche che $u_1 + z$ cade fuori da B, e ciò conclude in nostro esempio.

Osservazione 2.2.2. Questo esempio mostra anche che non possiamo rafforzare la condizione (S') affermando a quale tra i due vettori $x, y \in S_X$ viene aumentata la norma sommando z, ed a quale viene diminuita. Infatti, nel caso specifico, per qualche $\delta > 0$ è impossibile trovare uno z con $\|z\| < \delta$ tale che $\|u_1 + z\| < 1$ e $\|u_2 + z\| > 1$. Per convincersene basta tenere presenti le proprietà di simmetria di B.

2.3 Spazi $\ell_p(I)$ e $c_0(I)$

Sia I un insieme di indici infinito. Per $p \in [1, \infty]$, si denota con $\ell_p(I)$ l'insieme delle funzioni reali x su I con norma $\|x\|_p < \infty$. Si indica con $c_0(I)$ il sottospazio di $\ell_\infty(I)$ costituito dalle funzioni infinitesime all'infinito, cioè

$$c_0(I) = \{x \in \ell_\infty(I) : \forall \epsilon > 0 \ |\{i \in I : |x(i)| > \epsilon\}| < \aleph_0\}.$$

In questo paragrafo analizzeremo alcune proprietà di convessità di questi spazi.

Iniziamo con una risposta negativa: se $|I| > \aleph_0$, allora $\ell_\infty(I)$ non è strettamente convesso. Più precisamente:

Teorema 2.3.1. *Sia I un insieme infinito non numerabile. Allora nessuno spazio di Banach strettamente convesso è isomorfo allo spazio $m_0(I)$ costituito da tutte le funzioni reali limitate su I che sono nulle eccetto che su una parte numerabile di I, dotato della norma $\|x\| = \sup_{i \in I} |x(i)|$.*

In particolare, lo stesso vale per $\ell_\infty(I)$, essendo $m_0(I)$ un suo sottospazio.

Dimostrazione. Sia S la sfera unitaria di $(m_0(I), \|\cdot\|)$. Per ogni $x \in S$, denotiamo con F_x l'insieme

$$F_x = \{y \in S : \ \forall i \in I \ \big(x(i) \neq 0 \Rightarrow x(i) = y(i)\big)\}.$$

In altre parole, gli elementi $y \in F_x$ sono quelle funzioni identiche ad x su $\{x \neq 0\}$ e che su un numerabile $A \subset \{x = 0\}$ assumono valori di modulo in $(0, 1]$. Si osserva che, poiché I è non numerabile, per ogni $x \in S$ esistono almeno $|I|$ punti distinti di F_x.

Sia $|\cdot|$ una norma equivalente all'usuale norma $\|\cdot\|$ su $m_0(I)$, e scaliamo la nuova norma $|\cdot|$ in modo che si abbia $\|x\| \leq |x| \leq k\|x\|$ per ogni $x \in m_0(I)$, dove $k = \sup_{x \neq 0} |x|/\|x\|$. Per $x \in S$, poniamo inoltre

$$M_x = \sup\{|y| : y \in F_x\} \quad \text{e} \quad m_x = \inf\{|y| : y \in F_x\};$$

si nota che vale in particolare $1 \leq m_x \leq M_x \leq k$ per ogni $x \in S$.

Iniziamo provando che per ogni $x \in S$ vale

$$M_x + m_x \geq 2|x|. \tag{2.2}$$

Prendiamo $\epsilon > 0$ e $y \in F_x$ tale che $|y| < m_x + \epsilon$. Allora, notando che $x - (y - x) = (2x - y)\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} + (2x - y)\mathbf{1}_{\{x = 0\}} = x\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} - y\mathbf{1}_{\{x = 0\}}$, si verifica $\|x \pm (y - x)\| = 1$ e quindi anche $x - (y - x) \in F_x$. Allora

$$2|x| = |y + x - (y - x)| \leq |y| + |x - (y - x)| < (m_x + \epsilon) + M_x,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϵ, si ottiene la (2.2).

Prendiamo $x_1 \in S$ tale che $|x_1| \geq (3k+1)/4$. Per la (2.2) si ha dunque $m_{x_1} \geq (3k+1)/2 - k = (k+1)/2$, e quindi

$$M_{x_1} - m_{x_1} \leq (k-1)/2.$$

Sia ora $x_2 \in F_{x_1}$ tale che $|x_2| \geq (3M_{x_1}+|x_1|)/4$. Allora $m_{x_2} \geq (M_{x_1}+|x_1|)/2$ e

$$M_{x_2} - m_{x_2} \leq (M_{x_1} - |x_1|)/2 \leq (M_{x_1} - m_{x_1})/2 \leq (k-1)/2^2.$$

Procedendo induttivamente si ottiene una successione $(x_n)_{n\geq 1}$ di punti di S tale che $x_{n+1} \in F_{x_n}$ e $M_{x_n} - m_{x_n} \leq (k-1)/2^n$ per ogni $n \geq 1$. Allora le successioni $(M_{x_n})_{n\geq 1}$ e $(m_{x_n})_{n\geq 1}$ hanno lo stesso limite λ. Inoltre, se $y \in \bigcap_n F_{x_n}$, allora $m_{x_n} \leq |y| \leq M_{x_n}$ per ogni n, che al limite dà $|y| = \lambda$.

Definiamo ora l'elemento $x \in m_0(I)$ ponendo

$$x(i) = \begin{cases} x_n(i) & \text{se } A = \{n \in \mathbb{N} : x_n(i) \neq 0\} \neq \emptyset \text{ e } n = \min A, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Allora $F_x = \bigcap_n F_{x_n}$, e dunque $|y| = |x| = \lambda$ per ogni $y \in F_x$. Quindi per concludere la dimostrazione basta notare che ogni segmento $\{ty_1+(1-t)y_2 : t \in (0,1)\}$ tra due punti distinti $y_1, y_2 \in F_x$ è interamente contenuto in F_x, cosicché la sfera $\{z \in m_0(I) : |z| = \lambda\}$ non può essere strettamente convessa. □

La ricerca di uno spazio dotato di (S) ma senza norme equivalenti strettamente convesse studia il caso dello spazio $\ell_\infty(I)$ per I non numerabile. Su di esso si cercano norme equivalenti a $\|\cdot\|_\infty$ che lo facciano godere della proprietà di Steinhaus, ma neanche questa strada ha portato finora a risposte definitive.

I seguenti risultati positivi per $\ell_p(I)$ e $c_0(I)$, con $1 < p < \infty$, ci permettono di concludere che anche essi godono della proprietà (S). Una prova simile alla seguente mostra che per $p \in (1,\infty)$ anche gli spazi di funzioni integrabili $L_p(\mu)$ sono strettamente convessi, e quindi hanno (S). Il caso $p = 1$ verrà discusso in parte nel prossimo paragrafo.

Teorema 2.3.2. *Siano I un insieme infinito e $1 < p < \infty$. Allora lo spazio di Banach $\ell_p(I)$ è strettamente convesso.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \ell_p(I)$ due funzioni distinte di norma unitaria. Dato un qualsiasi $t \in (0,1)$ si ha

$$\|tx + (1-t)y\|^p = \textstyle\sum_{i\in I}|tx_i + (1-t)y_i|^p.$$

Per la stretta convessità della funzione $t \mapsto t^p$, per ogni $i \in I$ vale $|tx_i + (1-t)y_i| < t|x_i| + (1-t)y_i$ a meno che non sia $x_i = y_i$. Essendo $x \neq y$, vale dunque la disuguaglianza stretta

$$\textstyle\sum_{i\in I}|tx_i + (1-t)y_i|^p < t\sum_{i\in I}|x_i|^p + (1-t)\sum_{i\in I}|y_i|^p = 1.$$

□

Teorema 2.3.3. *Sia I un insieme infinito. Allora sullo spazio $c_0(I)$ esiste una norma equivalente strettamente convessa.*

Dimostrazione. Mostriamo che esiste su $c_0(I)$ una funzione p positiva, omogenea, subadditiva e tale che $p \leq \|\cdot\|$, per cui la norma $|\cdot| = \|\cdot\| + p(\cdot)$, oltre a rispettare

$$\|\cdot\| \leq |\cdot| \leq 2\|\cdot\|,$$

risulta essere strettamente convessa.

Dato $x = x_1 \in c_0(I)$, sia $E_1 = \{i \in I : |x_1(i)| = \|x_1\|\}$ e definiamo l'elemento x_2 ponendo

$$x_2(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in E_1, \\ x_1(i) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Continuando per induzione, si costruisce una successione $(x_n)_{n\geq 1}$ di punti di $c_0(I)$ e una successione di insiemi di indici

$$E_n = \{i \in I : |x_n(i)| = \|x_n\|\}\,.$$

In altre parole, la successione (x_n) è costruita partendo da x ed azzerando ad ogni passo le componenti di modulo massimo. Poiché ogni E_n è finito, si enumera $E = \bigcup_n E_n = \{i_j : j \geq 1\}$ in modo da avere $|x(i_{j+1})| \leq |x(i_j)|$ per ogni j. Così, se $i_j \in E_n$ e $i_k \in E_{n+1}$, allora $j < k$. Inoltre si ha $x(i) = 0$ se $i \notin E$. Consideriamo la mappa

$$\begin{array}{rcl} D : c_0(I) & \to & \ell_2(I) \\ x & \mapsto & Dx \end{array}$$

definita da

$$Dx(i) = \begin{cases} \frac{x(i_j)}{2^j} & \text{se } i = i_j \in E \\ 0 & \text{se } i \notin E \end{cases} \qquad \text{per ogni } i \in I.$$

La mappa p che stiamo cercando è data da $p(x) = \|Dx\|_2$ per ogni $x \in c_0(I)$. Essa ha le proprietà descritte sopra, infatti:

- p è positiva;
- $p(ax) = |a|p(x)$ poiché D è omogenea;
- $p(x)^2 = \sum_{j\geq 1} \big(\frac{x(i_j)}{2^j}\big)^2 \leq \|x\|^2 \sum_{j\geq 1} 2^{-2j} \leq \|x\|^2$;
- p è subadditiva. Per mostrarlo, siano $x, y \in c_0(I)$ e sia $(i_j)_j$ una successione su cui $x + y$ assume tutti i valori non nulli, così che

$$p(x+y) = \Big(\sum_j \big(\tfrac{x(i_j)+y(i_j)}{2^j}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_j \big(\tfrac{x(i_j)}{2^j}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_j \big(\tfrac{y(i_j)}{2^j}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

dove è stata usata la disuguaglianza triangolare. Basta quindi provare la relazione

$$p(x) \geq \Big(\sum_j \big(\tfrac{x(i_j)}{2^j}\big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Sia $(r_k)_k$ una successione su cui x assume tutti i valori non nulli e tale che per $k_1 < k_2$ si abbia $|x(k_1)| \geq |x(k_2)|$. Poniamo per alleggerire la scrittura $a_j = x(i_j)$ e $b_k = x(r_k)$. La disuguaglianza da provare si riduce alla forma

$$\textstyle\sum_j (a_j/2^j)^2 \leq \sum_k (b_k/2^k)^2.$$

Si osserva che certe permutazioni degli a_j aumentano il membro di sinistra: infatti se $m < n$ e $|a_m| < |a_n|$, allora

$$\frac{a_m^2}{2^{2m}} + \frac{a_n^2}{2^{2n}} < \frac{a_n^2}{2^{2m}} + \frac{a_m^2}{2^{2n}}.$$

Quindi se si permutano gli a_j in modo che la nuova successione c_h sia non crescente, otteniamo

$$\textstyle\sum_j (a_j/2^j)^2 \leq \sum_h (c_h/2^h)^2$$

dove l'uguaglianza ha luogo se $(a_j)_j$ è già non crescente. A questo punto, poiché i c_h diversi da zero compaiono tra i b_k, si ha che $c_n \leq b_n$, dunque vale la relazione desiderata.

Posto $|x| = \|x\| + p(x)$ per ogni $x \in c_0(I)$, rimane da vedere che $|\cdot|$ è strettamente convessa. Supponiamo che $|x| = |y| = 1$ e $|x + y| = |x| + |y|$; quindi

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \text{e} \quad p(x + y) = p(x) + p(y). \tag{2.3}$$

Viste le condizioni di uguaglianza nella disuguaglianza di Minkowski, se (i_j) è una successione adeguata per $x+y$, allora $x(i_j) = y(i_j)$ per ogni j. Inoltre se (i_j) non fosse adeguata per x, allora $p(x) > \big(\sum_j [x(i_j)/2^j]^2 \big)^{1/2}$ ed una relazione analoga varrebbe per y, violando la seconda delle (2.3). Dunque $x(i) = y(i) = 0$ se i non è della forma $i = i_j$, e allora x e y coincidono. □

2.4 Spazi L_p

In questo paragrafo troviamo un'altra classe di spazi di Banach che godono della proprietà di Steinhaus; si tratta degli spazi $L_p(\mu)$ delle funzioni reali a p-esima potenza sommabile rispetto ad una misura *senza atomi* μ. Anche in questo caso risulterà comoda l'equivalenza per spazi di Banach tra le proprietà (S) e (S').

Definizione 2.4.1. Una misura μ sullo spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice *senza atomi* (o *non-atomica*) se ogni insieme misurabile A con misura strettamente positiva contiene un misurabile $B \subset A$ tale che $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Ricordiamo anche le definizioni di misura semi-finita e degenere:

Definizione 2.4.2. Una misura μ sullo spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice *semi-finita* se ogni insieme misurabile A con misura infinita contiene un misurabile $B \subset A$ tale che $0 < \mu(B) < \infty$.

Invece, μ si dice *degenere* se $\mu(\mathcal{E}) \subseteq \{0, \mu(E)\}$.

Per il risultato di nostro interesse fanno comodo alcuni fatti preliminari: il teorema di decomposizione di N. Y. Luther per una generica misura ed una notevole proprietà delle misure finite non-atomiche, dovuta a W. Sierpiński, della quale sarà fornita la dimostrazione di G. Letta e M. Pratelli (incontrata nel corso di Probabilità, [7]). A differenza delle prove più comuni, questa non richiede l'impiego dell'assioma di scelta.

Del teorema di decomposizione daremo una versione meno precisa dell'originale, ma sufficiente ai nostri scopi. La prova mancherà delle verifiche, segnalando solo il percorso da seguire. Si rimanda a [6] per una trattazione completa del teorema.

Lemma 2.4.1 (Teorema di Luther)**.** *Ogni misura μ su uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si può scrivere come somma di due misure μ_1, μ_2 su $(E, \mathcal{E})$*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

dove μ_1 è semi-finita e μ_2 è degenere.

Dimostrazione. Per ogni misurabile F, definiamo la misura

$$\mu_F(A) = \mu(A \cap F) \quad \text{per } A \in \mathcal{E}.$$

Sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei misurabili su cui μ è σ-finita. Allora la misura

$$\mu_1 = \sup\{\mu_M : M \in \mathcal{M}\}$$

gode delle proprietà:

- $\mu_1(A) = \sup\{\mu(M) : M \subset A, M \in \mathcal{M}\}$ per ogni misurabile A;
- $\mu_1 = \mu$ su $\mathcal{M}$;
- per ogni misurabile A esiste $M \in \mathcal{M}$ tale che $M \subset A$ e $\mu_1(A) = \mu(M)$;
- μ_1 è semi-finita su $(E, \mathcal{E})$.

Siano ora $\mathcal{N}$ l'insieme dei μ_1-trascurabili e

$$\mu_2 = \sup\{\mu_N : N \in \mathcal{N}\}.$$

Allora la misura μ_2 gode delle proprietà:

- $\mu_2(A) = \sup\{\mu(N) : N \subset A, N \in \mathcal{N}\}$;

- $\mu_2 = \mu$ su $\mathcal{N}$;

- per ogni misurabile A esiste $N \in \mathcal{N}$ tale che $N \subset A$ e $\mu_2(A) = \mu(N)$;

- μ_2 è degenere su $(E, \mathcal{E})$;

- $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

□

Lemma 2.4.2 (Teorema di Sierpiński)**.** *Sia $(E, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura senza atomi e $F \in \mathcal{E}$ di misura finita. Allora per ogni reale α tale che $0 \leq \alpha \leq \mu(F)$ esiste un misurabile $H \in \mathcal{E}$ con $H \subset F$ e $\mu(H) = \alpha$.*

Dimostrazione. Siano $(E, \mathcal{E}, \mu)$ e F come nell'enunciato, e denotiamo con $\mathcal{F}$ la tribù traccia di $\mathcal{E}$ su F, ossia $\mathcal{F} = \{A \cap F : A \in \mathcal{E}\}$. Supponiamo senza ledere la generalità che $\mu(F) = 1$ e sia $\mathbf{P} = \mu|_{\mathcal{F}}$. È sufficiente mostrare che nello spazio di probabilità senza atomi $(F, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, assegnato un qualunque $\alpha \in (0, 1)$, esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbf{P}(A) = \alpha$.

Anzitutto si osserva che dato un $\epsilon > 0$ esiste $B \in \mathcal{F}$ tale che $0 < \mathbf{P}(B) < \epsilon$. Questo è vero grazie al fatto che lo spazio è privo di atomi: preso un $n > 1/\epsilon$ si può costruire una partizione di F fatta da n eventi $A_1, \ldots, A_n$ di probabilità strettamente positiva, ed uno di questi dovrà avere probabilità minore di $1/n < \epsilon$. Analogamente si vede che dati $B \in \mathcal{F}$ non trascurabile ed $\epsilon > 0$ esiste un $\mathcal{F}$-misurabile $A \subseteq B$ tale che $0 < \mathbf{P}(A) < \epsilon$.

Siano ora $A_0 = \emptyset$ e

$$\mathcal{H}_0 = \{B \in \mathcal{F} : \mathbf{P}(B) \leq \alpha\}$$

e definiamo per ricorsione le successioni $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di parti di $\mathcal{F}$ e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi misurabili ponendo $\mathcal{H}_n = \{B \in \mathcal{F} : B \supseteq A_{n-1} \text{ e } \mathbf{P}(B) \leq \alpha\}$ e scegliendo, grazie a quanto appena detto, un elemento $A_n \in \mathcal{H}_n$ tale che si abbia

$$\mathbf{P}(A_n) \geq \sup\big\{\mathbf{P}(B) : B \in \mathcal{H}_n\big\} - \frac{1}{n}.$$

Abbiamo dunque determinato una successione crescente $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ di elementi di $\mathcal{H}_0$. Denotiamo $A = \bigcup_n A_n$ il quale è un elemento di $\mathcal{H}_0$ (cioè $\mathbf{P}(A) \leq \alpha$) in quanto $\mathbf{P}(A) = \lim_n \mathbf{P}(A_n)$.

Vediamo che vale proprio l'uguaglianza $\mathbf{P}(A) = \alpha$. Se $\beta = \alpha - \mathbf{P}(A)$ fosse strettamente positivo, per quanto detto inizialmente potremmo trovare $C \subseteq A^c$ con $0 < \mathbf{P}(C) < \beta$, perciò $A \cup C \in \mathcal{H}_0$ e $\mathbf{P}(A \cup C) > \mathbf{P}(A)$. Ma questo è assurdo, essendo A massimale in $\mathcal{H}_0$ (nel senso che se un $B \in \mathcal{H}_0$ lo contiene, allora A e B sono equiprobabili): infatti un $B \in \mathcal{H}_0$ appartiene ad ogni $\mathcal{H}_n$, e allora $\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A_n) + 1/n$, che al limite dà $\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A)$. □

Veniamo adesso al risultato principale di questo paragrafo. Il teorema seguente, oltre ad evidenziare un'altra classe di spazi con la proprietà di Steinhaus, può produrre un ulteriore esempio di spazio di Banach non strettamente convesso ma comunque dotato di (S).

Teorema 2.4.3. *Per ogni spazio misurato* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *con* μ *misura senza atomi, e per ogni* $1 \leq p < \infty$*, lo spazio* $L_p(\mu)$ *verifica la condizione (S).*

Dimostrazione. Iniziamo decomponendo, grazie al Teorema di Luther, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ dove μ_1 è semi-finita e μ_2 degenere. Per ogni $f \in L_p(\mu)$ si ha $\mu_2\{x : f(x) \neq 0\} = 0$, perciò la mappa identità $\iota : L_p(\mu) \to L_p(\mu_1)$ è una isometria; possiamo allora ridurci a pensare che la stessa μ sia semi-finita.

Vediamo che vale (S'). Fissiamo $f, g \in L_p(\mu)$, $f \neq g$ e $\|f\| = \|g\| = 1$, e sia $\delta > 0$. A meno di scambiare f e g, esiste $F \in \mathcal{E}$ di misura $0 < \mu(F) < \infty$ tale che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in F$: potendo scrivere

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in F : f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\},$$

si può in aggiunta prendere F di misura non nulla e tale che $F = \{f > g + \epsilon\}$ per un certo $\epsilon > 0$. Inoltre approssimiamo f e g con costanti su un misurabile $F' \subset F$ a misura non nulla: possiamo trovare $c_f, c_g \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x) - c_f| < \frac{\epsilon}{5} \text{ e } |g(x) - c_g| < \frac{\epsilon}{5} \quad \text{per } x \in F'.$$

Denotiamo $m_f = \inf f(F')$ e $M_g = \sup g(F')$. Dalle diseguaglianze precedenti, poiché anche $f > g + \epsilon$ su F', si ha $c_f > c_g + 3\epsilon/5$ e $m_f > M_g + \epsilon/5$. Si hanno tre possibilità:

(i) $m_f > 0$ e $M_g \geq 0$;

(ii) $m_f > 0$ e $M_g < 0$;

(iii) $m_f \leq 0$ e $M_g < 0$, analogo a (i).

Supponiamo di trovarci allora in uno dei due casi (i) o (ii). Esiste un reale positivo d tale che $|m_f - d| < m_f$ e $|M_g - d| > |M_g|$, infatti nel caso (i) si prende un $d \in (2M_g, 2m_f)$ e nel caso (ii) ciò è vero con $d = m_f$. Mostriamo che

$$|f(x) - d| < |f(x)| \text{ e } |g(x) - d| < |g(x)| \quad \text{per } x \in F'. \tag{2.4}$$

La prima delle disuguaglianze precedenti è ovvia nel caso $f(x) \geq d > 0$, mentre se $f(x) < d$ si ha

$$|f(x) - d| = d - f(x) \leq d - m_f \leq |d - m_f| < m_f \leq |f(x)|.$$

La seconda disuguaglianza è ovvia se $g(x) < 0$. Inoltre

$$|M_g - d| > |M_g| \Rightarrow M_g < d \Rightarrow g(x) < d,$$

dunque anche nel caso $g(x) \geq 0$ si trova la relazione voluta:

$$|g(x) - d| = d - g(x) \geq d - M_g = |d - M_g| > |M_g| \geq g(x) = |g(x)|.$$

Per il Lemma 2.4.2 esiste un insieme misurabile $H \subset F'$ di misura $0 < \mu(H) < \delta/d$, e quindi $\|(-d)\mathbf{1}_H\| < \delta$ (dove $\mathbf{1}_H$ denota la funzione indicatrice dell'insieme H). Infine per le diseguaglianze (2.4) si ha

$$\|f - d\mathbf{1}_H\|^p = \int |f - d\mathbf{1}_H|^p \, d\mu = \int_{E \setminus H} |f|^p \, d\mu + \int_H |f - d|^p \, d\mu <$$
$$< \int_{E \setminus H} |f|^p \, d\mu + \int_H |f|^p \, d\mu = \|f\|^p = 1$$

e analogamente $\|g - d\mathbf{1}_H\| > 1$. Questo conclude la prova di (S'). □

Nel caso $p = 1$, sia λ la misura (non-atomica) di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Prendiamo le due funzioni a gradino

$$f = 2\,\mathbf{1}_{(0,1/2)} \quad \text{e} \quad g = 2\,\mathbf{1}_{[1/2,1)}.$$

Le funzioni f e g hanno entrambe norma $\|f\| = \|g\| = 1$ e la loro somma $f + g = 2\,\mathbf{1}_{(0,1)}$ ha norma $\|f + g\| = 2$. Ma allora ricordando la caratterizzazione data da 2.2.1, poiché ovviamente $f \neq g$, si scopre che $L_1(\lambda)$ non è strettamente convesso. Il teorema precedente quindi ci indica un secondo esempio di spazio di Banach con (S) ma non strettamente convesso.

2.5 Spazi $C(K)$

Un'altra comune classe di spazi di Banach, solitamente presentata tra i primi esempi di tali spazi, è quella costituita dagli spazi $C(K)$ delle funzioni continue a valori scalari definite su uno spazio topologico compatto di Hausdorff K, ciascuno di essi munito della norma uniforme

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\} = \max\{|f(x)| : x \in K\}.$$

È dunque lecito domandarsi se, dato un compatto di Hausdorff K, lo spazio $C(K)$ abbia la proprietà di Steinhaus. Cominciamo analizzando il caso in cui K consista di un solo punto $K = \{a\}$: in questo caso $(C(K), \|\cdot\|_K)$ è isometrico a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ (ad esempio mediante la valutazione in a), quindi la risposta è affermativa.

Nel caso in cui K abbia più di due elementi, al contrario, lo spazio $C(K)$ non gode di (S). Prima di provarlo è opportuno richiamare un risultato fondamentale di topologia generale. Si ricorda che uno spazio topologico viene detto *normale* se è di Hausdorff e se chiusi disgiunti hanno intorni disgiunti; ogni spazio compatto di Hausdorff è normale.

Lemma 2.5.1 (Urysohn)**.** *Siano dati due chiusi disgiunti* F_0, F_1 *di uno spazio normale* X*. Allora esiste una funzione continua* $\varphi : X \to [0,1]$ *che coincide con la costante* 0 *su* F_0 *e con la costante* 1 *su* F_1*.*

Teorema 2.5.2. *Se* K *è uno spazio topologico compatto di Hausdorff con almeno due elementi, allora* $C(K)$ *non verifica (S).*

Dimostrazione. Prendiamo due punti distinti $u, v \in K$, e siano U, V due loro intorni aperti disgiunti. Per il Lemma di Urysohn esiste una mappa continua $\varphi : K \to [0,1]$ tale che $\varphi(u) = 1$ e $\varphi|_{K\setminus U} = 0$. Ma anche $K \setminus U$ è normale, e quindi esiste una mappa continua $\psi : K \setminus U \to [0, 1/2]$ tale che $\psi(v) = 1/2$ e $\psi|_{K\setminus(U\cup V)} = 0$. La funzione $f : K \to [0,1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in U, \\ \psi(x) & \text{se } x \in K \setminus U \end{cases}$$

è anch'essa continua, inoltre $\varphi \neq f$ (ad esempio differiscono i loro valori nel punto v) e $\|\varphi\|_K = \|f\|_K = 1$. D'altronde per tutti i $\delta \in (0, 1/2)$ la condizione (S') è violata in quanto la norma di f ha lo stesso comportamento di φ quando gli viene sommato uno z con $\|z\|_K \in (0, 1/2)$. □

Capitolo 3

Cardinali misurabili, ultraprodotti e proprietà (S)

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto gli spazi di Banach strettamente convessi ed abbiamo visto che ciascuno di essi è dotato della proprietà di Steinhaus. In questo capitolo si vuole mostrare come costruire, a partire da una famiglia infinita $(X_i, \|\cdot\|_i)_{i\in\Gamma}$ di spazi di Banach, uno nuovo spazio che ne riassume alcune proprietà in dipendenza da un fissato *ultrafiltro* sull'insieme degli indici Γ. Vedremo che nel caso dei particolari ultrafiltri σ-completi, la cui esistenza è assunta indipendente dalla Teoria degli Insiemi da gran parte dei matematici del settore, la suddetta costruzione preserva la proprietà (S) e la stretta convessità.

3.1 Filtri ed ultrafiltri

Nel seguito di questo paragrafo, salvo avviso contrario, indicheremo con E un fissato insieme non vuoto.

Definizione 3.1.1. Una *base di filtro* su E è un insieme non vuoto $\mathcal{B}$ di parti non vuote di E tale che l'intersezione di una coppia di suoi elementi contenga un elemento di $\mathcal{B}$. Si nota che una base di filtro $\mathcal{B}$ ha la proprietà dell'intersezione finita (*fip*), nel senso che l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$ è sempre non vuota.

Se E è uno spazio topologico, un semplice esempio di base di filtro è dato da un sistema fondamentale di intorni di un fissato punto $x \in E$.

Definizione 3.1.2. Un *filtro* su E è un insieme non vuoto $\mathcal{F}$ di parti non vuote di E che sia antiereditario e stabile per intersezione finita. Generalmente, per non ridurre un filtro al caso banale $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$, si chiede anche che $\mathcal{F}$ non contenga l'insieme vuoto. In altre parole, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ è un filtro su E se valgono le condizioni:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $E \in \mathcal{F}$;
- per ogni $B \in \mathcal{F}$, se $A \supset B$ allora $A \in \mathcal{F}$;
- $A \cap B \in \mathcal{F}$ per ogni $A, B \in \mathcal{F}$.

Ogni filtro risulta essere in particolare una base di filtro.

Di nuovo, se E è uno spazio topologico, allora l'insieme di tutti gli intorni di un fissato punto $x \in E$ è un filtro su E. Questo è il filtro *generato* da un qualsiasi sistema fondamentale di intorni $\mathcal{B}$ di x, nel senso che è il minimo filtro contenente la base di filtro $\mathcal{B}$.

Se E è un qualsiasi insieme non vuoto ed $A \subset E$ è una sua parte, allora l'insieme $\mathcal{F}_A$ delle parti di E che contengono A è un filtro: $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq E : A \subseteq B\}$. I filtri costruiti in un modo simile prendono il nome di filtri *principali.*

Se E è un insieme infinito, l'insieme costituito dalle parti di E con complementare finito è un altro esempio di filtro, detto filtro *cofinito* su E. In particolare, nel caso $E = \mathbb{N}$ il filtro dei cofiniti viene chiamato *filtro di Fréchet.*

Definizione 3.1.3. Si dice *ultrafiltro* su E un filtro $\mathcal{U}$ per cui valga, in aggiunta alle proprietà della definizione precedente, una delle seguenti condizioni equivalenti:

- per ogni $A \subset E$, esattamente uno tra A ed $E \setminus A$ appartiene ad $\mathcal{U}$;
- per ogni $A, B \subset E$, se $A \cup B \in \mathcal{U}$, allora $A \in \mathcal{U}$ oppure $B \in \mathcal{U}$;
- il filtro $\mathcal{U}$ è massimale per inclusione nell'insieme di tutti i filtri su E.

Un ultrafiltro principale $\mathcal{U}$ su E deve necessariamente essere costituito dai sovrainsiemi di un singoletto, ossia esiste un $x \in E$ tale che $\mathcal{U} = \{A \subseteq E : x \in A\}$. Infatti supponendo che gli elementi di $\mathcal{U}$ siano i sovrainsiemi di un certo $B \subset E$ con almeno due elementi $x, y \in B$, si ha che $\{x\} \cup (E \setminus \{x\}) = E \in \mathcal{U}$, dove però $y \notin \{x\}$ e $x \notin E \setminus \{x\}$, trovando che è violata la seconda delle condizioni equivalenti espresse nella definizione di cui sopra.

Inoltre si nota che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su un insieme infinito E risulta essere non principale se e solo se esso contiene il filtro cofinito su E: se infatti $\mathcal{U}$ contiene tutti le parti cofinite di E, in particolare gli appartengono i complementari di ogni singoletto, e dunque $\mathcal{U} \neq \mathcal{F}_{\{x\}}$ per ogni $x \in E$; mentre se $\mathcal{U}$ non contiene un cofinito A, per la proprietà di ultrafiltro esso dovrà contenere l'insieme finito $A^c = \{a_1, \dots, a_k\}$. Ancora perché $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, uno tra i singoletti $\{a_i\}$ deve appartenere ad $\mathcal{U}$ (infatti $\{a_1\} \cup \{a_2, \dots, a_k\} \in \mathcal{U}$ e così via per un numero finito di passaggi). Abbiamo quindi trovato che $\mathcal{U}$ è principale su E.

Con un argomento analogo a quello appena fatto si vede che su un insieme finito ogni ultrafiltro è principale.

L'esistenza di ultrafiltri non principali su un insieme infinito E è garantita dall'assioma di scelta, come discende dalle seguenti utili osservazioni.

Osservazione 3.1.1. Ogni base di filtro $\mathcal{B}$ si estende ad un filtro $\mathcal{F}$ sullo stesso insieme. Un filtro che contenga $\mathcal{B}$ deve contenere anche tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ e tutti i sovrainsiemi di queste intersezioni. Sembra allora naturale definire

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq E : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{B} \text{ tali che } Y \supseteq \textstyle\bigcap_{i=1}^n X_i\}.$$

A questo punto è facile verificare, grazie al fatto che ogni base di filtro ha la fip, che $\mathcal{F}$ è il più piccolo filtro su E che contiene $\mathcal{B}$.

Osservazione 3.1.2. Su un insieme E sia data una catena di filtri $\{\mathcal{F}_j : j \in J\}$ (cioè un sottoinsieme totalmente ordinato dell'insieme dei filtri su E, considerato come ordine parziale con l'inclusione). Allora esiste un filtro $\mathcal{F}$ che include tutti gli elementi della catena, infatti si verifica che basta prendere l'unione della catena: $\mathcal{F} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j$.

In altre parole, nell'insieme dei filtri su E ogni catena possiede un maggiorante. Per il Lemma di Zorn, tale insieme ha un elemento massimale. Allora dato un filtro $\mathcal{F}$ su E si può applicare lo stesso ragionamento all'insieme dei filtri contenenti $\mathcal{F}$ (ancora ordinato per inclusione), trovando così un filtro massimale che estende il filtro di partenza. Se inoltre E è infinito e prendiamo come $\mathcal{F}$ il particolare filtro dei cofiniti su E, un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che lo estende sarà un ultrafiltro non principale.

Avendo introdotto le nozioni di filtro ed ultrafiltro su un insieme e visto le loro proprietà basilari, rimangono da esporre alcune semplici ma efficaci applicazioni di questi nuovi strumenti. Nel resto del paragrafo mostreremo come riformulare il concetto di limite mediante l'utilizzo dei filtri. In questo lavoro, ciò consentirà di produrre, a partire da una famiglia infinita di spazi di Banach $(X_i)_{i\in\Gamma}$, un nuovo spazio di Banach che in qualche modo riassume la famiglia data (in senso specificato da un fissato ultrafiltro sull'insieme degli indici Γ).

Prima però, per dare un assaggio dei possibili impieghi, e per completarne la descrizione iniziale, osserviamo che la definizione di ultrafiltro su un insieme E coincide con l'assiomatizzazione degli insiemi quasi certi rispetto ad una misura di probabilità finitamente additiva su $(E, \mathcal{P}(E))$. In altre parole, da un lato ad una tale misura μ si associa l'ultrafiltro $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq E : \mu(A) = 1\}$, dall'altro lato un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su E produce la funzione d'insiemi

$$\begin{array}{rcl} m_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(E) & \to & \{0, 1\} \\ A & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } A \notin \mathcal{U}, \\ 1 & \text{se } A \in \mathcal{U}. \end{cases} \end{array}$$

La mappa $m_{\mathcal{U}}$ è una misura finitamente additiva grazie alle proprietà di ultrafiltro: dati $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ con $X \cap Y = \emptyset$ si ha $m_{\mathcal{U}}(X \cup Y) = m_{\mathcal{U}}(X) +$

$m_{\mathcal{U}}(Y)$. Infatti questa ultima somma potrebbe valere $0, 1$ o 2, e si distinguono i casi $(m_{\mathcal{U}}(X), m_{\mathcal{U}}(Y)) = (1, 1), (0, 0), (1, 0)$ e l'analogo $(0, 1)$:

(1,1): per definizione di $m_{\mathcal{U}}$, questa eventualità non si verifica perché non esistono due elementi dell'ultrafiltro disgiunti;

(0,0): se $X, Y \notin \mathcal{U}$, allora $E \setminus (X \cup Y) = (E \setminus X) \cap (E \setminus Y) \in \mathcal{U}$ in quanto intersezione di due suoi elementi, quindi anche $m_{\mathcal{U}}(X \cup Y) = 0$;

(1,0): per antiereditarietà, se $X \in \mathcal{U}$, allora $X \cup Y \in \mathcal{U}$.

3.1.1 Limiti secondo un filtro

Le definizioni che seguono estendono quelle di *definitivamente* e *frequentemente* che vengono incontrate nei primi corsi di Analisi. Per visualizzare tale estensione si può, ad esempio, pensare al caso di successioni di numeri reali, e considerare sull'insieme degli indici $\mathbb{N}$ il filtro di Fréchet introdotto nelle pagine precedenti.

Definizione 3.1.4. Sia f un'applicazione di E in un insieme F. Siano $A \subset F$ e $\mathcal{B}$ una base di filtro su E. Si dice che f sta *definitivamente* in A secondo $\mathcal{B}$ se vale una delle due seguenti condizioni equivalenti:

- esiste un elemento B di $\mathcal{B}$ tale che $f(B) \subset A$;
- $f^{-1}(A)$ appartiene al filtro generato dalla base $\mathcal{B}$.

Nelle stesse ipotesi, si dice invece che f sta *frequentemente* in A secondo $\mathcal{B}$ se non è vero che f sta definitivamente in $A^c = F \setminus A$, ossia se vale una delle due seguenti condizioni equivalenti:

- per ogni $B \in \mathcal{B}$ si ha $f(B) \not\subset A^c$, ossia $f(B) \cap A \neq \emptyset$;
- $f^{-1}(A^c)$ non appartiene al filtro generato da $\mathcal{B}$.

Nelle definizioni precedenti, denotiamo con $\mathcal{F}$ il filtro generato da $\mathcal{B}$. Allora si riconosce che l'insieme delle parti di F in cui f sta definitivamente, ossia l'insieme
$$\{A \in \mathcal{P}(F) : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$
è un filtro su F. In particolare, se f sta definitivamente in una quantità finita $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ di sottoinsiemi di F, allora f sta definitivamente in $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Da questo scende subito che definitivamente implica frequentemente. In più, se sull'insieme E si considera un ultrafiltro $\mathcal{U}$, le due nozioni sono equivalenti: infatti l'implicazione $f^{-1}(A^c) \notin \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ è conseguenza della proprietà di ultrafiltro. Si vede anche che se f sta definitivamente in $A \subset F$ e frequentemente in $B \subset F$, allora f sta frequentemente in $A \cap B$ secondo $\mathcal{B}$. Infatti se così non fosse, f starebbe definitivamente in $(A \cap B)^c$, e quindi

anche in $A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = A \cap B^c$, ed a maggior ragione f starebbe definitivamente in B^c, contro l'assunzione che stia frequentemente in B.

Siamo quindi in condizione di indicare il legame tra i concetti di filtro e di limite, fornendo le definizioni di *valore limite* e *di aderenza* per una funzione rispetto ad una base di filtro.

Definizione 3.1.5. Sia $f : E \to F$ una applicazione dell'insieme E in uno spazio topologico F, e siano $\mathcal{B}$ una base di filtro su E e y un punto di F.

- Si dice che f ammette y come *limite* (o che f *converge verso* y) secondo $\mathcal{B}$ se la funzione f sta definitivamente secondo $\mathcal{B}$ dentro ogni intorno di y;
- Se al punto precedente si sostituisce la locuzione "definitivamente" con "frequentemente", allora si dice che f ammette y come *valore di aderenza.*

In base alle osservazioni precedenti discende che se, al posto di una generica base di filtro, si considera su E un ultrafiltro $\mathcal{U}$, allora $y \in F$ è valore di aderenza per f secondo $\mathcal{U}$ se e solo se y è un limite di f.

Le proposizioni che seguono (ben note nell'ambito della classica nozione di limite) stabiliscono risultati di esistenza ed unicità del limite in base alle proprietà topologiche dello spazio F.

Per favorire la leggibilità, qualora sia in gioco un'unica base di filtro $\mathcal{B}$, sarà omessa la specificazione "secondo $\mathcal{B}$" che compare in tutte le definizioni di questo paragrafo.

Proposizione 3.1.1. *Nelle ipotesi della Definizione 3.1.5, sia K un compatto di F tale che f stia frequentemente in K. Allora esiste almeno un punto di K che sia valore di aderenza per f.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che ciascun punto di K possieda un intorno aperto nel cui complementare f stia definitivamente. Sia $(V_i)_{1 \le i \le n}$ una successione finita di tali intorni, la quale ricopra il compatto K. Allora f sta definitivamente in $\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c$. Ma questo è contenuto in K^c, contraddicendo l'ipotesi che f stia frequentemente in K. □

Proposizione 3.1.2 (Unicità del limite)**.** *Nelle ipotesi della Definizione 3.1.5, si supponga che lo spazio topologico F sia di Hausdorff. Allora, se f converge verso y, questo è l'unico valore di aderenza di f (e quindi anche l'unico limite).*

Dimostrazione. Sia $z \in F$ un punto distinto da y. Allora esiste un intorno V di y tale che V^c sia un intorno di z. Poiché f ammette y come limite, f sta definitivamente in V, ed è quindi impossibile che stia frequentemente in V^c. Ciò prova che z non è valore di aderenza per f. □

Proposizione 3.1.3. *Nelle ipotesi della Definizione 3.1.5, si supponga che lo spazio topologico F sia compatto e di Hausdorff. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(a) f ammette y come limite;

(b) f non ammette alcun valore di aderenza distinto da y.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b) : È data dalla proposizione precedente.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Poiché F è compatto, per la Proposizione 3.1.1 y è proprio un valore d'aderenza per f. Ragionando per assurdo, supponiamo che f non converga verso y, cioè che esiste un intorno aperto V di y tale che f stia frequentemente in V^c. Essendo V^c compatto, si applica di nuovo 3.1.1 e si vede che esiste in V^c almeno un valore di aderenza $z \neq y$ per f. Ciò contraddice l'ipotesi (b) e prova l'equivalenza tra le due condizioni. □

Avendo visto che coincidono i concetti di valore limite e valore di aderenza secondo un ultrafiltro, dai risultati appena dimostrati si ottiene il seguente

Corollario 3.1.4. *Siano dati un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su E ed un'applicazione f di E in uno spazio topologico compatto e di Hausdorff F. Allora f ammette, secondo $\mathcal{U}$, uno ed un solo limite.*

Come annunciato, il prossimo passo sarà costruire, con l'aiuto dei complementi visti nelle prime pagine di questo capitolo, un nuovo spazio di Banach a partire da una assegnata famiglia di tali spazi, che dipende da un ultrafiltro fissato sull'insieme indicizzante la famiglia.

Successivamente, torneremo a studiare alcune proprietà degli ultrafiltri. In particolare ci concentreremo sugli ultrafiltri chiamati *κ-completi*, dove κ è un dato cardinale non numerabile. Nello stesso contesto parleremo di cardinali *misurabili* e mostreremo alcune loro caratteristiche.

3.2 Ultraprodotto di spazi di Banach

Sia Γ un insieme infinito, sul quale è dato un ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$. Supponiamo assegnata una famiglia di spazi di Banach indicizzata su tale insieme: $(X_i, \|\cdot\|_i)_{i\in\Gamma}$. Per alleggerire la notazione saranno omessi gli indici relativi alle norme laddove ciò non crea confusione. Denotiamo con $\mathcal{X}$ il prodotto cartesiano della famiglia di spazi, $\mathcal{X} = \prod_{i\in\Gamma} X_i$, e con $\ell_\infty(\mathcal{X})$ lo ℓ_∞-prodotto della famiglia, ossia l'insieme

$$\ell_\infty(\mathcal{X}) = \{x = (x_i) \in \mathcal{X} : \sup_{i\in\Gamma} \|x_i\|_i < \infty\}.$$

Dotato della norma uniforme $\sup_{i\in\Gamma} \|\cdot\|_i$, l'insieme $\ell_\infty(\mathcal{X})$ risulta avere una struttura di spazio di Banach. Si consideri inoltre il suo sottospazio

$$c_{\mathcal{U}} = \{x \in \ell_\infty(\mathcal{X}) : x = (x_i) \text{ e } \lim_{i,\,\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}.$$

Con la scrittura $\lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$ si intende che, nel senso delle pagine precedenti, fissato l'elemento $x \in \ell_\infty(\mathcal{X})$, il limite della funzione

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x & : \Gamma & \to & \mathbb{R} \\ & i & \mapsto & \|x_i\| \end{array}$$

secondo l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ è uguale a 0. In altre parole

$$\lim_{i,\,\mathcal{U}} \|x_i\| = 0 \Leftrightarrow \text{per ogni intorno } V \text{ di } 0 \text{ si ha } \{i \in \Gamma : \|x_i\| \in V\} \in \mathcal{U}.$$

Il Corollario 3.1.4 garantisce l'esistenza e l'unicità di una tale espressione $\lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\|$ in quanto per ogni $x \in \ell_\infty(\mathcal{X})$ ed ogni numero reale $k \geq \sup_i \|x_i\|$ l'immagine di Γ mediante φ_x è contenuta nel compatto $[0, k]$. Inoltre, il sottospazio $c_\mathcal{U}$ è chiuso nel prodotto $\ell_\infty(\mathcal{X})$, essendo il luogo di zeri dell'applicazione continua che ad ogni elemento $x \in \ell_\infty(\mathcal{X})$ associa il suo limite secondo l'ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Osservazione 3.2.1. Il limite secondo $\mathcal{U}$ di un elemento x dipende solo dalla sua classe di resto modulo $c_\mathcal{U}$. In altre parole se $x - y \in c_\mathcal{U}$, ossia $\lim_\mathcal{U} \|x_i - y_i\| = 0$, allora $\lim_\mathcal{U} \|x_i\| = \lim_\mathcal{U} \|y_i\|$.

Definiamo quindi una relazione di equivalenza su $\ell_\infty(\mathcal{X})$ data da

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x - y \in c_\mathcal{U}.$$

Definizione 3.2.1. Sia assegnata una famiglia $(X_i)_{i\in\Gamma}$ di spazi di Banach, indicizzata sull'insieme infinito Γ. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su Γ. Il quoziente dello spazio prodotto $\ell_\infty(\mathcal{X})$ per il sottospazio chiuso $c_\mathcal{U}$

$$\textstyle\prod_{i\in\Gamma}^{\mathcal{U}} X_i := \ell_\infty(\mathcal{X})/c_\mathcal{U} = \{[x] \in \mathcal{P}(\ell_\infty(\mathcal{X})) : x \in \ell_\infty(\mathcal{X})\}$$

si chiama *ultraprodotto* della famiglia $(X_i)_{i\in\Gamma}$ secondo $\mathcal{U}$. Nel caso in cui gli spazi X_i siano tutti uguali ad un certo X, questo oggetto prende il nome di *ultrapotenza* della famiglia, e viene denotato brevemente con $X_\mathcal{U}$.

L'insieme $\prod_{i\in\Gamma}^{\mathcal{U}} X_i$ è uno spazio di Banach dotato della norma quoziente

$$\|[x]\| = d(x, c_\mathcal{U}) = \inf_{m \in c_\mathcal{U}} \|x - m\|.$$

Osservazione 3.2.2. Per ogni $x \in \ell_\infty(\mathcal{X})$ vale la formula

$$\|[x]\| = \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Sia infatti $m \in c_\mathcal{U}$ tale che

$$d(x, c_\mathcal{U}) = \|x - m\| = \sup_i \|x_i - m_i\|.$$

Basterà mostrare che $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - m_i\| = d$. Sia quindi $r > 0$. Per ogni $i \in \Gamma$ si ha $\|x_i - m_i\| \leq d < d+r$, e vediamo che si ha anche $\{i : d-r < \|x_i - m_i\|\} \in \mathcal{U}$. Sicuramente $A = \{i : \|m_i\| < r/2\} \in \mathcal{U}$, e supponiamo per assurdo che $B = \{i : \|x_i\| > d-r/2\} \notin \mathcal{U}$. Per la proprietà di ultrafiltro $B^c \in \mathcal{U}$, dunque la funzione $y = x\mathbf{1}_B$ è un elemento di $c_{\mathcal{U}}$, che in aggiunta verifica

$$\|x - y\| = \|x\mathbf{1}_{B^c}\| \leq d - r/2,$$

contraddicendo la minimalità di m. Allora $A \cap B \in \mathcal{U}$, come voluto.

3.3 Due parole sui cardinali inaccessibili

Nel prossimo paragrafo andremo ad introdurre i cardinali misurabili, che sono un particolare tipo di inaccessibili. Nei primi corsi di Logica, dall'introduzione dei numeri cardinali, si presentano i cardinali inaccessibili e se ne studiano le prime proprietà legate al calcolo di cardinali. Questo paragrafo ha lo scopo di ricordare tali proprietà e dare un'idea delle questioni relative all'esistenza di un cardinale inaccessibile. Ci riferiamo a [4] per una trattazione più approfondita dell'argomento.

Definizione 3.3.1. Un cardinale non numerabile κ si dice *limite forte* se $\kappa = \aleph_\alpha$ e per ogni $\beta < \alpha$ si ha $2^{\aleph_\beta} < \kappa$.

Ogni limite forte è in particolare un cardinale limite.

Vi sono diversi modi per esprimere il fatto che un cardinale è un limite forte. Usando fatti elementari (come la crescenza della successione degli aleph, il fatto che $|X| < |\mathcal{P}(X)|$, le proprietà di calcolo dei cardinali) si vede che ciascuna delle seguenti condizioni per il cardinale non numerabile κ equivale a dire che κ è un cardinale limite forte:

1. per ogni $\nu < \kappa$ si ha $2^\nu < \kappa$;
2. per ogni $\lambda, \nu < \kappa$ si ha $\lambda^\nu < \kappa$;
3. se $k = \aleph_\alpha$ e $\beta, \gamma < \alpha$, allora $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \kappa$.

Cardinali limiti forti esistono, come si può mostrare definendo per ricorsione la successione

$$\begin{cases} \alpha_0 = \kappa_0 & \text{con } \kappa_0 \text{ non numerabile} \\ \alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n} & \text{per } n \in \omega. \end{cases}$$

Preso $\alpha_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$, si trova l'esempio desiderato; di più, in questo modo si vede che esistono limiti forti arbitrariamente grandi.

Ricordiamo che, dato un qualsiasi ordinale α, si definisce *cofinalità* di α come il minimo ordinale $\operatorname{cof}\alpha$ per cui esiste una funzione illimitata di $\operatorname{cof}\alpha$ in α. Ovviamente $\operatorname{cof}\alpha \leq \alpha$, inoltre si riconosce che la cofinalità di un qualunque ordinale è un cardinale. Distinguendo i due possibili casi, si definisce

regolare un cardinale κ per cui $\operatorname{cof}\kappa = \kappa$;

singolare un cardinale κ per cui $\operatorname{cof}\kappa < \kappa$.

Si osserva che ogni cardinale successore $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ è regolare poiché se altrimenti potessimo scrivere $\kappa = \sum_{i \in I} \kappa_i$ per certi $\kappa_i < \kappa$ e $|I| < \kappa$, allora si avrebbe l'assurdo

$$\aleph_{\alpha+1} \leq \textstyle\sum_{i \in I} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot |I| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Dunque ogni cardinale singolare è limite.

Definizione 3.3.2. Un cardinale limite e regolare si dice *debolmente inaccessibile.*

Definizione 3.3.3. Un cardinale limite forte e regolare si dice *fortemente inaccessibile.*

Osservazione 3.3.1. I cardinali fortemente inaccessibili lo sono anche debolmente. Se inoltre si assume la GCH (l'Ipotesi del Continuo generalizzata ad un qualsiasi cardinale: per ogni ordinale α si ha $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$), allora i concetti di cardinale limite e limite forte coincidono, e quindi sono equivalenti i due tipi di cardinali inaccessibili sopra introdotti.

Il motivo per cui i cardinali fortemente inaccessibili vengono chiamati in tal modo è che essi non possono essere ottenuti da cardinali più piccoli mediante le usuali operazioni insiemistiche; ossia se κ è fortemente inaccessibile:

(a) Se $|X| < \kappa$, allora $|\mathcal{P}(X)| < \kappa$;

(b) Se ogni $X \in S$ ha cardinalità minore di κ e se anche $|S| < \kappa$, allora $|\bigcup S| < \kappa$;

(c) Se $|X| < \kappa$ e $f : X \to \kappa$, allora $\sup f(X) < \kappa$.

Come per ogni oggetto di natura matematica, è lecito chiedersi se un cardinale inaccessibile esiste. Ebbene, si può *credere* che la loro esistenza sia coerente con ZFC, tuttavia non è possibile dimostrarlo. Di conseguenza, non è possibile affermare con certezza che la loro esistenza sia indipendente da ZFC (una proposizione è *indipendente* da una teoria se questa non prova lei né la sua negazione), nonostante invece sia dimostrabile che è coerente la teoria ZFC+"non esiste un cardinale inaccessibile". Volendo spiegare questo punto è necessario presentare due importanti classi di insiemi.

L'*universo* (o *gerarchia cumulativa*) *di Von Neumann V* (prima pubblicazione di E. Zermelo, 1930) è definito a partire dalla successione transfinita (V_α) data per ricorsione da

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) & \text{per ogni ordinale successore } \alpha + 1 \\ V_\lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} V_\gamma & \text{per ogni ordinale limite } \lambda. \end{cases}$$

Si pone quindi

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} V_\alpha.$$

Ogni elemento di V è un insieme ben fondato, perciò in ZFC (che comprende l'assioma di fondazione) si può dire che ogni insieme appartiene a V.

L'*universo costruibile* L (K. Gödel, 1938) è anch'esso l'unione di una successione transfinita di insiemi (L_α) indicizzata sulla classe degli ordinali. Stavolta, ad ogni passo successore $\alpha+1$ non si considerano tutti i sottoinsiemi dell'insieme L_α, ma solo quelli definibili da una $\{\in\}$-formula con parametri da L_α. In particolare, per un insieme X si definisce

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}(X) = \big\{&\{y \in X : \Phi(y, z_1, \ldots, z_n) \text{ è vera in } (X, \in)\} : \\ &\Phi \text{ è una formula del primo ordine e } z_1, \ldots, z_n \in X\big\}.\end{aligned}$$

Allora la successione per l'universo costruibile è data per ricorsione transfinita da

$$\begin{cases} L_0 = \emptyset \\ L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha) & \text{per ogni ordinale successore } \alpha + 1 \\ L_\lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} V_\gamma & \text{per ogni ordinale limite } \lambda, \end{cases}$$

e si prende

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} L_\alpha.$$

Gli elementi di L si dicono *insiemi costruibili*. L'assioma di costruibilità (che non è un assioma di ZFC) è la formula "$V = L$", che risulta essere indipendente da ZFC.

Veniamo ora a dimostrare il risultato annunciato: posto

$$I = \text{"esiste un cardinale inaccessibile"},$$

la teoria ZFC+$\neg I$ è coerente, mentre non si può provare che lo sia ZFC+I. Nonostante ciò, vi sono ragioni per credere nella coerenza di ZFC+I, così che la gran parte dei matematici nel settore assume l'indipendenza di I dalla Teoria degli Insiemi. Se T è una teoria e A è una formula, scriveremo come di consueto Con(T) per dire che T è coerente, cioè $\mathrm{Con}(T) \equiv T \nvdash \perp$, e diremo che A è *consistente* con T se vale l'implicazione $\mathrm{Con}(T) \Rightarrow \mathrm{Con}(T + A)$. Nella dimostrazione qui esposta mancano delle verifiche, per le quali si può vedere [4].

Teorema 3.3.1. *1. $ZFC \nvdash I$, e quindi $Con(ZFC + \neg I)$;*

2. $Con(ZFC + I)$ è indimostrabile, nel senso che non si può dimostrare che I è consistente con ZFC.

Dimostrazione. 1. Si può verificare che se κ è un cardinale fortemente inaccessibile, allora V_κ è un modello di ZFC. Ancora, ZF dimostra che se κ è debolmente inaccessibile, allora L_κ è un modello di ZFC. Quindi se per assurdo $ZFC \vdash I$, si avrebbe $ZFC \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$, contro il Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel.

2. Supponiamo per assurdo che $\mathrm{Con}(ZFC) \Rightarrow \mathrm{Con}(ZFC + I)$ sia dimostrabile. Per quanto detto al punto precedente, in $ZFC + I$ sappiamo dimostrare $\mathrm{Con}(ZFC)$, e dunque $\mathrm{Con}(ZFC + I)$, il che contraddice il Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel. Il teorema è così dimostrato.

□

3.4 Ultrafiltri κ-completi e cardinali misurabili

Iniziamo introducendo la nozione duale di quella di filtro su un insieme. Salvo avviso contrario, si denota con E un fissato insieme non vuoto.

Definizione 3.4.1. Un *ideale* $\mathcal{I}$ su E è una famiglia non vuota di parti non vuote di E che sia ereditaria e stabile per unione binaria. Per non banalizzare il concetto di ideale al caso $\mathcal{I} = \mathcal{P}(E)$, si richiede inoltre che $E \notin \mathcal{I}$. In altre parole, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(E)$ è un ideale se valgono le tre condizioni:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ e $E \notin \mathcal{I}$;
- per ogni $B \in \mathcal{I}$, se $A \subset B$ allora $A \in \mathcal{I}$;
- $A \cup B \in \mathcal{I}$ per ogni $A, B \in \mathcal{I}$.

Osservazione 3.4.1. Ad ogni filtro $\mathcal{F}$ su E corrisponde l'ideale

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{E \setminus X : X \in \mathcal{F}\}.$$

Similmente, ad ogni ideale $\mathcal{I}$ su E corrisponde il filtro

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{E \setminus Y : Y \in \mathcal{I}\}.$$

Ovviamente, la composizione di queste due costruzioni fornisce l'applicazione identica dell'insieme $\{\text{ filtri di } E\}$ in un senso e di $\{\text{ ideali di } E\}$ nell'altro. Questa corrispondenza ci autorizza a pensare le due nozioni come una il duale dell'altra.

Per continuare l'analogia con il caso dei filtri, è naturale chiamare *principali* quegli ideali costituiti dai sottoinsiemi di un fissato $A \subset E$, ossia della forma $\mathcal{I}_A = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \subset A\}$.

La nozione duale di ultrafiltro è quella di *ideale primo*.

Definizione 3.4.2. Un ideale $\mathcal{J}$ su E si dice *primo* se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- per ogni $A \subset E$, esattamente uno tra A ed $E \setminus A$ appartiene ad $\mathcal{J}$;
- per ogni $A, B \subset E$, se $A \cap B \in \mathcal{J}$, allora $A \in \mathcal{J}$ oppure $B \in \mathcal{J}$.

Riprendendo la notazione usata poco fa, si osserva immediatamente che se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora $\mathcal{I}_{\mathcal{U}}$ è un ideale primo, e che se $\mathcal{J}$ è un ideale primo, allora $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ è un ultrafiltro.

Fissiamo ora un cardinale non numerabile κ.

Definizione 3.4.3. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su E si dice *κ-completo* se è non principale e se è chiuso per intersezione di meno di κ suoi elementi, cioè se per ogni cardinale $\lambda < \kappa$ ed ogni sua parte $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ di cardinalità $|\mathcal{C}| = \lambda$ si ha che l'insieme $\bigcap \mathcal{C} = \{x \in E : x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\}$ appartiene ad $\mathcal{U}$.

Si usa chiamare σ-completo un ultrafiltro che sia $\aleph_1$-completo.

Si nota che, in particolare, ogni ultrafiltro κ-completo è chiuso per intersezione numerabile, e ciò non può valere per ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ (si considerino tutti i complementari dei singoletti).

Definizione 3.4.4. Un cardinale non numerabile κ si dice *misurabile* se esiste un ultrafiltro κ-completo su un insieme di cardinalità κ, o equivalentemente su κ stesso.

Se κ è un cardinale misurabile, con ultrafiltro κ-completo $\mathcal{U}$, allora $\mathcal{U}$ è anche σ-completo. La proposizione che segue mostra che è vero anche l'inverso: esiste dunque un cardinale misurabile se e solo se esiste un ultrafiltro σ-completo su qualche insieme.

Proposizione 3.4.1. *Se esiste un ultrafiltro σ-completo, allora esiste un cardinale misurabile.*

Dimostrazione. Sia κ il minimo cardinale, necessariamente non numerabile, su cui esista un ultrafiltro σ-completo, che denotiamo con $\mathcal{U}$. Passando alla situazione duale degli ideali, mostriamo che proprio $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro κ-completo, che fa di κ il cardinale misurabile cercato.

Sia $\mathcal{I}$ l'ideale primo duale di $\mathcal{U}$, il quale è a sua volta σ-completo (per gli ideali vengono considerate le unioni di elementi). Basterà vedere che $\mathcal{I}$ è κ-completo. Supponendo per assurdo che non lo sia, troviamo un cardinale $\lambda < \kappa$ e $(X_\nu)_{\nu<\lambda}$ tali che $X_\nu \in \mathcal{I}$ per ogni ν ma $\bigcup_{\nu<\lambda} X_\nu \notin \mathcal{I}$. Per la proprietà di ideale, si può supporre che gli X_ν siano a due a due disgiunti. Sia

$$\mathcal{J} = \{Y \subset \lambda : \textstyle\bigcup_{\nu\in Y} X_\nu \in \mathcal{I}\}.$$

$\mathcal{J}$ è un ideale, è non principale poiché gli appartengono i disgiunti X_ν, ed è σ-completo poiché $\mathcal{I}$ lo è. Allora abbiamo trovato che sul cardinale $\lambda < \kappa$ esiste un ultrafiltro σ-completo, contraddicendo la minimalità di κ. □

Il risultato seguente stabilisce che i cardinali misurabili sono inaccessibili. Allora per il Teorema 3.3.1 anche per i cardinali misurabili si può affermare che la loro esistenza non è dimostrabile in ZFC, e con un ragionamento analogo a quello esposto nel Teorema si vede che non si può dimostrare la consistenza dell'esistenza di un tale cardinale con ZFC. Lo stesso si può quindi dire per gli ultrafiltri σ-completi.

Proposizione 3.4.2. *Ogni cardinale misurabile è fortemente inaccessibile.*

Dimostrazione. Sia κ un cardinale misurabile e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo su κ. Denotiamo con $\mathcal{I}$ l'ideale primo duale di $\mathcal{U}$, il quale contiene tutti i singoletti essendo non principale; inoltre per κ-completezza, se $X \subset \kappa$ ha cardinalità $|X| < \kappa$, allora $X \in \mathcal{I}$.

Se per assurdo κ fosse singolare, allora esso si scriverebbe come unione di una quantità $\lambda < \kappa$ di sue parti $(X_\nu)_{\nu<\lambda}$ ciascuna di cardinalità minore di κ, dunque per completezza si avrebbe $\kappa = \bigcup_{\nu<\lambda} X_\nu \in \mathcal{I}$. Questa contraddizione mostra che κ è un cardinale regolare.

Supponiamo ora che κ non sia un limite forte e vediamo come anche questo conduce ad un assurdo. Sia quindi $\lambda < \kappa$ tale che $2^\lambda \geq \kappa$, e prendiamo $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ di cardinalità $|S| = \kappa$. Anche su S esiste un ultrafiltro κ-completo, che indichiamo con $\mathcal{V}$. Per la proprietà di ultrafiltro, per ogni $\alpha < \lambda$ esattamente uno tra gli insiemi

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ e } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

appartiene a $\mathcal{V}$, e chiamiamo X_α tale elemento di $\mathcal{V}$ per $\alpha < \lambda$. Essendo $\mathcal{V}$ un ultrafiltro κ-completo su S, si ha che anche $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ appartiene a $\mathcal{V}$. Ma l'insieme X consta di al più un elemento, in quanto il valore assunto da una mappa $f : \lambda \to \{0,1\}$ su un qualsiasi ordinale $\alpha < \lambda$ è determinato in modo unico dall'insieme X_α. Ciò contraddice il fatto che $\mathcal{V}$ sia non principale e dimostra quanto voluto. $\square$

3.5 Ultrapotenza rispetto ad un ultrafiltro σ-completo

In questo paragrafo assumeremo ripetutamente l'esistenza di un cardinale misurabile, ossia assumiamo che su un certo insieme più che numerabile Γ esista un ultrafiltro σ-completo $\mathcal{U}$. Dato uno spazio di Banach X, consideriamo l'ultrapotenza $X_\mathcal{U}$ di X rispetto ad $\mathcal{U}$ munita della norma limite. Mostreremo che se lo spazio X è dotato di (S) (risp. strettamente convesso), allora anche l'ultrapotenza $X_\mathcal{U}$ lo è. Questo è vero perché il fatto che l'ultrafiltro sia chiuso per intersezione numerabile semplifica notevolmente il calcolo della norma nell'ultrapotenza, come mostra il lemma seguente.

Lemma 3.5.1. *Assumiamo l'esistenza di un cardinale misurabile. Sia X uno spazio di Banach, e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro σ-completo sull'insieme Γ. Allora per ogni $[x] = [(x_i)_{i\in\Gamma}] \in X_{\mathcal{U}}$ vale*

$$\|[x]\| = \lambda \Leftrightarrow \{i \in \Gamma : \|x_i\| = \lambda\} \in \mathcal{U}.$$

Dimostrazione. Denotiamo con Λ l'insieme di indici $\Lambda = \{i \in \Gamma : \|x_i\| = \lambda\}$. Ovviamente se $\Lambda \in \mathcal{U}$, allora per ogni intorno V di λ anche il sovrainsieme $\{i \in \Gamma : \|x_i\| \in V\}$ è un elemento di $\mathcal{U}$, cioè $\|[x]\| = \lambda$. Per l'implicazione opposta, per ogni naturale $n \geq 1$ si indichi con A_n l'insieme

$$A_n = \left\{ i \in \Gamma : \lambda - \frac{1}{n} < \|x_i\| < \lambda + \frac{1}{n} \right\}.$$

Per l'ipotesi $\|[x]\| = \lambda$, ciascuno degli A_n è un elemento di $\mathcal{U}$, e così per completezza anche l'intersezione $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{U}$. D'altronde questa intersezione coincide con Λ. □

Come conseguenza immediata del risultato precedente, vediamo che se $\mathcal{U}$ è σ-completo, allora per ogni x, $y \in X^\Gamma$ vale

$$[x] = [y] \Leftrightarrow \{i \in \Gamma : x(i) = y(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Inoltre, se $\|[x]\| = 1$ si può supporre che $\|x_i\| = 1$ per ogni $i \in \Gamma$ a meno di sostituire x con un elemento equivalente: possiamo infatti modificare x a piacere su $\{i \in \Gamma : \|x_i\| \neq 1\} \notin \mathcal{U}$ prendendo un qualsiasi $x_i \in S_X$ in corrispondenza degli indici i di tale insieme.

Veniamo allora ai risultati annunciati.

Teorema 3.5.2. *Assumiamo l'esistenza di un cardinale misurabile. Sia X uno spazio di Banach strettamente convesso, e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro σ-completo sull'insieme Γ. Allora anche lo spazio $X_{\mathcal{U}}$ è strettamente convesso.*

Dimostrazione. Ricordando la Proposizione 2.2.1, mostriamo che se $[x]$ e $[y]$ sono due elementi distinti di $X_{\mathcal{U}}$ con norma unitaria, allora $\|[x+y]\| < 2$. Per quanto detto sopra, si può supporre che ogni componente di x e y abbia norma 1. Poiché $[x] \neq [y]$, si ha $\{i \in \Gamma : x_i \neq y_i\} \in \mathcal{U}$ e visto che X è strettamente convesso anche $\{i \in \Gamma : \|x_i + y_i\| < 2\} \in \mathcal{U}$. Allora è chiaro che $\|[x+y]\| < 2$, come voluto. □

Teorema 3.5.3. *Assumiamo l'esistenza di un cardinale misurabile. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro σ-completo sull'insieme Γ, e supponiamo che lo spazio di Banach X verifichi (S). Allora anche $X_{\mathcal{U}}$ verifica (S).*

Dimostrazione. Verifichiamo che $X_{\mathcal{U}}$ gode di (S'). Fissiamo $\delta > 0$ e siano $[x]\,[y] \in X_{\mathcal{U}}$ di norma unitaria. Senza ledere la generalità si può supporre si abbia $\|x_i\| = \|y_i\| = 1$ per ogni $i \in \Gamma$. Per l'ipotesi (S) si trova $[z] = [(z_i)] \in X_{\mathcal{U}}$ con $\|z_i\| \leq \delta$ e tale che per ogni $i \in \Gamma$ si abbia una delle due

$$\|x_i + z_i\| > 1 \quad \text{e} \quad \|y_i + z_i\| < 1 \tag{3.1}$$

oppure

$$\|x_i + z_i\| < 1 \quad \text{e} \quad \|y_i + z_i\| > 1. \tag{3.2}$$

Tali condizioni identificano una partizione binaria di Γ, perciò esattamente uno tra gli insiemi $Z_1 = \{i \in \Gamma : z_i \text{ soddisfa } (3.1)\}$ e $Z_2 = \{i \in \Gamma : z_i \text{ soddisfa } (3.2)\}$ appartiene all'ultrafiltro $\mathcal{U}$: diciamo $Z_1 \in \mathcal{U}$.

Mostriamo che $\|[x+z]\| > 1$. Supponiamo per assurdo che $g = \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i + z_i\| \leq 1$. Per σ-completezza, l'insieme $Y = \{i \in \Gamma : \|x_i + z_i\| - g \leq 0\}$ appartiene ad $\mathcal{U}$. Ma se $g \leq 1$, allora $Y \cap Z_1$ risulta essere vuoto, ma questo contraddice il fatto che tale intersezione debba essere un elemento di $\mathcal{U}$.

In modo analogo si prova che $\|[y + z]\| < 1$. Dal fatto che $\|[z]\| \leq \delta$, è dimostrata la proprietà (S'). $\square$

Dai risultati precedenti emerge che (assunta l'esistenza di un cardinale misurabile κ) non si può sperare di trovare l'esempio di uno spazio di Banach dotato della proprietà (S) ma senza norme equivalenti strettamente convesse prendendo l'ultrapotenza rispetto ad un ultrafiltro σ-completo di uno spazio X che ha entrambe queste proprietà: lo spazio $X_{\mathcal{U}}$ continuerà infatti ad essere strettamente convesso.

In una versione non aggiornata di uno studio sulla proprietà di Steinhaus per spazi di Banach ([5]), e su cui si è basato questo lavoro di tesi, gli autori T. Kania e T. Kochanek cercano un esempio di tale spazio non tenendo presente la validità del Teorema 3.5.2. La loro idea consisteva nell'immergere isomorficamente lo spazio $\ell_\infty(\omega_1) \oplus c_0(\kappa)$ (senza norme equivalenti strettamente convesse, vd. Teorema 2.3.1) in ultraprodotto dello spazio $c_0(\kappa)$ munito della norma equivalente strettamente convessa come nel Teorema 2.3.3, ma il morfismo iniettivo da loro costruito risultava male definito, in accordo con l'impossibilità del risultato. Gli autori hanno realizzato l'errore commesso alla luce del Teorema 3.5.2, ed il risultato è stato ritirato. Si è troncata così un'altra strada che porta all'esempio di uno spazio di Banach che testimoni, a meno di norme equivalenti, la differenza tra stretta convessità e proprietà di Steinhaus. Tale problema rimane tuttora aperto.

Per affezione, ma anche per non sopprimere un impiego di energia, riportiamo di seguito il risultato appena discusso. In ciò che si salva della costruzione dell'immersione viene in appello un interessante risultato della Teoria degli spazi di Banach. Esso è il Principio di Riflessività Locale che mostra come ogni spazio di Banach sia riflessivo in senso locale. Una esposizione di questo si può trovare in Appendice, insieme ad altri utili fatti impiegati nell'argomentazione seguente.

Teorema 3.5.4 (falso)**.** *Assumiamo l'esistenza di un cardinale misurabile. Allora esiste uno spazio di Banach strettamente convesso X una cui ultrapotenza $X_{\mathcal{U}}$ ha (S), ma non vi è su di essa una norma strettamente convessa ed equivalente alla norma limite.*

Tentativo di dimostrazione. Sia κ un cardinale misurabile e sia $\{A, B\}$ una partizione di κ fatta di elementi di cardinalità $|A| = \aleph_1$ e $|B| = \kappa$. Consideriamo lo spazio di Banach $X = c_0(\kappa) \cong c_0(A) \oplus c_0(B)$ munito della norma strettamente convessa come in 2.3.3. Sia ora

$$Y = c_0(A)^{**} \oplus c_0(B) \cong \ell_\infty(\omega_1) \oplus c_0(\kappa).$$

Sullo spazio Y non esistono norme equivalenti strettamente convesse, essendo $\ell_\infty(\omega_1)$ un suo sottospazio (si veda 2.3.1). Per il Teorema 3.5.3, sarà sufficiente immergere Y in una ultrapotenza $X_{\mathcal{U}}$ di X, dove $\mathcal{U}$ è un certo ultrafiltro σ-completo.

Sia Γ l'insieme dei sottospazi di Y che hanno dimensione finita. Allora

$$|\Gamma| = |[2^{\omega_1} + \kappa]^{<\aleph_0}| = |[\kappa]^{<\aleph_0}| = \kappa,$$

dove la prima uguaglianza è data dalla Proposizione B.0.16 e la seconda scende dal fatto che κ è fortemente inaccessibile. Esiste quindi su Γ un ultrafiltro κ-completo $\mathcal{U}$. Come conseguenza del Principio di Riflessione Locale A.0.5, si ha che per ogni $M \in \Gamma$ con $M \subset c_0(A)^{**}$ esiste un operatore iniettivo $T_M : M \to c_0(A)$ tale che

$$\tfrac{1}{2}\|x\| \leq \|T_M x\| \leq \tfrac{3}{2}\|x\| \quad \text{per ogni } x \in M.$$

Allora, per ogni $M \in \Gamma$, costruiamo l'operatore $S_M : M \to X$ ponendo

$$S_M x = \begin{cases} T_M x & \text{se } x \in M \cap c_0(A)^{**}, \\ x & \text{se } x \in M \cap c_0(B). \end{cases}$$

Consideriamo la famiglia $(S_M(M))_{M\in\Gamma}$ di sottospazi di X e facciamone l'ultraprodotto $\prod_{M\in\Gamma}^{\mathcal{U}} S_M(M) = \ell_\infty(S_M(M))/c_{\mathcal{U}}$, il quale è un sottospazio di $X_{\mathcal{U}}$. Infine, definiamo l'operatore $S : Y \to \prod_{M\in\Gamma}^{\mathcal{U}} S_M(M)$ mediante la formula

$$Sx = [(S_M x)_{M\in\Gamma}] \quad \text{per ogni } x \in Y.$$

Tale S è il morfismo iniettivo cercato, ammesso che sia ben definito:

- per ogni $x \in c_0(B)$, si ha $Sx = [(x)_M]$, quindi la restrizione di S al secondo fattore è un'isometria;

- per ogni $x \in c_0(A)^{**}$, l'insieme degli $M \in \Gamma$ per cui $\frac{1}{2}\|x\| \leq \|S_M x\| \leq \frac{3}{2}\|x\|$ è un elemento di $\mathcal{U}$. Quindi

$$\tfrac{1}{2}\|x\| \leq \lim_{M,\mathcal{U}} \|S_M x\| = \|Sx\| \leq \tfrac{3}{2}\|x\|.$$

Ma si vede che in corrispondenza di un ultrafiltro σ-completo, la mappa S non può essere ben definita. Infatti

$$S \text{ è ben definita } \Leftrightarrow \{M \in \Gamma : x \in M\} \in \mathcal{U} \text{ per ogni } x \in Y.$$

Sia $\{x_n : n \geq 1\}$ un insieme infinito numerabile di elementi linearmente indipendenti di Y. Se per assurdo S fosse ben definita, allora per ogni $n \geq 1$ l'insieme $A_n = \{M \in \Gamma : x_n \in M\}$ è un elemento di $\mathcal{U}$. Per completezza, anche $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{U}$. Essendo gli x_n una quantità infinita di vettori linearmente indipendenti e gli elementi di Γ sottospazi di dimensione finita, si ha che A deve essere vuoto, il che conduce alla contraddizione $\emptyset \in \mathcal{U}$. $\square$

Appendice A

Il Principio di Riflessività Locale

Nel seguito e salvo avviso contrario, si indichierà con $X = (X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach reale; tutte le norme verranno denotate con $\|\cdot\|$ fintanto che risulterà chiaro a quale tra gli spazi in gioco appartiene l'elemento cui viene applicata la norma. Indicheremo con B_X, U_X e S_X rispettivamente la palla chiusa unitaria di X, la sua parte interna ed il suo bordo.

Due spazi di Banach X e Y sono *isomorfi* se esiste tra loro un omeomorfismo lineare. Equivalentemente, essi sono isomorfi se esistono una mappa surgettiva $T : X \to Y$ e due costanti positive c, C tali che per ogni $x \in X$ valga

$$c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Sarà adottata la notazione per cui X^* rappresenta lo spazio duale topologico di X, cioè lo spazio dei funzionali lineari continui (o limitati), che è uno spazio di Banach se munito della norma $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$. Analogamente, X^{**} è il biduale (topologico) di X^*. Ricordiamo che uno spazio si dice *riflessivo* qualora la mappa canonica lineare e iniettiva

$$\begin{array}{rcl} \Psi : X & \to & X^{**} \\ x & \mapsto & \psi_x \text{ definita da } \psi_x(f) = f(x)\ \forall f \in X^* \end{array}$$

risulti essere anche surgettiva, cosicché $X \cong X^{**}$.

Il nostro scopo è dimostrare attraverso una serie di lemmi il risultato seguente. Ci si riferisce a [1] per una esposizione dell'argomento.

Teorema A.0.5 (Principio di Riflessività Locale)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Siano F un sottospazio di dimensione finita di X^{**} e sia G un sottospazio di dimensione finita di X^*. Allora, dato $\epsilon > 0$, esistono un sottospazio E di X che contiene $F \cap X$, di dimensione $\dim E = \dim F$, ed un isomorfismo lineare $T : F \to E$ con $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$ e tale che*

$$Tx = x \text{ per } x \in F \cap X$$

e

$$x^*(Tx^{**}) = x^{**}(x^*) \textit{ per } x^* \in G, x^{**} \in F.$$

Questo permette di affermare in particolare che X^{**} è finitamente rappresentabile in X, ossia che dati un qualsiasi sottospazio di dimensione finita $F \subset X^{**}$ ed $\epsilon > 0$ esistono un sottospazio $E \subset X$ della stessa dimensione ed un isomorfismo $T : F \to E$ che si discosti dall'identità quanto poco si voglia, verificando $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$. In questo senso il principio afferma che ogni spazio di Banach è localmente riflessivo.

È utile osservare che, con le notazioni appena usate, le mappe T relative agli F si possono sostituire con operatori proporzionali. Scegliendo ad esempio $\|T^{-1}\| = 1$, la mappa T verifica

$$(1-\epsilon)\|x\| \le \|Tx\| \le (1+\epsilon)\|x\| \quad \text{per } x \in F.$$

Richiamiamo qualche risultato fondamentale di Analisi Funzionale.

Teorema A.0.6 (della Mappa Aperta)**.** *Sia $T : X \to Y$ un operatore limitato tra spazi di Banach. Allora*

(i) Se esiste un reale $\delta > 0$ tale che $\delta B_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$, allora T è una applicazione aperta;

(ii) Se T è surgettiva, allora vale l'ipotesi del punto (i), e quindi T è aperta.

Teorema A.0.7 (di Hahn-Banach)**.** *Sia y^* un funzionale lineare limitato su un sottospazio Y di uno spazio normato X. Allora esiste $x^* \in X^*$ tale che $\|x^*\| = \|y^*\|$ e $x^*|_Y = y^*$.*

Corollario A.0.8. *Siano X uno spazio normato, Y un suo sottospazio e $x \in X \setminus \overline{Y}$. Allora esiste $x^* \in X^*$ tale che $x^*|_Y = 0$ e $x^*(x) = 1$.*

Teorema A.0.9 (di Separazione di Hahn-Banach)**.** *In uno spazio di Banach X, siano dati due sottoinsiemi $A, B \subset X$ convessi. Si supponga inoltre che A sia aperto. Allora esistono $x^* \in X^*$ ed un numero reale t tali che*

$$x^*(a) < t \le x^*(b) \textit{ per ogni } a \in A, b \in B.$$

I prossimi lemmi illustrano alcune proprietà degli operatori lineari limitati con immagine chiusa. Sia $T : X \to Y$ un operatore limitato tra spazi gli di Banach X e Y. Essendo $\ker(T)$ un sottospazio chiuso di X, consideriamo lo spazio quoziente $X/\ker(T)$, che è di Banach se munito della norma

$$\|[x]\| = d(x, \ker(T)),$$

e denotiamo con π la proiezione al quoziente. Poiché ovviamente $\ker(T) = \ker(\pi)$, esiste un operatore lineare continuo T_0 che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[ur, "T_0"'] & \end{tikzcd}$$

L'operatore T_0 è definito da $T_0[x] = T(x)$ per ogni $[x] \in X/\ker(T)$. In questa situazione vale dunque

$$\|Tx\| \leq \|T_0\|\|[x]\| = \|T_0\|d(x, \ker(T)) \text{ per ogni } x \in X.$$

In aggiunta, l'immagine $T(X)$ è chiusa in Y se e solo se T_0 è un isomorfismo su $T(X)$ con inverso $T_0^{-1} : T(X) \to X/\ker(T)$ di norma

$$\|T_0^{-1}\| = \sup_{y \in T(X) \setminus \{0\}} \frac{\|T_0^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup_{x \notin \ker(T)} \frac{d(x, \ker(T))}{\|Tx\|}.$$

In conclusione, $T(X)$ è chiuso se e solo se esistono due costanti positive c e C tali che

$$cd(x, \ker(T)) \leq \|Tx\| \leq Cd(x, \ker(T)) \text{ per ogni } x \in X.$$

Lemma A.0.10. *Sia $T : X \to Y$ un operatore limitato con immagine chiusa. Supponiamo che un punto $y \in Y$ sia tale che l'equazione $T^{**}x^{**} = y$ ha una soluzione $x^{**} \in X^{**}$ di norma $\|x^{**}\| < 1$. Allora l'equazione $Tx = y$ ha una soluzione $x \in X$ di norma $\|x\| < 1$.*

Dimostrazione. Basta vedere che $y \in T(U_X)$. Ragionando per assurdo, supponiamo inizialmente che $y \notin T(X)$. Poiché $T(X)$ è chiuso, esiste un elemento $y^* \in Y^*$ tale che $y^*(y) = 1$ e $T^*y^* = y^*T = 0$, ma ciò conduce alla contraddizione $0 = x^{**}(T^*y^*) = T^{**}x^{**}(y^*) = y(y^*) = 1$.

Allora supponiamo che $y \in T(X) \setminus T(U_X)$. Per il teorema della mappa aperta, $T(U_X)$ è aperto in T(X). Essendo T lineare, $T(U_X)$ è anche convesso. Allora per il teorema di separazione di Hahn-Banach esiste $y^* \in Y^*$ tale che

$$y^*(y) \geq 1 \text{ e } y^*(Tx) < 1 \text{ per ogni } x \in U_X.$$

Dunque $\|T^*y^*\| = \sup_{x \in B_X} \|y^*(Tx)\| \leq 1$, che col fatto che $\|x^{**}\| < 1$ dà la contraddizione $|y^*(y)| = |x^{**}(T^*y^*)| < 1$. Perciò non rimane che l'eventualità $y \in T(U_X)$, come desiderato. $\square$

Lemma A.0.11. *Siano $T : X \to Y$ un operatore limitato con immagine chiusa e $K : X \to Y$ un operatore limitato con rango finito. Allora $T + K$ ha immagine chiusa.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $T + K$ non abbia immagine chiusa. Esiste quindi una successione limitata $(x_n)_{n\geq 1}$ che soddisfa

$$\lim_{n\to\infty}(T+K)(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad d(x_n, \ker(T+K)) \geq 1 \ \forall n \geq 1. \tag{A.1}$$

Infatti in tal caso si trova una successione $(z_n)_{n\geq 1}$ tale che per ogni $n \geq 1$ vale $\|(T+K)z_n\| < 1/n \ d(z_n, \ker(T+K))$, cosicché la successione $x_n = z_n/d(z_n, \ker(T+K))$ soddisfa le relazioni (A.1).

A meno di passare ad una sottosuccessione, si può assumere che $(Kx_n)_{n\geq 1}$ converge ad un punto $y \in Y$, per cui la prima delle condizioni precedenti si riscrive come $\lim_n Tx_n = -y$. Poiché T ha immagine chiusa, esiste $x \in X$ tale che $Tx = -y$, dunque $\lim_n d(x_n - x, \ker T) = \lim_n \|Tx_n - Tx\| = 0$. Ne segue che $y - Kx \in K(\ker T)$ e scriviamo $y - Kx = Ku$ con $u \in \ker T$. Allora discende dalle ultime relazioni che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n - x - u, \ker(T)) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \|Kx_n - Kx - Ku\| = 0.$$

Poiché $K|_{\ker T}$ ha immagine chiusa, si ha

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n - x - u, \ker(T) \cap \ker(K)) = 0.$$

Ma $T(x+u) = -y = -K(x+u)$, da cui $x + u \in \ker(T+K)$, e quindi $\lim_n d(x_n, \ker(T+K)) = 0$, contrariamente a quanto espresso dalla seconda delle condizioni (A.1). $\square$

Andiamo ad impiegare i risultati precedenti per provare il prossimo lemma. Sarà grazie a questo che costruiremo l'isomorfismo T che compare nell'enunciato del Teorema A.0.5.

Lemma A.0.12. *Siano X uno spazio di Banach, $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{m,n}$ e $B = (b_{jk})_{j,k=1}^{p,n}$ due matrici reali di dimensioni rispettivamente $m \times n$ e $p \times n$. Siano $y_1, \dots, y_m \in X$, $y_1^*, \dots, y_p^* \in X^*$, e $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}$. Si supponga che esistano $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$ soddisfacenti le condizioni*

(a) $\max_{1\leq k\leq n} \|x_k^{**}\| < 1$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k^{**} = y_j$ *per ogni* $1 \leq j \leq m$;

(c) $y_j^*\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k^{**}\Big) = \xi_j$ *per ogni* $1 \leq j \leq p$.

Allora esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ che soddisfano le (stesse) condizioni *(a')* $\max_{1\leq k\leq n} \|x_k\| < 1$;

(b') $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = y_j$ *per ogni* $1 \leq j \leq m$;

(c') $y_j^*\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\Big) = \xi_j$ *per ogni* $1 \leq j \leq p$.

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore $T_0 : \ell_\infty^n(X) \to \ell_\infty^m(X)$ definito da

$$T_0(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\Big)_{j=1}^{m}.$$

Facciamo vedere che T_0 ha immagine chiusa, volendo impiegare il Lemma A.0.10 per trovare i vettori x_k, $1 \leq k \leq n$.

Procedendo con le mosse di Gauss, la matrice A si può scrivere nella forma $A = PDQ$ dove $P \in Gl(m)$, $Q \in Gl(n)$ e $D \in \mathcal{M}_{m\times n}$ è della forma

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove r è il rango di A. Allora è possibile fattorizzare a sua volta l'operatore T_0 nel modo $T_0 = USV$, dove U e V sono invertibili ed S è associato alla matrice D, ed ha quindi immagine chiusa.

Definiamo ora l'operatore $T : \ell_\infty^n(X) \to \ell_\infty^m(X) \oplus_\infty \ell_\infty^p(\mathbb{R})$ ponendo

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \bigg(T_0(x_1, \ldots, x_n), \Big(y_j^*\big(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\big)\Big)_{j=i}^{p}\bigg).$$

Il simbolo $\oplus_\infty$ tra due spazi indica il prodotto cartesiano su cui si pone la norma del sup. Per il Lemma A.0.11, dato che T_0 ha immagine chiusa e la seconda componente di T ha immagine di dimensione finita, anche T ha immagine chiusa, e per il Lemma A.0.10 l'equazione

$$Tx = \big((y_j)_{j=1}^m, (\xi_j)_{j=1}^p\big)$$

ammette una soluzione $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_\infty^n(X)$ con norma

$$\|x\| = \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\| < 1$$

e verificante, proprio in qualità di soluzione, le condizioni (b') e (c') dell'enunciato. $\square$

Il prossimo risultato ci permetterà di provare che l'operatore che costruiremo è vicino all'identità. Premettiamo una definizione.

Definizione A.0.1. Siano (E, d) è uno spazio metrico, $A \subset E$ un suo sottoinsieme e sia ϵ un numero reale positivo. Chiameremo *ϵ-reticolo* su A una famiglia $(x_i)_{i \in I}$ di punti di A tali che per ogni $a \in A$ esiste un x_i con $d(a, x_i) \leq \epsilon$.

Si osserva subito che su un compatto $K \subset E$ esistono ϵ-reticoli costituiti da un numero finito di punti.

Lemma A.0.13. *Siano X uno spazio di Banach ed E uno vettoriale spazio normato di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Supponiamo assegnato un ϵ-reticolo $(x_j)_{j=1}^N$ sulla sfera unitaria $S_E \subset E$, dove $0 < \epsilon < 1$. Sia inoltre $T : E \to X$ una applicazione lineare tale che*

$$1 - \epsilon \leq \|Tx_j\| \leq 1 + \epsilon \qquad \text{per } j = 1, \ldots, N.$$

Allora per ogni vettore $e \in E$ risultano valide le disuguaglianze

$$\left(\frac{1 - 3\epsilon}{1 - \epsilon}\right)\|e\| \leq \|Te\| \leq \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)\|e\|. \tag{A.2}$$

Dimostrazione. Il vettore nullo verifica banalmente le (A.2). Negli altri casi, per linearità si può supporre che $\|e\| = 1$. Sia dunque x_j un punto dell'ϵ-reticolo che dista da e al più ϵ. Allora grazie alle ipotesi

$$\|Te\| \leq \|Te - Tx_j\| + \|Tx_j\| \leq \|T(e - x_j)\| + (1 + \epsilon) \leq \|T\|\epsilon + (1 + \epsilon)$$

e quindi, con l'arbitrarietà di $e \in S_E$, guardando il primo e l'ultimo termine della catena di disuguaglianze sopra si ottiene

$$\|T\| \leq \|T\|\epsilon + (1 + \epsilon).$$

Quest'ultima si riscrive

$$\|T\| \leq \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon},$$

da cui la seconda delle disuguaglianze (A.2). Anche la prima segue dalla precedente, sfruttando diseguaglianze analoghe a quelle sopra:

$$\|Te\| \geq (1 - \epsilon) - \|T\|\epsilon \geq \frac{1 - 3\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

□

Veniamo infine a provare il Principio di Riflessività Locale.

Teorema A.0.5. *Sia X uno spazio di Banach. Siano F un sottospazio di dimensione finita di X^{**} e sia G un sottospazio di dimensione finita di X^*. Allora, dato $\epsilon > 0$, esistono un sottospazio E di X che contiene $F \cap X$,* *di dimensione* $\dim E = \dim F$, *ed un isomorfismo lineare* $T : F \to E$ *con* $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$ *e tale che*

$$Tx = x \text{ per } x \in F \cap X$$

e

$$x^*(Tx^{**}) = x^{**}(x^*) \text{ per } x^* \in G, x^{**} \in F.$$

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$, scegliamo un numero reale $\nu > 0$ tale che

$$\frac{1+\nu}{1-3\nu} > 1 + \epsilon$$

e prendiamo un ν-reticolo $(x_j^{**})_{j=1}^N$ di punti del compatto $S_F = \{x^{**} \in F : \|x^{**}\| = 1\}$. Definiamo l'operatore $S : \mathbb{R}^N \to F$ ponendo

$$S(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j x_j^{**}.$$

Sia allora $H = S^{-1}(F \cap X)$ e fissiamo una base $(a^{(j)})_{j=1}^m$ per H. Chiamiamo $y_j = S(a^{(j)}) \in F \cap X$ e definiamo la matrice $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{m,N}$ che ha per righe i vettori della base di H, ossia

$$A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jN}) = a^{(j)} \text{ per ogni } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Ora scegliamo dei funzionali $x_1^*, \ldots, x_N^* \in X^*$ ciascuno di norma $\|x_j^*\| = 1$ e tale che $x_j^{**}(x_j^*) > 1 - \nu$. Infine, sia $\{g_1^*, \ldots, g_l^*\}$ una base di G.

Consideriamo il sistema di equazioni in $x_1, \ldots, x_N$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{jk} x_k = y_j & \text{per } j = 1, \ldots, m \\ x_j^*(x_j) = x_j^{**}(x_j^*) & \text{per } j = 1, \ldots, N \\ g_j^*(x_j) = x_j^{**}(g_j^*) & \text{per } j = 1, \ldots, l. \end{cases} \tag{A.3}$$

Per costruzione, la N-upla $(x_1^{**}, \ldots, x_N^{**})$ di elementi di X^{**} è una soluzione del sistema (A.3) con $\max_j \|x_j^{**}\| = 1 < 1 + \nu$, e allora il Lemma A.0.12 assicura l'esistenza di una soluzione $(x_1, \ldots, x_n)$ in X dello stesso (A.3) verificante anch'essa la condizione $\max_j \|x_j\| < 1 + \nu$.

Sia ora $S_1 : \mathbb{R}^N \to X$ l'operatore definito da

$$S_1(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j x_j.$$

Si ha che $\ker(S) \subset \ker(S_1)$, infatti sui vettori della base $(a^{(j)})$ di H, le mappe lineari S e S_1 assumono gli stessi valori y_j. Esiste dunque un operatore

$T : F \to X$ tale che $S_1 = TS$. Prendiamo $E = T(F)$. Poiché $\|x_j\| \geq x_j^*(x_j) > 1 - \nu$ si ha che per $1 \leq j \leq N$ vale

$$1 - \nu < \|x_j\| < 1 + \nu.$$

Ciò permette di applicare il lemma precedente e trovare che $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$. Le altre proprietà valgono per costruzione. $\square$

Appendice B

Altri complementi

Per ultimo andiamo a risolvere alcuni semplici esercizi che sono ripresi nel tentativo di prova di 3.5.4. Si tratta di calcoli di spazi duali e calcoli di cardinalità.

Proposizione B.0.14. *1.* $c_0(I)^* \cong \ell_1(I)$*;*

2. $c_0(I)^{**} \cong \ell_\infty(I)$*.*

Dimostrazione. 1. Ogni $z \in \ell_1(I)$ induce un funzionale lineare limitato

$$\varphi_z = \varphi : c_0(I) \to \mathbb{R} \quad \text{dato da} \quad \varphi(x) = \textstyle\sum_{i \in I} z_i x_i.$$

È immediato constatare la linearità di φ. Inoltre per ogni $x \in \ell_\infty(I)$ si ha

$$|\varphi(x)| \leq \textstyle\sum_{i \in I} |z_i||x_i| \leq \|x\|_\infty \|z\|_1,$$

perciò φ è limitato. Per giunta, si riconosce che $\|\varphi\| = \|z\|_1$.

Vediamo allora che ogni funzionale lineare limitato su $c_0(I)$ è del tipo descritto. Dato $\varphi \in c_0(I)^*$, troviamo $z \in \ell_1(I)$ tale che $\varphi = \varphi_z$. Per ogni $i \in I$, sia $e_i \in c_0(I)$ definito da $e_i(i) = 1$ e $e_i(j) = 0$ se $j \neq i$. Allora per ogni $x \in c_0(I)$ si ha

$$|\varphi(x)| = |\varphi\big(\textstyle\sum_{i \in I} x(i) e_i\big)| \leq \textstyle\sum_{i \in I} |x(i)||\varphi(e_i)| \leq c\|x\|_\infty,$$

dove $c = \sum_{i \in I} |\varphi(e_i)| < \infty$. Infatti supponiamo per assurdo che tale somma diverga: per ogni $L > 0$ esiste $I_0 \subset I$ finito tale che $\sum_{i \in I_0} |\varphi(e_i)| > L$. Allora prendiamo la famiglia $(f_i)_{i \in I}$ di elementi di $c_0(I)$ definita da

$$f_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin I_0, \\ e_i & \text{se } i \in I_0 \text{ e } \varphi(e_i) \geq 0, \\ -e_i & \text{se } i \in I_0 \text{ e } \varphi(e_i) < 0. \end{cases}$$

A questo punto, la somma finita $\sum_{i \in I} f_i$ ha norma $\| \sum_i f_i \|_\infty = 1$ ma $|\varphi(\sum_i f_i)| = \sum_i |\varphi(e_i)| > L$, trovando la contraddizione che φ non è limitato. Quindi l'elemento $z = (\varphi(e_i))_{i \in I} \in \ell_1(I)$ induce il funzionale φ.

2. Vediamo che $\ell_1(I)^* \cong \ell_\infty(I)$. Se $x \in \ell_\infty(I)$, allora $\varphi_x = \varphi$ definito da $\varphi(z) = \sum_{i\in I} z_i x_i$ per ogni $z \in \ell_1(I)$ è lineare e limitato, con $\|\varphi\| = \|x\|_\infty$.

D'altra parte, se $\varphi \in \ell_1(I)^*$ e $x \in \ell_1(I)$, allora

$$|\varphi(x)| \leq \textstyle\sum_{i\in I} |x_i||\varphi(e_i)| \leq \sum_{i\in I} |x_i|\|\varphi\| = \|\varphi\|\|x\|_1.$$

Dunque φ induce l'elemento $x = (\varphi(e_i))_{i\in I} \in \ell_\infty(I)$. $\square$

Lemma B.0.15. *Siano α un ordinale limite e β tale che $\aleph_\beta < \operatorname{cof} \aleph_\alpha$. Supponiamo inoltre che per ogni $\xi < \alpha$ si abbia $\aleph_\xi^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$. Allora*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha.$$

Dimostrazione. Sia $(A_i)_{i\in\alpha}$ una partizione di ω_α composta da elementi di cardinalità $\aleph_\alpha$. Per ogni $\xi < \alpha$ denotiamo con F_ξ una mappa iniettiva $F_\xi : \omega_\xi^{\omega_\beta} \to A_\xi$. Per l'ipotesi $\aleph_\beta < \operatorname{cof} \aleph_\alpha$, se $X \subset \omega_\alpha$ ha cardinalità $|X| \leq \aleph_\beta$, allora esiste uno $\xi < \alpha$ tale che $X \subset \omega_\xi$. Poniamo infine $\xi_f = \min\{\xi < \alpha : f(\omega_\beta) \subset \omega_\xi\}$ per $f \in \omega_\alpha^{\omega_\beta}$. Allora la funzione

$$\begin{array}{rcl} F : \omega_\alpha^{\omega_\beta} & \to & \omega_\alpha \\ f & \mapsto & F_{\xi_f}(f) \end{array}$$

è iniettiva. È così provata la disuguaglianza $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$. $\square$

Dal risultato precedente segue in particolare che se $\aleph_\alpha$ è limite forte e $\aleph_\beta < \operatorname{cof} \aleph_\alpha$, allora $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Si vede quindi che se $\aleph_\alpha$ è fortemente inaccessibile e $\beta < \alpha$, allora vale la stessa uguaglianza $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Di nostro interesse è il caso base $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ per un cardinale fortemente inaccessibile κ. Per convincerci che questa proprietà per un cardinale non è banale, osserviamo che se valesse $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, allora $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ e quindi $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.

Proposizione B.0.16. *Sia κ un cardinale infinito. Allora*

1. *$|\ell_\infty(\kappa)| = 2^\kappa$;*

2. *se κ è fortemente inaccessibile, allora $|c_0(\kappa)| = \kappa$.*

Dimostrazione. 1. Essendo $\ell_\infty(\kappa) \subset \mathbb{R}^\kappa$, si deve avere $|\ell_\infty(\kappa)| \leq (2^{\aleph_0})^\kappa = 2^{\aleph_0 \cdot \kappa} = 2^\kappa$. Inoltre si trovano 2^κ elementi distinti di $\ell_\infty(\kappa)$. Basta infatti prendere le funzioni indicatrici χ_A al variare di $A \in \mathcal{P}(\kappa)$.

2. Per ogni naturale n e ogni $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\kappa} \in c_0(\kappa)$, denotiamo con $A_n(x)$ l'insieme di indici $A_n(x) = \{\alpha \in \kappa : |x_\alpha| > \frac{1}{n}\}$. Allora

$$c_0(\kappa) = \{x : \kappa \to \mathbb{R} : \ \forall n \in \omega \ |A_n(x)| < \aleph_0\},$$

e quindi per ogni $x \in c_0(\kappa)$ si ha che l'insieme

$$A(x) = \bigcup_{n\in\omega} A_n(x) = \{\alpha \in \kappa : |x_\alpha| > 0\}$$

è numerabile. Indichiamo con $[\kappa]^{\leq\aleph_0}$ l'insieme delle parti al più numerabili di κ. Allora si può definire la mappa iniettiva

$$\begin{array}{rcl} F : c_0(\kappa) & \to & [\kappa]^{\leq\aleph_0} \\ x & \mapsto & A(x) \end{array}$$

provando così che $|c_0(\kappa)| \leq \kappa^{\aleph_0} = \kappa$, dove l'ultima uguaglianza si ha perché κ è fortemente inaccessibile. Per la disuguaglianza opposta basta notare che le funzioni indicatrici $\chi_{\{\alpha\}}$ per $\alpha \in \kappa$ sono κ elementi distinti di $c_0(\kappa)$. $\square$

Bibliografia

[1] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, 2006.

[2] M. M. Day, Strict convexity and smoothness, *Transactions of the American Mathematical Society* **78** (1955), 516-528.

[3] S. Heinrich, Ultraproducts in Banach space theory, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **313** (1980), 72-104.

[4] T. Jech, *Set Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[5] T. Kania, T. Kochanek, Steinhaus' lattice-point problem for Banach spaces, preprint (2013) arXiv:1302.6443v2 [math.FA].

[6] N. Y. Luther, A decomposition of measures, *Canadian Journal of Mathematics* **20** (1968), 953-958.

[7] M. Pratelli, *Un corso di Calcolo delle Probabilià*, appunti del docente disponibili su `http://www.dm.unipi.it/~pratelli/Didattica/`.

[8] H. Steinhaus, *Cento problemi di matematica elementare*, Superuniversale, Bollati Boringhieri, 1987.

[9] P. Zwoleński, Some generalization of Steinhaus' lattice points problem, *Colloquium Mathematicum* **123** (2011), 129-132.