Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Grado Topologico

28 ottobre 2011
Tesi di Laurea Triennale

Candidato
**Felice Iandoli**
iandoli@mail.dm.unipi.it

Relatore
**Prof. Paolo Acquistapace**
Università di Pisa

Anno Accademico 2010/2011

# Indice

# Introduzione

La teoria del grado topologico è un fondamentale strumento dell'analisi non lineare: tra le molteplici applicazioni, esso permette di stimare il numero di soluzioni di certe equazioni, è intimamente connesso con la teoria dei punti fissi ed ha importanti usi nello studio delle equazioni differenziali e delle inclusioni funzionali, nella teoria dei sistemi dinamici e nei problemi di complementarità di ricerca operativa.
Storicamente la teoria del grado topologico trae origine dalla nozione di indice di avvolgimento di una curva piana attorno ad un punto: esso conta quante volte la curva gira intorno al punto, tenendo conto del verso di rotazione. Questo concetto era già essenzialmente noto a Gauss e Cauchy. La teoria del grado ha avuto importanti contributi da innumerevoli autori: da Kronecker a Hadamard, da Poincarè a Brower, fino ai più recenti ma ormai classici lavori di Sard, fondamentali dal punto di vista dell'analisi matematica; grazie ad essi si definisce il grado topologico per mappe continue non solo su $\mathbb{R}^N$ o tra varietà finito-dimensionali, ma anche in spazi più generali.
Ulteriori progressi sono stati fatti grazie a Brézis e Nirenberg, che hanno esteso il grado topologico a funzioni, non necessariamente continue, appartenenti allo spazio di Sobolev $H^{\frac{1}{2}}$, oppure allo spazio delle funzioni ad oscillazione media infinitesima $VMO$.
L'obiettivo principale di questa tesi è la descrizione di queste estensioni. Naturalmente l'esposizione parte dalla teoria classica del grado in dimensione finita: questo è l'oggetto del capitolo 1.
Nel capitolo 2 viene trattata l'estensione del grado agli spazi $VMO(X, Y)$, ove $X$ e $Y$ sono varietà Riemanniane finito-dimensionali regolari, compatte e senza bordo. Infine il capitolo 3 è dedicato all'estensione della teoria del grado in $H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ mostrandone lo stretto legame con le serie di Fourier; grazie a tale legame si verifica che le due estensioni del grado agli spazi $H^{\frac{1}{2}}$ e $VMO$ coincidono, come è giusto, nell'intersezione.

# Capitolo 1

# Teoria classica del grado topologico

In questo capitolo presenteremo la teoria classica del grado topologico. Costruiremo tale strumento prima per funzioni continue definite su aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}^N$ e poi per funzioni definite su varietà a valori in varietà.

## 1.1 Unicità

Iniziamo col dimostrare che esiste ed è unica una funzione, che chiameremo grado,

$$deg : M \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$M = \{(\Omega, f, y) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua, $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)\}$, che soddisfa:

1. $deg(\Omega, id, y) = 1 \quad$ per ogni $\quad y \in \Omega$;
2. $deg(\Omega, f, y) = deg(\Omega_1, f, y) + deg(\Omega_2, f, y)$ se $\Omega_1$ , $\Omega_2$ sono aperti contenuti in $\Omega$ tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$;
3. $deg(\Omega, h(t, \cdot), y(t))$ è indipendente da $t \in J = [0, 1]$ per ogni funzione continua $h : J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, per ogni funzione continua $y : J \to \mathbb{R}^N$ e tale che $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ per ogni $t \in J$.

Assumendo che tale funzione esista ne proveremo l'unicità. L'idea della dimostrazione è quella di procedere per passi. Posto $\overline{C}^k(\Omega) := C^0(\overline{\Omega}) \cap C^k(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, mostreremo che esiste un'opportuna funzione $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ che approssima la nostra $f$ continua e che ha lo stesso grado. Poi proveremo che è sufficiente calcolare il grado di $g$ solo su opportuni valori regolari. Infine che esiste una funzione lineare che ha lo stesso grado di $g$. A questo punto risulta relativamente semplice dimostrarne l'unicità.

### 1.1.1 Dalle funzioni $C^0(\overline{\Omega})$ alle funzioni $\overline{C}^\infty(\Omega)$.

**Proposizione 1.1.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un compatto, sia $f : A \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Allora esiste una funzione $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continua tale che $\widetilde{f}_{|A} \equiv f$.*

*Dimostrazione.* Poiché $A$ è compatto esiste un sottoinsieme denso numerabile $\{a_1, a_2, ...\}$. Sia $dist(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$, ossia la distanza di $x$ da $A$. Definiamo $\phi_i(x) = \max\{2 - \frac{|x-a_i|}{dist(x,A)}, 0\}$ per $x \notin A$. Allora:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \left(\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\phi_i(x)\right)^{-1} \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\phi_i(x) f(a_i) & x \notin A \end{cases}$$

è una estensione continua di $f$. □

**Proposizione 1.2.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un compatto, $f \in C^0(A)$ ed $\epsilon > 0$. Allora esiste una funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in A$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $\widetilde{f}$ l'estensione continua di $f$ su $\mathbb{R}^N$ costruita nella proposizione precedente. Definiamo la famiglia di funzioni:

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(\xi)\varphi_\alpha(\xi - x)d\xi$$

per $x \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha > 0$, dove $(\varphi_\alpha)_{\alpha>0}$ è la famiglia di mollificatori:

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi_\alpha(x) = \alpha^{-n}\varphi_1(\frac{x}{\alpha}),$$

ove

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} c \cdot \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}) & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $c > 0$ tale che $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(x)dx = 1$.
Abbiamo quindi che

$$\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\alpha(x)dx = 1,$$

$$\text{supp}(\varphi_\alpha) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi_\alpha(x) \neq 0\}} = \overline{B_\alpha(0)}$$

per ogni $\alpha > 0$.
Dunque si ha $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ perché convoluzione di una funzione continua con funzioni $C^\infty$ a supporto compatto.
Inoltre $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ uniformemente su $A$ per $\alpha \to 0$.
Quindi, fissato $\epsilon > 0$, basta scegliere $\alpha$ abbastanza piccolo e definire $g = f_\alpha$. □

Queste due proposizioni concludono il primo passo.
Infatti consideriamo $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$, allora si ha che

$$\alpha = dist(y, f(\partial\Omega)) > 0.$$

Abbiamo dimostrato che esiste una funzione $\overline{C}^\infty(\Omega)$ tale che

$$\max_{x \in A} |f(x) - g(x)| < \alpha.$$

Consideriamo ora la funzione:

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$h(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Chiaramente $h$ è continua, inoltre per ogni $x \in \partial\Omega$ si ha:

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y| &= |(f(x) - y) - t(f(x) - g(x))| \geq \\ &\geq |f(x) - y| - |f(x) - g(x)| \geq \\ &\geq \alpha - |f(x) - g(x)| > 0. \end{aligned}$$

Quindi $y \notin h(t, \partial\Omega)$. Allora dalla terza proprietà del grado si deduce che:

$$deg(\Omega, f, y) = deg(\Omega, g, y).$$

### 1.1.2 Dai valori singolari ai valori regolari.

**Proposizione 1.3** (Teorema di invertibilità locale)**.** *Sia $f \in C^1(\Omega)$ ed $x_0 \in \Omega$ tale che $\mathcal{J}_f(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno $U(x_0)$ di $x_0$ tale che $f_{|_{U(x_0)}}$ è un omeomorfismo con un intorno di $f(x_0)$.*

**Proposizione 1.4.** *Sia $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$ un valore regolare per $f$. Allora l'equazione $f(x) = y$ ha un numero finito di soluzioni.*

*Dimostrazione.* Dal teorema della funzione implicita sappiamo che le soluzioni di tale equazione sono isolate, cioè se $x_0 \in f^{-1}(y)$ allora esiste un intorno $U(x_0)$ di $x_0$ tale che $f^{-1}(y) \cap U(x_0) = \{x_0\}$. Supponiamo per assurdo che la cardinalità di $f^{-1}(y)$ sia infinita.
Poiché $\overline{\Omega}$ è un compatto deve esistere un punto di accumulazione $\overline{x}$ per i punti di $f^{-1}(y)$. Dal momento che $f$ è continua si ha che $f(\overline{x}) = y$ ed $\overline{x} \in \Omega$ in quanto $y \notin f(\partial\Omega)$.
Ma essendo $\overline{x}$ un punto di accumulazione non è isolato, una contraddizione. $\square$

**Lemma 1.5.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora esiste una famiglia numerabile di sfere $\mathcal{B}_i$ tali che $\overline{\mathcal{B}_i} \subseteq A$ e $A = \bigcup_i \mathcal{B}_i$.*

*Dimostrazione.* Se $A = \mathbb{R}^N$ allora la tesi è ovvia, in quanto basta prendere $\mathcal{B}_i(0)$ le palle di centro l'origine e raggio $i \in \mathbb{N}$. Assumiamo allora che $A \subset \mathbb{R}^N$. Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}^n \cap A, \;\; \mathcal{J}_x = \{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < dist(x, \partial A)\}.$$

Poiché $\mathcal{A}$ è numerabile, la famiglia di sfere definita come:

$$\mathcal{B} := \{B_r(x) : x \in \mathcal{A}, r \in \mathcal{J}_x\}$$

è numerabile. Poiché $\mathcal{A} \subset A$ dalla definizione di $\mathcal{J}_x$ segue che $\overline{B} \subset A$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. Facciamo vedere quindi che $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = A$. Sia $y \in A$ e $\delta := dist(y, \partial A)$. Poiché $\mathcal{A}$ è denso in $A$, esiste $x \in \mathcal{A}$ tale che $|x - y| < \frac{\delta}{4}$. Sia $r$ un razionale tale che

$$\frac{\delta}{4} < r < \frac{3\delta}{4}.$$

Se $z \in B_{3\delta/4}(x)$ allora:

$$|z - y| \leq |z - x| + |x - y| < \frac{3\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \delta,$$

cioè $z \in B_\delta(y) \subset A$; dunque $B_{3\delta/4}(x) \subset A$ e $r < dist(x, \partial A)$ il che implica che $r \in \mathcal{J}_x$. D'altra parte $|y - x| < \frac{\delta}{4} < r$, quindi $y \in B_r(x)$. $\square$

**Corollario 1.5.1.** *Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto possiamo scriverlo come unione numerabile di ipercubi.*

**Proposizione 1.6** (Lemma di Sard)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto ed $f \in C^1(\Omega)$. Detto $\mathcal{S}_f := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, \mathcal{J}_f(x) = 0\right\}$, si ha $\mu_N(f(\mathcal{S}_f)) = 0$, dove $\mu_N$ denota la misura di Lebesgue $N$-dimensionale.*

*Dimostrazione.* Poiché $\Omega$ è aperto in $\mathbb{R}^N$ possiamo scriverlo come unione numerabile di ipercubi: $\Omega = \bigcup_i \mathcal{Q}_i$.
È sufficiente mostrare allora che $\mu_N(f(\mathcal{S}_f(\mathcal{Q}))) = 0$ per ogni ipercubo $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ poiché $f(\mathcal{S}_f(\Omega)) = \bigcup_i f(\mathcal{S}_f(\mathcal{Q}_i))$. Sia $\rho$ la lunghezza del lato di $\mathcal{Q}$. Poiché $f \in C^1(\Omega)$ e $\mathcal{Q} \subset \Omega$ è un compatto, per il teorema di Heine-Cantor si ha che $f'$ è uniformemente continua su $\mathcal{Q}$. Quindi dato $\epsilon > 0$ troviamo $m \in \mathbb{N}$ tale che $|f'(x) - f'(\overline{x})| < \epsilon$ per ogni $x, \overline{x} \in \mathcal{Q}$ con $|x - \overline{x}| < \delta = \frac{\sqrt{N}\rho}{m}$, e quindi:

$$|f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x - \overline{x})| \leq \int_0^1 |f'(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})||x - \overline{x}|dt \leq \epsilon|x - \overline{x}|$$

per ogni $x, \overline{x}$ come sopra.
Scomponiamo $\mathcal{Q}$ in $r$ ipercubi $\mathcal{Q}^k$ di diametro $\delta$. Poiché $\frac{\delta}{\sqrt{N}}$ è la lunghezza del lato di $\mathcal{Q}^k$ abbiamo che $r = m^N$ e

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + \mathcal{R}(x, \overline{x}) \text{ con } |\mathcal{R}(x, \overline{x})| < \epsilon\delta \text{ per } x, \overline{x} \in \mathcal{Q}^k.$$

Supponiamo che $\mathcal{Q}^k \cap \mathcal{S}_f \neq \emptyset$ e prendiamo $\overline{x} \in \mathcal{Q}^k \cap \mathcal{S}_f$; sia $A = f'(\overline{x})$ e $g(y) = f(\overline{x}+y) - f(\overline{x})$ con $y \in \mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\}$. Si ha che:

$$g(y) = Ay + \widetilde{R}(y) \text{ con } |\widetilde{R}(y)| = |\mathcal{R}(\overline{x}+y, \overline{x})| < \epsilon\delta \text{ in } \mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\}.$$

Poiché $A$ non ha rango massimo sappiamo che $A(\mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\})$ è contenuto in un sottospazio $(N-1)$-dimensionale di $\mathbb{R}^N$. Allora esiste $b^1 \in \mathbb{R}^N$ con $|b^1| = 1$ e $(x, b^1) = \sum_{i=0}^N x_i {b_i}^1 = 0$ per ogni $x \in A(\mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\})$. Estendiamo $b^1$ ad una base ortonormale $\{b^1, ..., b^N\}$ di $\mathbb{R}^N$, abbiamo che $g(y) = \sum_{i=0}^N (g(y), b^i) b^i$ con

$$|(g(y), b^1)| = |(\widetilde{R}(y), b^1)| \leq |\widetilde{R}(y)||b^1| \leq \epsilon\delta \text{ su } \mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\}$$

e

$$|(\widetilde{R}(y), b^i)| \leq |A||y| + |\widetilde{R}(y)| \leq |A\delta| + \epsilon\delta \text{ per ogni } i = 1, \cdots, n;$$

dove

$$|A| = \left( \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Così, $f(\mathcal{Q}^k) = f(\overline{x}) + g(\mathcal{Q}^k - \{\overline{x}\})$ è contenuto in un intervallo $J_k$ contenente $f(\overline{x})$ soddifacente:

$$\mu_N(J_k) = [2(|A|\delta + \epsilon\delta)]^{N-1} \cdot 2\epsilon\delta = 2^N (|A| + \epsilon)^{N-1} \epsilon \delta^N.$$

Dal momento che $f'$ è limitata sull'ipercubo più grande $\mathcal{Q}$, si ha che $|f'(x)| \leq c$ per qualche $c > 0$, in particolare $|A| \leq c$. Quindi $f(\mathcal{S}_f(\mathcal{Q})) \subseteq \bigcup_{k=1}^r J_k$ con

$$\sum_{k=1}^r \mu_N(J_k) \leq r \cdot 2^N (c+\epsilon)^{N-1} \epsilon \delta^N = 2^N (c+\epsilon)^{N-1} (\sqrt{N}\rho)^N \epsilon,$$

quindi $f(\mathcal{S}_f(\mathcal{Q}))$ ha misura 0 per l'arbitrarietà di $\epsilon$. □

Con questi risultati abbiamo concluso il secondo passo. Infatti sia $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ un qualsiasi punto. Allora se

$$\alpha = dist(y_0, f(\partial\Omega))$$

si ha che

$$B_\alpha(y_0) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset.$$

Prendendo

$$h(t,x) = f(x),\ y(t) = ty_0 + (1-t)y$$

dalla terza proprietà del grado si deduce che

$$deg(\Omega, f, y) = deg(\Omega, f, y_0) \text{ per ogni } y \in B_\alpha(y_0).$$

D'altra parte ora siamo sicuri per il Lemma di Sard che $B_\alpha(y_0)$ contiene, come volevamo, dei valori regolari.

### 1.1.3 Dalle mappe $\overline{C}^{\infty}(\Omega)$ alle mappe lineari.

Arrivati a questo punto della nostra semplificazione dobbiamo necessariamente considerare delle mappe $f \in \overline{C}^{\infty}(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega \cup \mathcal{S}_f)$. Supponiamo dapprima che $f^{-1}(y) = \emptyset$. Presi $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = \emptyset$ otteniamo che $deg(\Omega, f, y) = deg(\Omega_1, f, y)$ ogni qual volta $\Omega_1$ è un sottoinsieme aperto di $\Omega$ tale che $y \notin f(\overline{\Omega}) \setminus \Omega_1)$. Quindi se $f^{-1}(y) = \emptyset$ si ha per la seconda proprietà del grado

$$deg(\Omega, f, y) = deg(\emptyset, f, y) = 0.$$

Vediamo ora il caso in cui $f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Scegliamo degli intorni disgiunti $U_i$ di $x_i$ ed otteniamo che:

$$deg(\Omega, f, y) = \sum_{i=1}^{n} deg(U_i, f, y).$$

Vediamo quindi di studiare meglio $deg(U_i, f, y)$. Sia $A = f'(x_i)$, ed osserviamo che

$$f(x) = y + A(x - x_i) + o(|x - x_i|), \text{ quando } |x - x_i| \to 0.$$

Poiché $\det(A) \neq 0$ sappiamo che esiste $A^{-1}$, e quindi $|z| = |A^{-1}Az| \leq |A^{-1}||Az|$, cioè $|Az| \geq c|z|$ su $\mathbb{R}^N$ per qualche $c > 0$. Prendendo $y(t) = ty$ e $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)A(x - x_i)$ si ha:

$$|h(t, x) - y(t)| = |A(x - x_i) + to(|x - x_i|)| \geq c|x - x_i| - o(|x - x_i|) > 0$$

per ogni $t \in [0, 1]$, ammesso che $|x - x_i| < \delta$ con $\delta$ piccolo a sufficienza. Quindi per la terza proprietà del grado si ha che $deg(f, B_\delta(x_i), y) = deg(A - Ax_i, B_\delta(x_i), 0)$. Poiché $f(x) \neq y$ per ogni $x \in \overline{U_i} \setminus B_\delta(x_i)$, si ha che $deg(f, U_i, y) = deg(f, B_\delta(x_i), y)$, e quindi

$$deg(f, U_i, y) = deg(A - Ax_i, B_\delta(x_i), 0).$$

Poiché $x_i$ è l'unica soluzione di $Ax - Ax_i = 0$ la seconda proprietà del grado ci dice che:

$$deg(A - Ax_i, B_\delta(x_i), 0) = deg(A - Ax_i, B_r(0), 0)$$

per $B_r(0) \supset B_\delta(x_i)$, e $A(x - tx_i) \neq 0$ su $[0, 1] \times \partial B_r(0)$; ciò ci assicura che:

$$deg(f, U_i, y) = deg(f'(x_i), B_r(0), 0)$$

per la terza proprietà del grado. Infine $r > 0$ è arbitrario per la seconda proprietà.

### 1.1.4 Unicità

L'unica cosa che ci resta da dimostrare è che $deg(A, B_r(0), 0)$ è univocamente determinato se $A$ è una mappa lineare con $\det(A) \neq 0$. Ci viene in aiuto un risultato riguardo la forma canonica di Jordan di cui daremo l'enunciato omettendo la dimostrazione.

**Proposizione 1.7.** *Sia $A$ una matrice reale di dimensione $N$ con $\det(A) \neq 0$, siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ i suoi autovalori negativi ed $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ le loro molteplicità algebriche, ammesso che $A$ abbia tali autovalori. Allora $\mathbb{R}^N$ è somma diretta di due sottospazi $N$ ed $M$, $\mathbb{R}^N = N \oplus M$, tali che:*

- *$N$ ed $M$ sono $A$-invarianti*
- *$A_{|N}$ ha solo gli autovalori $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ e $A_{|M}$ non ha autovalori negativi.*
- *$dim(N) = \sum_{k=1}^m \alpha_k$.*

Vogliamo provare che $deg(A, \Omega, 0) = sign(\det A)$. Nelle notazioni della proposizione precedente si ha

$$\det(A - \lambda id) = (-1)^N \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^N (\lambda - \mu_j)^{\beta_j}.$$

Allora

$$\det A = (-1)^\alpha \prod_{k=1}^m |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^N \mu_j^{\beta_j}$$

con

$$\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k = dimN,$$

da cui $sign(\det A) = (-1)^\alpha$. Ora, se $A$ non ha autovalori negativi si ha

$$\det(tA + (1-t)id) \neq 0 \text{ in } [0,1],$$

e quindi

$$deg(A, B_r(0), 0) = deg(id, B_r(0), 0) = 1 = sign(\det A).$$

Per cui consideriamo il caso $N \neq \{0\}$ e scriviamo per comodità $\Omega$ in luogo di $B_r(0)$. Distinguiamo i casi in cui $\alpha = dimN$ è pari oppure è dispari.

$\alpha = dimN$ **pari.** Poiché $\mathbb{R}^N = N \oplus M$ ogni vettore $x \in \mathbb{R}^N$ ha un'unica rappresentazione $x = P_1 x + P_2 x$ con $P_1 x \in N$ e $P_2 x \in M$. Definiamo quindi le proiezioni lineari:

$$P_1 : \mathbb{R}^N \to N \text{ e } P_2 = id - P_1 : \mathbb{R}^N \to M.$$

Allora $A = AP_1 + AP_2$ è una decomposizione diretta di $A$ in quanto per la proposizione precedente si ha che $A(N) \subset N$ e $A(M) \subset M$.

Poiché $AP_1$ ha solo autovalori negativi, allora $AP_2$ non ne ha, sempre per la proposizione precedente. È facile dimostrare ora che $A$ è omotopa a $-P_1+P_2$. Consideriamo infatti:

$$h(t,x) = tAx + (1-t)(-P_1x + P_2x),$$

questa funzione è diversa da 0 su $[0,1]\times\partial\Omega$. Per provarlo basta osservare che:

$$h(0,x) = 0 \Rightarrow P_1x = P_2x \Rightarrow P_1x = P_2x \in N \cap M = \{0\} \Rightarrow x = 0.$$

Invece se $h(t,x) = 0$ con $t \neq 0$ allora si deve avere:

$$AP_1x = \lambda P_1x \in N \text{ e } AP_2x = -\lambda P_2x \in M \text{ con } \lambda = \frac{1-t}{t} > 0.$$

Il che é possibile solo se $P_1x = P_2x = 0$. Quindi per la terza proprietà del grado si ha che:

$$deg(A,\Omega,0) = deg(-P_1+P_2,\Omega,0).$$

Se $\alpha = 2p$ per qualche $p \geq 1$ è possibile trovare una matrice $B$ di dimensione $\alpha\times\alpha$ tale che $B^2 = -id_{|N}$.

Se $p = 1$ basta prendere la rotazione di $\frac{\pi}{2}$: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e per $p$ generico basta prendere una matrice $B$ con $p$ blocchi sulla diagonale tali che:

$$b_{2j-1,2j} = 1 = -b_{2j,2j-1} \text{ per } j = 1,\cdots,p$$
$$\text{e } b_{j,k} = 0 \text{ per tutti gli altri } j,k.$$

Poiché $B$ così costruita ha solo autovalori complessi riusciamo a trovare un'omotopia da $-P_1+P_2$ a $BP_1+P_2$ e da $BP_1+P_2$ a $id = P_1+P_2$. La prima è $tBP_1-(1-t)P_1+P_2$ e la seconda è $tBP_1+(1-t)P_1+P_2$.
Quindi dalle proprietà del grado si deduce facilmente che:

$$deg(A,\Omega,0) = deg(-P_1+P_2,\Omega,0) = deg(id,\Omega,0) = 1 = (-1)^{2p} = sign(\det A).$$

$\alpha = dimN$ **dispari.** Sia $\alpha = dimN = 2p+1$ per qualche $p > 0$. Allora possiamo decomporre $N = N_1 \oplus N_2$ con $dimN_1 = 1$ e $dimN_2 = 2p$. Abbiamo così le proiezioni: $\tilde{Q_1} : N \to N_1$ e $\tilde{Q_2} = id_{|N} - \tilde{Q_1} : N \to N_2$. Allora $P_1 = \tilde{Q_1}P_1 + \tilde{Q_2}P_1$ e come nel caso pari troviamo delle omotopie che indichiamo con $\to$ tali che:

$$A \to -P_1+P_2 \to -\tilde{Q_1}P_1 + B\tilde{Q_2}P_1 + P_2 \to -\tilde{Q_1}P_1 + \tilde{Q_2}P_1 + P_2.$$

Quindi $deg(A,\Omega,0) = deg(-Q_1+Q_2,\Omega,0)$ con $Q_1 = \tilde{Q_1}P_1$ e $Q_2 = \tilde{Q_2}P_1 + P_2$. Osserviamo che $Q_1$ e $Q_2 = id - Q_1$ sono le proiezioni della decomposizione $\mathbb{R}^N = N_1 \oplus (N_2 \oplus M)$. Poiché $x = 0$ è l'unico zero della funzione $-Q_1+Q_2$ possiamo rimpiazzare $\Omega = B_r(0)$ con un qualsiasi aperto limitato contenente

$x = 0$ senza cambiare il grado $deg$.
Dato $\Omega \subset N_1$ aperto limitato e $g : \overline{\Omega} \to N_1$ continua con $0 \in g(\partial\Omega)$, sia:

$$\tilde{d}(g, \Omega, 0) = deg(g \circ Q_1 + Q_2, \Omega + B_r(0), 0) \text{ dove } \tilde{B}_r(0) = B_r(0) \cap (N_2 \oplus M).$$

Dalle proprietà del grado $deg$ si deduce facilmente che:

1. $\tilde{d}(id_{|_{N_1}}, \Omega, 0) = 1$ se $0 \in \Omega$
2. $\tilde{d}(g, \Omega, 0) = \tilde{d}(g, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(g, \Omega_2, 0)$ se $\Omega_1$ e $\Omega_2$ sono aperti disgiunti contenuti in $\Omega$ con $0 \notin g(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$
3. $\tilde{d}(h(t, \cdot), \Omega, 0)$ è costante su $J = [0, 1]$ se $h : J \times \overline{\Omega} \to N_1$ è continua e $0 \notin h(J \times \partial\Omega)$.

Il nostro problema attuale è quindi quello di calcolare

$$\tilde{d}(-id_{|_{N_1}}, \Omega, 0) = deg(-Q_1 + Q_2, \Omega + \tilde{B}_r(0), 0)$$

dove $\Omega \subset N$ è un qualsiasi aperto limitato con $0 \in \Omega$. Poiché stiamo scommettendo che

$$\tilde{d}(-id_{|_{N_1}}, \Omega, 0) = -1 = (-1)^{2p+1} = sign(\det A)$$

e poiché la prima proprietá di $\tilde{d}$ è l'unica cosa concreta che abbiamo, andiamo a cercare una funzione $g$ e due aperti $\Omega_1$, $\Omega_2$, con $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, tali che: $\tilde{d}(g, \Omega, 0) = 0$, $g_{|_{\Omega_1}}$ sia omotopa a $-id_{|_{\Omega_1}}$ e $g_{|_{\Omega_2}}$ sia omotopa a $id_{|_{\Omega_2}}$, in modo che:

$$\tilde{d}(-id_{|_{N_1}}, \Omega_1, 0) = -\tilde{d}(id_{|_{N_1}}, \Omega_2, 0) = -1.$$

Poiché $dimN_1 = 1$ si ha che $N_1 = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ per qualche $v \in \mathbb{R}^N$ con $|v| = 1$. Consideriamo

- $\Omega = \{\lambda v : \lambda \in (-2, 2)\}$
- $\Omega_1 = \{\lambda v : \lambda \in (-2, 0)\}$
- $\Omega_2 = \{\lambda v : \lambda \in (0, 2)\}$
- $f(\lambda v) = (|\lambda| - 1)v$.

Dal momento che $f(0) = -v \neq 0$ e $h(t, \lambda v) = t(|\lambda| - 2)v + v \neq 0$ su $[0, 1] \times \partial\Omega$, abbiamo:

$$0 = \tilde{d}(v, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(f, \Omega_2, 0).$$

Ma $f_{|_{\Omega_1}}(\lambda v) = -(\lambda + 1)v$ ha solo lo zero $-v \in \Omega_1$, di conseguenza:

$$\tilde{d}(f, \Omega_1, 0) = \tilde{d}(-id_{|_{N_1}} - v, \Omega, 0) = \tilde{d}(-id_{|_{N_1}}, \Omega, 0)$$

poiché $-\lambda v - tv \neq 0$ su $[0, 1] \times \partial\Omega$. Con le stesse argomentazioni si ottiene che:

$$\tilde{d}(f, \Omega_2, 0) = \tilde{d}(id_{|_{N_1}}, \Omega, 0),$$

quindi che $\tilde{d}(-id_{|_{N_1}}, \Omega, 0) = -1$ come volevamo dimostrare. Abbiamo così provato il seguente:

**Teorema 1.8.** *Sia*

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ aperto limitato, } f \in C^0(\overline{\Omega} \text{ e } y \in \mathbb{R}^N) \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

*Allora esiste al più una funzione deg* $: M \to \mathbb{Z}$ *con le proprietà 1-3 del grado. Inoltre, queste proprietà implicano che* $deg(A, \Omega, 0) = sign \det A$ *per le mappe lineari* $A$ *con* $\det A \neq 0$ *e* $0 \in \Omega$.

## 1.2 Costruzione del grado

### 1.2.1 Il caso regolare.

**Definizione 1.9.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato,* $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ *e* $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega \cup \mathcal{S}_f)$. *Allora definiamo*

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign \mathcal{J}_f(x).$$

Nel seguito la principale difficoltà sarà liberarsi dal vincolo $y \notin f(\mathcal{S}_f)$. Ma il lemma di Sard ci assicura che questo particolare insieme ha misura nulla. Il nostro scopo pertanto è quello di sostituire $\sum sign \mathcal{J}_f(x)$ con un opportuno integrale.

**Proposizione 1.10.** *Sia* $\Omega$, $y$ *e* $f$ *come nella definizione sopra e siano* $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ *le mollificatrici della proposizione (1.2). Allora esiste* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y, f)$ *tale che:*

$$deg(f, \Omega, y) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y)\mathcal{J}_f(x)dx \text{ per } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

*Dimostrazione.* Il caso $f^{-1}(y) = \emptyset$ è banale in quanto $\varphi_\varepsilon(f(x) - y) \equiv 0$ per $\varepsilon < \alpha = dist(y, f(\overline{\Omega}))$. Se $f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_m\}$, allora troviamo delle palle disgiunte $B_\rho(x_i)$ tali che $f_{|B_\rho(x_i)}$ è un omeomorfismo con un intorno $V_i$ di $y$ e tale che $sign \mathcal{J}_f(x) = sign \mathcal{J}_f(x_i)$ in $B_\rho(x_i)$. Sia $B_r(y) \subset \bigcap_{i=1}^m V_i$ e $U_i = B_\rho(x_i) \cup f^{-1}(B_r(y))$. Quindi $|f(x) - y| \geq \beta$ su $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ per qualche $\beta > 0$, e quindi $\varepsilon < \beta$ implica:

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y)\mathcal{J}_f(x)dx = \sum_{i=1}^m sign \mathcal{J}_f(x_i) \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y)|\mathcal{J}_f(x)|dx.$$

Dal momento che $\mathcal{J}_f = \mathcal{J}_{f-y}$ e $f(U_i) - y = B_r(0)$, per la formula di sostituzione per gli integrali si ha:

$$\int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y)|\mathcal{J}_{f-y}(x)|dx = \int_{B_r(0)} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1 \text{ per } \varepsilon < \min\{\beta, r\}.$$

□

### 1.2.2 Dai valori regolari ai valori singolari.

Consideriamo $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Sia $\alpha = dist(y_0, f(\partial\Omega))$ e supponiamo che $y_1, y_2 \in B_\alpha(y_0)$ siano due valori regolari di $f$. Infine, sia

$$\delta = \alpha - \max\{|y_i - y_0| : i = 1, 2\}.$$

Per la proposizione precedente troviamo un $\varepsilon < \delta$ tale che

$$deg(f, \Omega, y_i) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y_i)\mathcal{J}_f(x)dx \text{ per } i = 1, 2.$$

Vedremo che questi integrali sono uguali e quindi potremo definire $deg(f, \Omega, y_0)$ come $deg(f, \Omega, y_1)$ in quanto sappiamo dal lemma di Sard che un tale $y_1$ esiste in $B_\alpha(y_0)$. Per dimostrare che la differenza tra i due integrali è nulla incominciamo ad osservare che si ha

$$\varphi_\varepsilon(x - y_2) - \varphi_\varepsilon(x - y_1) = \text{div } w(x),$$

dove

$$w(x) = (y_1 - y_2)\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2))dt.$$

Inoltre supp $w \subset \overline{B}_r(y_0)$ per $r = \alpha - (\delta - \varepsilon) < \alpha$, dal momento che supp $\varphi_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon(0)$. Infatti se $y \notin \overline{B}_r(y_0)$ si ha

$$\begin{aligned}|x - y_1 + t(y_1 - y_2)| &\geq |x - y_0| - |y_0 - y_1 + t(y_1 - y_2)| = \\ &= |x - y_0| - |(1 - t)(y_0 - y_1) + ty_0 - y_2| \geq \\ &\geq r - (\alpha - \delta) = \varepsilon\end{aligned}$$

e quindi $\varphi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) = 0$.
Questo implica in particolare che $f(\partial\Omega) \cap \text{supp } w = \emptyset$. Dimostreremo che questa proprietà ci consente di trovare una mappa $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tale che supp $v \subset \Omega$ e

$$[\varphi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y_1)]\,\mathcal{J}_f(x) = \text{div } v(x) \text{ in } \Omega. \tag{1.1}$$

A questo punto avremo concluso, in quanto una integrazione su un cubo $\mathcal{Q} \supseteq \Omega$, che possiamo supporre della forma $\mathcal{Q} = [-a, a]^n$, ci dice che

$$deg(f, \Omega, y_2) - deg(f, \Omega, y_1) = \int_\Omega \text{div } v(x)dx = \int_{\mathcal{Q}} \text{div } v(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_i}dx_i\right) dx_1 \cdots dx_{i-1}dx_{i+1} \cdots dx_n = 0.$$

Andiamo pertanto a cercare questa funzione $v$.

**Proposizione 1.11.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto, $f \in C^2(\Omega)$ e $d_{ij}(x)$ il cofattore di $\partial f_j(x)/\partial x_i$ in $\mathcal{J}_f(x)$, cioè $d_{ij}$ è $(-1)^{i+j}$ volte il determinante che si ottiene dalla matrice Jacobiana cancellando la j-esima riga e la i-esima colonna. Allora*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}(x)}{\partial x_i} = 0 \text{ per } j = 1, \cdots, N.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo $j$, poniamo $\partial_k = \partial/\partial x_k$ e $f_{x_k}$ la colonna $(\partial_k f_1, \cdots, \partial_k f_{j-1}, \partial_k f_{j+1}, \cdots, \partial_k f_N)$. Allora

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(f_{x_1}, \cdots, f_{x_{i-1}}, \hat{f}_{x_i}, f_{x_{i+1}}, \cdots, f_{x_N}),$$

dove il cappuccio indica la cancellazione. Poiché il determinante è una funzione lineare delle sue colonne, si prova facilmente che

$$\partial_i d_{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \det(f_{x_1}, \cdots, \hat{f}_{x_i}, \cdots, f_{x_{k-1}}, \partial_i f_{x_k}, f_{x_{k+1}}, \cdots, f_{x_N}).$$

Sia $c_{ki} = \det(\partial_i f_{x_k}, f_{x_1}, \cdots, \hat{f}_{x_i}, \cdots, \hat{f} x_k, \cdots, f_{x_N})$. Allora $c_{ki} = c_{ik}$ poiché $f \in C^2(\Omega)$, e poiché il segno del determinante cambia ogni qual volta scambiamo due colonne adiacenti, otteniamo

$$(-1)^{i+j} \partial_i d_{ij}(x) = \sum_{k<i} (-1)^{k-1} c_{ki} + \sum_{k>i} (-1)^{k-2} c_{ki} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sigma_{ki} c_{ki}$$

con $\sigma_{ki} = 1$ se $k < i$, $\sigma_{ii} = 0$ e $\sigma_{ki} = -\sigma_{ik}$ per ogni $i, k$. Quindi

$$(-1)^j \sum_{i=1}^{N} \partial_i d_{ij}(x) = \sum_{i,k=1}^{N} (-1)^{k-1+i} \sigma_{ki} c_{ki} = \sum_{k,i=1}^{N} (-1)^{i-1+k} \sigma_{ik} c_{ik}$$
$$= - \sum_{i,k=1}^{N} (-1)^{k-1+i} \sigma_{ki} c_{ki}$$

ossia l'ultimo membro fa 0. □

Ora, definiamo $v_i(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j(f(x)) d_{ij}(x)$ su $\overline{\Omega}$ e $v_i(x) = 0$ su $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, per $i = 1, \cdots, N$. Allora supp $w \subset \overline{B}_r(y_0) \subset B_\alpha(y_0)$ implica che supp $v \subset \Omega$, e abbiamo

$$\partial_i v_i(x) = \sum_{j,k=1}^{N} d_{ij}(x) \partial_k w_j(f(x)) \partial_i f_k(x) + \sum_{j=1}^{N} w_j(f(x)) \partial_i d_{ij}(x).$$

Poiché $\sum_{i=1}^{N} d_{ij}(x) \partial_i f_k(x) = \delta_{jk} \mathcal{J}_f(x)$, dove $\delta_{jk}$ è il simbolo di Kronecker, la proposizione sopra ci dice che

$$\text{div } v(x) = \sum_{j,k=1}^{N} \partial_k w_j(f(x)) \delta_{jk} \mathcal{J}_f(x) = \text{div } w(f(x)) \mathcal{J}_f(x),$$

cioè la formula (1.1). A questo punto è ben posta la seguente:

**Definizione 1.12.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Allora definiamo $deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega, y_1)$, dove $y_1$ è un qualsiasi valore regolare di $f$ tale che $|y_1 - y| < dist(y, f(\partial\Omega))$ e $deg(f, \Omega, y_1)$ è dato dalla definizione (1.9).*

### 1.2.3 Dalle funzioni $\overline{C}^2(\Omega)$ alle funzioni $C^0(\overline{\Omega})$

In quest'ultimo passo dimostreremo che il grado della definizione (1.12) è lo stesso per tutte le funzioni $\overline{C}^2(\Omega)$ sufficientemente vicine ad una data funzione continua. Per farlo useremo una speciale versione del teorema della funzione implicita, di cui però ometteremo la dimostrazione.

**Proposizione 1.13** (Teorema della funzione implicita)**.** *Sia $h : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1$, $h(t_0, x_0) = 0$ e $\mathcal{J}_{h(t_0,\cdot)}(x_0) \neq 0$ per qualche $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Allora esiste un intervallo $(t_0 - r, t_0 + r)$, una palla $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e una funzione continua $x : (t_0 - r, t_0 + r) \to B_\delta(x_0)$ tale che $x(t_0) = x_0$ e $x(t)$ è l'unica soluzione nella palla $B_\delta(x_0)$ dell'equazione $h(t, x) = 0$.*

**Proposizione 1.14.** *Sia $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Allora, per $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ esiste un $\delta = \delta(f, y, g) > 0$ tale che $deg(f + tg, \Omega, y) = deg(f, \Omega, y)$ per $|t| < \delta$.*

*Dimostrazione.*

1. Nel caso in cui $f^{-1}(y) = \emptyset$ è banale che $f(x) + tg(x) \neq y$ in $\overline{\Omega}$ per $|t|$ sufficientemente piccolo, e quindi entrambi i gradi sono nulli.

2. Sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_m\}$ e $\mathcal{J}_f(x_i) \neq 0$ per $i = 1, \cdots, m$, poniamo $f_t = f + tg$ e $h(t, x) = f_t(x) - y$. Abbiamo che $h(0, x_i) = 0$ e $\mathcal{J}_{h(0,\cdot)}(x_i) = \mathcal{J}_f(x_i) \neq 0$. Per la versione sopra del teorema della funzione implicita possiamo trovare un intervallo $(-r, r)$, delle palle disgiunte $\overline{B}_\rho$ ed una funzione continua $z_i : (-r, r) \to B_\rho(x_i)$ tale che $f_t^{-1}(y) \cap V = \{z_1(t), \cdots, z_m(t)\}$ per $V = \bigcup_{i=1}^m B_\rho(x_i)$. Scegliamo $\rho$ piccolo abbastanza in modo che $sign\mathcal{J}_f(x) = sign\mathcal{J}_f(x_i)$ su $\overline{B}_\rho(x_i)$. Dal momento che $|f(x) - y| > \beta$ in $\overline{\Omega} \setminus V$ per qualche $\beta > 0$, abbiamo anche che
$$f_t^{-1}(y) = \{z_1(t), \cdots, z_m(t)\} \text{ per } |t| < \delta_0 = \min\{r, \beta|g|_\infty^{-1}\}.$$
Infine, poiché $\mathcal{J}_{f_t}$ è una funzione continua di $(t, x)$, troviamo un $\delta \leq \delta_0$ tale che $|\mathcal{J}_{f_t}(x) - \mathcal{J}_f(x)| < \min\{|\mathcal{J}_f(z) : z \in \overline{V}|\}$ per $|t| < \delta$ e $x \in \overline{V}$. Quindi $sign\mathcal{J}_{f_t}(z_i(t)) = sign\mathcal{J}_f(z_i(t)) = sign\mathcal{J}_f(x_i)$, ossia $deg(f_t, \Omega, y) = deg(f, \Omega, y)$ per $|t| < \delta$ per la definizione (1.9).

3. Per l'ultimo caso, supponiamo che $y$ non sia regolare. Allora scegliamo un valore regolare $y_0 \in B_{\alpha/3}(y)$, dove $\alpha = dist(y, f(\partial\Omega))$, e troviamo u $\delta_0 > 0$ tale che $deg(f_t, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y)$ per $|t| < \delta_0$, per il secondo passo. Sia $\delta = \min\{\delta_0, \frac{1}{3}|g|_0^{-1}\alpha\}$. Allora $|y_0 - f_t(x)| > \alpha/3$ per $x \in \partial\Omega$ e $|t < \delta|$, e quindi $|y - y_0| < dist(y_0, f_t(\partial\Omega))$. In definitiva $deg(f_t, \Omega, y_0) = deg(f_t, \Omega, y)$ per la definizione (1.12).

□

Forti di questo risultato è semplice convincersi che il grado è costante su tutte le mappe $C^2$ sufficientemente vicine ad una funzione continua. Infatti, sia $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$ e $\alpha = dist(y, f(\partial\Omega))$. Consideriamo due funzioni $g, \tilde{g} \in \overline{C}^2(\Omega)$ tali che $|g - f|_\infty < \alpha$ e $|\tilde{g} - f|_\infty < \alpha$, sia $h(t,x) = g(x) + t(\tilde{g}(x) - g(x))$ e $\varphi(t) = deg(h(t,\cdot), \Omega, y)$ per $t \in [0,1]$. Poiché $h(t,\cdot) = h(t_0,\cdot) + (t - t_0)(\tilde{g} - g)$, la proposizione sopra ci assicura che $\varphi(t)$ è costante in un intorno di $t_0$. Quindi, $\varphi$ è continua su $[0,1]$ e di conseguenza $\varphi([0,1])$ è connesso, cioè $\varphi(t)$ è costante in $[0,1]$; in particolare $deg(g, \Omega, y) = deg(\tilde{g}, \Omega, y)$. Di conseguenza è ben posta la seguente

**Definizione 1.15.** *Sia $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. Allora definiamo $deg(f, \Omega, y) := deg(g, \Omega, y)$, dove $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ è una qualsiasi mappa tale che $|g - f|_\infty < dist(y, f(\partial\Omega))$ e $deg(g, \Omega, y)$ è dato dalla definizione (1.12).*

## 1.3 Grado per mappe da varietà in varietà

Siano $X_0$ e $Y$ varietà $N-$dimensionali orientate, e sia $X \subset X_0$ un aperto a chiusura compatta. Siano $f \in C^0(\overline{X}, Y)$ e $y \in Y$ tale che, come al solito, $y \notin f(\partial X)$. Allora vorremmo definire come nelle sezioni precedenti $deg(f, X, y)$, ossia il grado di $f$ su $X$ rispetto al punto $y$. Come fatto in precedenza procederemo per passi.

### 1.3.1 Mappe di classe $C^1$

Iniziamo con l'assumere $f \in C^1(X, Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Sia $y \in Y \setminus f(\partial X)$ e sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di y. Questo vuol dire che $U$ è diffeomorfo ad un cubo aperto di $\mathbb{R}^N$ (o, se si preferisce, ad una palla aperta di $\mathbb{R}^N$). Sia $\alpha$ una $N-$forma su $Y$, tale che

$$\text{supp } \alpha \subset U \text{ e } \int_Y \alpha = 1.$$

Definiamo

$$deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha),$$

ove $f^*(\alpha)$ è il pull-back di $\alpha$ secondo la mappa $f$. Vorremmo ora mostrare che tale definizione è indipendente dalla scelta della $N-$forma $\alpha$ e che è coerente con la definizione di grado data in precedenza.

**Lemma 1.16.** *Sia $\alpha$ una $N-$forma su $\mathbb{R}^N$ con supporto contenuto in un cubo aperto $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^N$ ed integrale nullo. Allora esiste una $(N-1)-$forma $\beta$ con supporto contenuto in $\mathcal{Q}$ e tale che $d\beta = \alpha$.*

Forti di questo lemma la prima asserzione che ci siamo proposti di dimostrare risulta essere abbastanza facile. Dato che $\alpha - \alpha'$ ha integrale nullo ed ha supporto su un intorno cubico sappiamo esistere una $N-1-$forma $\beta$ con supporto contenuto in $U$ tale che $\alpha - \alpha' = d\beta$. Quindi

$$\int_X f^*(\alpha') - \int_X f^*(\alpha) = \int_X f^*(\alpha' - \alpha) = \int_X f^*(d\beta) = \int_X df^*(\beta).$$

Dato che $\beta$ ha supporto in $U$, che è disgiunto da $f(\partial X)$, la forma $f^*(\beta)$ ha supporto compatto in $X$, e dunque l'ultimo integrale si annulla.

**Proposizione 1.17.** *La funzione*

$$Y \setminus f(\partial X) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto deg(f, X, y)$$

*è localmente costante.*

*Dimostrazione.* Sia $y_0 \in Y \setminus f(\partial X)$, $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di $y_0$ ed $\alpha$ una $N-$forma con supporto contenuto in $U$ ed integrale 1, allora si ha:

$$deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha) = deg(f, X, y_0)$$

per ogni $y \in U$. □

**Proposizione 1.18.** *Se $y \in Y \setminus f(\partial X)$ è un valore regolare di $f \in C^1(X, Y)$, allora*

$$deg(f, X, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign\ \det Df(x).$$

*Dimostrazione.* Il teorema della funzione inversa ci garantisce che $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto di $X$. Dato che $y \notin f(\partial X)$, $f^{-1}(y)$ non ha punti di accumulazione in $\partial X$, quindi, analogamente a quanto dimostrato nel caso degli aperti, è un insieme finito:

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Dunque la somma nell'enunciato è ben definita. La quantità $sign \det Df(x)$ vale 1 quando $f$ conserva l'orientazione in un intorno di $x$, $-1$ quando la inverte.
Sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di $y$, e $U_j$ un intorno di $x_j$ tale che $f_{|U_j} : U_j \to f(U_j) \subset U$ sia un diffeomorfismo, per ogni $j = 1, \cdots, k$. Se $\alpha$ è una $N-$forma con supporto contenuto nell'intorno $\cap_{j=1}^k f(U_j)$ di $y$ e con integrale 1, dalla formula del cambio di variabili per gli integrali si ottiene:

$$deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^*(\alpha) =$$

$$= \sum_{j=1}^k sign \det Df(x_j) \int_Y \alpha = \sum_{j=1}^k sign \det Df(x_j),$$

il che conclude la dimostrazione. □

**Proposizione 1.19** (Lemma di Sard)**.** *Siano $X$ e $Y$ varietà di dimensione finita, e sia $f \in C^k(X,Y)$, con*

$$k > \max\{0, dimX - dimY\}.$$

*Allora l'insieme dei valori critici di $f$ ha misura di Lebesgue nulla in $Y$.*

La proposizione (1.18) mostra in particolare che la quantità $deg(f,X,y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di $f$. D'altra parte per il teorema di Sard l'insieme dei valori regolari è denso in $Y$, e dato che la funzione $y \to deg(f,X,y)$ è localmente costante in $Y \setminus f(\partial X)$, concludiamo che $deg(f,X,y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$. Siamo quindi in grado di enunciare il seguente

**Teorema 1.20.** *Siano $X_0$, $Y$ varietà orientate di dimensione $N$, sia $X \subset X_0$ un aperto a chiusura compatta, e sia $f \in C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X},Y)$. Allora la quantità*

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} sign \; \det Df(x),$$

*definita per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di $f$, si estende ad una funzione*

$$deg(f,X,\cdot) : Y \setminus f(\partial X) \to \mathbb{Z}$$

*che è costante su ciascuna componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$.*

Esaminiamo il caso particolare che ci interessa più da vicino in cui $X_0$ e $Y$ siano varietà orientate, compatte, connesse e senza bordo. La definizione del grado diventa molto meno pesante, infatti abbiamo che $\partial X = \emptyset$, inoltre, essendo $Y$ connessa, il grado non dipende da $y \in Y$; è lecito quindi adottare la notazione

$$deg(f) = deg(f,X,Y).$$

### 1.3.2 Mappe continue

Consideriamo $X$ una $r$-varietà regolare a chiusura compatta di $\mathbb{R}^N$ e $Y$ una $s$-varietà regolare di $\mathbb{R}^M$. Per estendere la definizione di grado alle mappe continue necessitiamo della nozione di proiezione lungo le direzioni normali ad $Y$. Osserviamo che $Y$ è localmente un insieme di livello di una funzione regolare. Quindi esiste $\{V_i\}$ ricoprimento di aperti localmente finito, tale che $V_i \cap Y = \{x \in V_i : g_i(x) = 0\}$, ove $g_i : V_i \to \mathbb{R}^{m-s}$ è regolare, e $Dg_i(x)$ di rango massimo. Quindi per ogni $x \in V_i$ cè una base $\nu_1(x), \cdots, \nu_{m-s}(x)$ di versori normali a $Y$ che varia con continuità. I problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \nu_h\left(x(t)\right) \\ x(0) = x^* \in Y \cap V_i \end{cases}$$

hanno soluzioni locali definite in un intorno di 0. Sia $W_i \subset V_i$ un aperto contenuto nell'unione di tutte le orbite $x(t)$ uscenti dai punti di $V_i$. È chiaro che $W = \cup_i W_i \supseteq Y$. Con una partizione dell'unità $\{\varphi_i\}$ subordinata ai $W_i$, definiamo $g = \sum_i \varphi_i g_i$, per la quale si ha $W \cap Y = \{x \in W : g(x) = 0\}$; ogni punto di $W$ è della forma $x(t)$, con $x(t)$ orbita del tipo descritto. Allora si definisce

$$\Pi(x) = x^* \text{ se } x = x(t) \text{ con } x(0) = x^*.$$

**Teorema 1.21.** *Sia $X$ una $r$-varietà regolare di $\mathbb{R}^N$, con $\overline{X} = X \cup (\partial X)$ compatta. Sia $Y$ $s$-varietà regolare di $\mathbb{R}^M$, sia $f \in C^0(\overline{X}, Y)$. Allora esiste $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in $\overline{X}$.*

*Dimostrazione.* Sia $U$ un intorno di $\overline{X}$ in $\mathbb{R}^N$, sia $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una estensione continua di $f$ nulla fuori di $U$. Sia $\psi_n$ una mollificatrice. Allora

$$F * \psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) \ , \ F * \psi_n \to F \text{ uniformemente in } \mathbb{R}^N$$

in particolare si ha che:

$$(F * \psi_n)_{|_{\overline{X}}} \to F_{|_{\overline{X}}} = f \text{ uniformemente in } \overline{X}.$$

Però queste funzioni non sono a valori in $Y$. Allora consideriamo un intorno $V$ di $Y$ e $\Pi : V \to Y$ la proiezione lungo le direzioni normali a $Y$. Osserviamo che $\Pi \in C^1$ se $Y \in C^1$, quindi $\Pi$ è localmente lipschitziana e che $F * \psi_n(U) \subset W$ se $n$ è abbastanza grande. Consideriamo allora

$$G_n = \Pi\,(F * \psi_n) : U \to Y \text{ e poniamo } f_n = G_{n|_{\overline{X}}} : \overline{X} \to Y.$$

Poiché $G_n \in C^1(U, Y)$, si ha che $f_n \in C^1(X, Y) \cap C(\overline{X}, Y)$. Inoltre

$$f_n = G_{n|_{\overline{X}}} = \Pi(F * \psi_n)_{|_{\overline{X}}} \longrightarrow \Pi\left(F_{|_{\overline{X}}}\right) = \Pi f = f$$

uniformemente in $\overline{X}$. □

**Proposizione 1.22** (Invarianza per omotopia)**.** *Siano $X_0$ e $Y$ $n$-varietà orientate, $X \subset X_0$ una aperto a chiusura compatta e $\varphi_t : \overline{X} \times [0,1] \to Y$ una famiglia di funzioni $C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$ dipendente con continuità dal parametro temporale $t \in [0,1]$. Se per ogni $t \in [0,1]$ si ha $y_0 \notin \varphi_t(\partial X)$, allora $deg(\varphi_t, X, y_0)$ è indipendente da $t$.*

*Dimostrazione.* L'insieme $K = \{\varphi_t(x) : x \in \partial X,\ t \in [0,1]\}$ è un chiuso che non contiene $y_0$. Esiste pertanto un intorno cubico $U$ di $y_0$ disgiunto da $K$. Se $\alpha$ è una $n$-forma con supporto contenuto in $U$ e tale che $\int_Y \alpha = 1$ si ha:

$$deg(\varphi_t(\cdot), X, y_0) = \int_X \varphi_t(\cdot)^*(\alpha).$$

Poiché questa quantità dipende con continuità da $t$, ed è un intero, necessariamente deve essere costante. □

Siccome $f_n \to f$ uniformemente e $f_n \in C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X},Y)$, si ha che $deg(f_n, X, y)$ è costante se $n$ è sufficientemente grande. Infatti lungo la curva

$$t \to (1-t)f_n + tf_m$$

il grado è costante visto che $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ per ogni $n$, $m \geq \nu_\varepsilon$ in virtù dell'invarianza per omotopia. Possiamo perciò definire in modo coerente

$$deg(f, X, y) = deg(f_n, X, y).$$

# Capitolo 2

# Teoria del grado in VMO

In questo capitolo estenderemo la nozione di grado topologico per una classe di funzioni non necessariamente continue: le cosiddette funzioni $VMO$. In quest'ottica introdurremo questo spazio di funzioni e ne riporteremo alcune delle sue proprietà più importanti.

## 2.1 Mappe BMO e VMO a valori reali

$BMO$, lo spazio delle funzioni ad oscillazione media limitata, fu introdotto da F. John e L. Nirenberg nel 1961 durante la loro analisi di certe equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali che si presentarono nello studio delle superfici minime.

**Definizione 2.1.** *Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avente bordo regolare, una funzione integrabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice essere $BMO$ (bounded mean oscillation) se*

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{B \subset \Omega} ⨍_B \left| f(x) - ⨍_B f(y)dy \right| dx < \infty, \tag{2.1}$$

*dove l'estremo superiore è fatto su tutte le palle $B$ contenute in $\Omega$, e $⨍_B f(x)dx := \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(x)dx$.*

Osserviamo subito che $\|\cdot\|_{BMO}$ è una seminorma sullo spazio di funzioni $BMO$, in quanto per qualsiasi funzione costante $f$ si ha $\|f\|_{BMO} = 0$. Rendiamo $\|\cdot\|_{BMO}$ una norma quozientando per le costanti, ossia definendo:

$$BMO(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ f \in L^1(\Omega) \text{ t.c. } \|f\|_{BMO} < \infty \right\} \big/ \sim,$$

dove $f \sim g$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $g = f + c$. Con questa norma lo spazio $BMO(\Omega, \mathbb{R})$ è uno spazio di Banach.

**Osservazione 2.2.** *Una norma equivalente a $\|f\|_{BMO}$ è la seguente:*

$$\|f\|_* = \sup_{B \subset \Omega} ⨍_B ⨍_B |f(x) - f(y)| dxdy. \tag{2.2}$$

La costruzione dello spazio $BMO(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ è del tutto analoga: invece che prendere funzioni integrabili si prendono funzioni in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ed in $\|\cdot\|_{BMO}$ l'estremo superiore viene fatto su tutte le palle contenute in $\mathbb{R}^N$.
È facile notare che $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è contenuto in $BMO$, tuttavia essere in $BMO$ non è solo una questione di limitatezza. Un classico esempio di funzione $BMO$ illimitata è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \log\left(\frac{1}{|x|}\right) & 0 < |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

La media di questa funzione su un intervallo della forma $(-a, a)$ è $(1 - \log a)$. Fissiamo un numero $\lambda > 1$ e consideriamo l'insieme dei punti dell'intervallo dove la funzione dista dalla sua media più di $\lambda$:

$$A := \left\{ x \in (-a, a) : \left| \log\left(\frac{1}{|x|}\right) - (1 - \log a) \right| > \lambda \right\};$$

è semplice mostrare che $\mu(A) = 2ae^{-\lambda-1}$. Il fatto che la misura di questo insieme tenda a 0 esponenzialmente in $\lambda$ non è un fatto casuale, o una proprietà intrinseca della funzione $BMO$ che avevamo scelto; infatti il seguente teorema ci assicura che una stima simile vale per tutte le funzioni $BMO$.

**Teorema 2.3** (Disuguaglianza di John-Nirenberg)**.** *Data $f \in BMO(\mathbb{R}^N)$ esistono due costanti positive $C_1$ e $C_2$, dipendenti solo da $N$, tali che per qualsiasi ipercubo in $\mathbb{R}^N$ e qualsiasi $\lambda > 0$ si ha*

$$\mu(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}) \leq C_1 \mu(Q) \exp\left(-\frac{C_2 \lambda}{\|f\|_{BMO}}\right). \tag{2.3}$$

**Corollario 2.3.1.** *Per ogni $p \in (1, \infty)$*

$$\|f\|_{BMO_p} := \sup_Q \left( \fint_Q \left| f(x) - \fint_Q f(y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

*è una norma su $BMO$ equivalente a $\|\cdot\|_{BMO}$.*

*Dimostrazione.* È sufficiente provare che $\|\cdot\|_{BMO_p} \leq C_p \|f\|_{BMO}$, in quanto l'altra disuguaglianza è immediata.

$$\begin{aligned} \int_Q \left| f(x) - \fint_Q f(y)dy \right|^p dx &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mu\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| \geq \lambda\}\right) d\lambda \\ &\leq C_1 \mu\left(Q\right) \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \exp\left(-\frac{C_2\lambda}{\|f\|_{BMO}}\right), \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza è vera proprio per il teorema sopra. Operando il cambio di variabili $s = C_2\lambda / \|f\|_{BMO}$, si ha

$$\begin{aligned} \fint_Q \left| f(x) - \fint_Q f(y)dy \right|^p dx &\leq C_1 p \left( \frac{\|f\|_{BMO}}{C_2} \right)^p \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds \\ &= C_1 C_2^{-p} p \Gamma(p) \|f\|^p_{BMO}, \end{aligned}$$

dove $\Gamma$ è la funzione di Eulero. $\square$

**Osservazione 2.4.** *Se $B \subset \mathbb{R}^N$ è una palla, allora*

$$BMO(B, \mathbb{R}) \subset \bigcap_{p<\infty} L^p(B).$$

Un'altra caratteristica importante dello spazio $BMO$ è che lo si può vedere come un particolare spazio di Campanato.

**Definizione 2.5.** *Dati $\lambda \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ diciamo che $u$ appartiene allo spazio di Campanato $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^N)$ se $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ed inoltre*

$$\left( \sup_B \frac{1}{\mu(B)^{\lambda/N}} \int_B \left| u(x) - \frac{1}{\mu(B)} \int_B u(y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{2.5}$$

*dove l'estremo superiore è preso su tutte le palle contenute in $\mathbb{R}^N$.*

Non è difficile notare che $BMO(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^{1,n}(\mathbb{R}^N)$.
Un sottospazio di $BMO$ molto importante è quello delle funzioni $VMO$ (vanishing mean oscillation). Esso consiste di tutte quelle funzioni $BMO$ soddisfacenti a

$$\lim_{\mu(B)\to 0} \sup_{B\subset\Omega} ⨍_B ⨍_B |f(x) - f(y)| dxdy = 0. \tag{2.6}$$

**Osservazione 2.6.** $VMO(\Omega, \mathbb{R}) = \overline{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})}^{BMO}$.

Abbiamo riportato una dimostrazione di questo fatto in un caso particolare nel terzo capitolo, per una dimostrazione più generale si veda [4]. Quindi chiaramente abbiamo che $C^0 \subset VMO$, ma l'inclusione è stretta. Un classico esempio è

$$f(x) = |\log|x||^\alpha$$

che appartiene a $VMO(-a, a)$ per ogni $0 < \alpha < 1$, ma non è continua.

## 2.2 Mappe BMO e VMO da varietà in varietà

Estendiamo in questa sezione la nozione di $BMO$ e $VMO$ per mappe da varietà in varietà. Considereremo sempre $X$ una varietà regolare, compatta, senza bordo dotata di una metrica riemanniana. Denoteremo con $r_0$ il raggio di iniettività di $X$ e con $B_\varepsilon(x)$ la palla geodetica di centro $x$ e raggio $\varepsilon < r_0$.

**Definizione 2.7.** *Data $f \in L^1(X)$ (usando la misura associata alla metrica) diciamo che $f \in BMO(X)$ se soddisfa:*

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{\varepsilon<r_0,\ x\in X} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \overline{f}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y) < \infty, \tag{2.7}$$

*dove*

$$\overline{f}_\varepsilon(x) := ⨍_{B_\varepsilon(x)} f(y) d\sigma_X(y).$$

Osserviamo che la quantità $\|\cdot\|_{BMO}$ è una seminorma in quanto per ogni funzione costante $f$ si ha $\|f\|_{BMO}= 0$. Definiamo allora:

$$BMO(X,\mathbb{R}) := {\left\{f \in L^1(X) \text{ t.c. } \|f\|_{BMO} < \infty\right\}}\big/_{\sim}$$

dove $f \sim g$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$. Così definito allora $BMO(X,\mathbb{R})$ risulta un ben definito spazio normato, dotato della norma $\|\cdot\|_{BMO}$ sopra definita. Andiamo pertanto a studiarne alcune proprietà.

**Proposizione 2.8.** *Una norma equivalente a* $\|\cdot\|_{BMO}$ *è :*

$$\|f\|_* = \sup_{\varepsilon<r_0,\ x\in X} ⨍_{B_\varepsilon(x)} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - f(z)| d\sigma_X(y) d\sigma_X(z). \tag{2.8}$$

**Lemma 2.9.** *Per ogni funzione* $u \in BMO(X)$ *esiste una costante* $C = C(X)$ *che dipende solo da* $X$ *tale che:*

$$\|u\|_{L^1(X)} \leq C\|u\|_{BMO(X)} + \left|\int_X u\right|. \tag{2.9}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo $u$ a media nulla e procediamo per assurdo, quindi supponiamo che una tale costante non esista. Allora esiste una successione $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $\int_X u_j = 0$ per ogni $j$ tale che

$$\|u_j\|_{BMO} \to 0 \text{ e } \|u_j\|_{L^1} \to 1.$$

Ricopriamo $X$ con un numero finito di palle $B_i := B_{r_0/2}(x_i)$. Dalla definizione di funzione $BMO$ si deduce che esiste una sottosuccessione $u_{j_k}$ che converge in $L^1$ ad una costante su ciascuna palla $B_i$, e necessariamente tale costante deve essere la stessa su tutte le palle. Dal momento che $\int_X u_j = 0$, tale costante è proprio 0. Abbiamo trovato una contraddizione, perché l'ultima deduzione è in contrasto col fatto che $\|u_j\|_{L^1} \to 1$. □

**Lemma 2.10.** *Siano* $X$ *e* $Y$ $n-$*varietà regolari, compatte e senza bordo,* $\varphi : X \to Y$ *un diffeomorfismo di classe* $C^1$*. Allora*

$$f \in BMO(Y) \Rightarrow f \circ \varphi \in BMO(X),$$

*inoltre* $\|f \circ \varphi\|_{BMO(X)} \leq C\|f\|_{BMO(Y)}$.

**Osservazione 2.11.** *Questo lemma è molto importante perché ci dice che la nozione di BMO non dipende dalla metrica riemanniana: più precisamente, cambiando metrica si ottiene una norma equivalente.*

**Definizione 2.12.** *Una mappa* $u : X \to \mathbb{R}^N$ *appartiene a* $BMO(X,\mathbb{R}^N)$ *se ogni sua componente è in* $BMO$*. Come norma si usa la stessa (2.7), eccetto per il fatto che il valore assoluto indica la norma euclidea su* $\mathbb{R}^N$.

**Definizione 2.13.** *Sia $Y$ una varietà regolare, compatta, senza bordo che supponiamo immersa in $\mathbb{R}^N$ per qualche $N$. Definiamo allora:*

$$BMO(X,Y) := \{u \in BMO(X, \mathbb{R}^N) \text{ t.c. } u(x) \in Y \text{ q.o.}\}.$$

**Osservazione 2.14.** *Come fatto in precedenza si può dimostrare che la nozione di $BMO(X,Y)$ è indipendente dalla metrica su $X$ e dall'immersione di $Y$.*

**Definizione 2.15.** *Definiamo $VMO(X, \mathbb{R}^N)$ la chiusura delle funzioni continue con la norma $BMO$. Dotiamo tale spazio, appunto, della norma $BMO$. Analogamente $VMO(X,Y) = \{u \in VMO(X, \mathbb{R}^N) : u(x) \in Y \text{ q.o.}\}$.*

Con la teoria di seguito dimostreremo che $u \in VMO(X,Y)$ se e solo se $u \in BMO(X,Y)$ e

$$\fint_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y) \longrightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \to 0 \text{ uniformemente in x,} \tag{2.10}$$

dove $\overline{u}_\varepsilon(x)$ è la media di $u$ su $B_\varepsilon(x)$. Introduciamo delle utili notazioni. Se $u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ e $0 < a < r_0(X)$ poniamo:

1. $M_a(u) := \sup\limits_{\varepsilon<a,\ x\in X} \fint_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y)$
2. $M_0(u) := \lim\limits_{a\to 0} M_a(u)$.

**Lemma 2.16.** *Dati due insiemi misurabili $A \subset B$ in uno spazio misurato $(X, \mu)$, allora per ogni funzione integrabile $f$ si ha:*

*(a)* $\left|\fint_A f d\mu - \fint_B f d\mu\right| \leq \fint_A \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu \leq \dfrac{\mu(B)}{\mu(A)} \fint_B \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu$

*(b)* $\fint_A \left| f - \fint_A f d\mu \right| d\mu,\ \fint_B \left| f - \fint_A f d\mu \right| d\mu \leq 2\dfrac{\mu(B)}{\mu(A)} \fint_B \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu.$

*Dimostrazione.* La disuguaglianza $(a)$ è ovvia. Dimostriamo la prima disuguaglianza di $(b)$.

$$\fint_A \left| f - \fint_A f d\mu \right| d\mu \leq \fint_A \left( \left| f - \fint_B f d\mu \right| + \left| \fint_B f d\mu - \fint_A f d\mu \right| \right) d\mu =$$
$$= \fint_A \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu + \left| \fint_B f d\mu - \fint_A f d\mu \right|,$$

usando la disuguaglianza $(a)$ si ottiene:

$$\fint_A \left| f - \fint_A f d\mu \right| d\mu \leq 2\frac{\mu(B)}{\mu(A)} \fint_B \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu.$$

La dimostrazione della seconda disuguaglianza di $(b)$ è analoga:

$$
\begin{aligned}
&\fint_B \left| f - \fint_A f d\mu \right| d\mu \leq \fint_B \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu + \left| \fint_B f d\mu - \fint_A f d\mu \right| \leq \\
&\leq \left( 1 + \frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right) \fint_B \left| f - \fint_B f d\mu \right| d\mu,
\end{aligned}
$$

si conclude usando l'ipotesi $A \subset B$. □

**Lemma 2.17.** *Esiste una costante $B = B(X)$ che dipende solo da $X$ tale che per ogni $\varepsilon$, $\delta$ con $0 < \varepsilon \leq \delta < r_0(X)$, ogni palla $B_\delta(x) \subset X$ può essere ricoperta con un numero finito di palle $B_\varepsilon(x_i)$ con $i = 1, \cdots, k$ tali che $dist(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ se $i \neq j$ e*

$$
\sum_{i=1}^{k} \mu\left(B_\varepsilon(x_i)\right) \leq B\mu\left(B_\delta(x)\right).
$$

*Dimostrazione.* Consideriamo $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\}_{i=1,\cdots,N}$ una famiglia massimale di palle disgiunte, i cui centri $x_i$ appartengono a $B_\delta(x)$. Dalla massimalità segue che

$$
\cup_i B_\varepsilon(x_i) \supseteq B_\delta(x).
$$

Poiché $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subseteq B_{\delta+\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq B_{2\delta}(x)$, si ha che

$$
\sum_i \mu(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)) \leq \mu(B_{2\delta}(x)).
$$

Quindi

$$
\sum_i \mu(B_\varepsilon(x_i)) \leq C \sum_i \mu(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)) \leq C\mu(B_{2\delta}(x)) \leq B\mu(B_\delta(x)).
$$

□

**Lemma 2.18.** *Esiste una costante $A = A(X)$ che dipende solo da $X$ tale che se $u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ allora*

$$
\|u - \overline{u}_\varepsilon\|_{BMO} \leq AM_\varepsilon(u) \text{ per ogni } \varepsilon < r_0(X). \tag{2.11}
$$

*Dimostrazione.* Cominciamo col dimostrare che:

$$
|\overline{u}_\varepsilon(y) - \overline{u}_\varepsilon(z)| \leq CM_\varepsilon(u) \;\forall \varepsilon < r_0,\; \forall y,\; z \in X \text{ con } d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.12}
$$

Dal lemma 2.16 si ha che per ogni $\varepsilon < r_0$:

$$
\begin{aligned}
&|\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) - \overline{u}_\varepsilon(z)| \leq CM_\varepsilon(u) \\
&|\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) - \overline{u}_\varepsilon(x)| \leq CM_\varepsilon(u), \forall x \in X.
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme queste due disuguaglianze si ottiene:

$$
|\overline{u}_\varepsilon(y) - \overline{u}_\varepsilon(z)| \leq |\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) - \overline{u}_\varepsilon(y)| + |\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) - \overline{u}_\varepsilon(z)| \leq 2CM_\varepsilon(u).
$$

Forti di questo fatto, vogliamo stimare $\|u - \overline{u}_\varepsilon\|_{BMO}$. Più precisamente vogliamo mostrare che per ogni $B_\delta(x) \subset X$ con $\delta < r_0$

$$I := \fint_{B_\delta(x)} \left| (u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)) - \fint_{B_\delta(x)} (u(z) - \overline{u}_\varepsilon(x)) d\sigma_X(z) \right| d\sigma_X(y) \leq AM_\varepsilon(u).$$

Se $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ la dimostrazione è abbastanza facile, infatti:

$$\begin{aligned} I &\leq \fint_{B_\delta(x)} \left| u(y) - \fint_{B_\delta(x)} u(z) d\sigma_X(z) \right| d\sigma_X(y) + \\ &+ \fint_{B_\delta(x)} \fint_{B_\delta(x)} \left| \overline{u}_\varepsilon(y) - \overline{u}_\varepsilon(z) \right| d\sigma_X(y) d\sigma_X(z) \leq \\ &\leq M_\delta(u) + CM_\varepsilon(u) \leq 2CM_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

Se $\delta \geq \frac{\varepsilon}{4}$ usiamo il ricoprimento di $B_\delta(x)$ fatto dalle palle $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ per $i = 1, \cdots, k$ dato dal lemma 2.17, ottenendo:

$$I \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu(B_\delta(x))} \int_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon| \, d\sigma_X(y) \leq$$

$$\frac{2}{\mu(B_\delta(x))} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)} \left( \left| u(y) - \overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \right| + \left| \overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) - \overline{u}_\varepsilon(x_i) \right| + \left| \overline{u}_\varepsilon(x_i) - \overline{u}_\varepsilon(y) \right| \right) d\sigma_X(y) \leq$$

$$\leq \frac{C}{\mu(B_\delta(x))} M_\varepsilon(u) \sum_{i=1}^{k} \mu(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)).$$

Usando il lemma 2.17 si ottiene che $I \leq CM_\varepsilon(u)$. □

**Lemma 2.19.** *Esiste una costante $A = A(X)$ che dipende solo da $X$ tale che se $u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ allora*

$$M_0(u) \leq dist\left(u, VMO\left(X, \mathbb{R}^N\right)\right) \leq AM_0(u). \tag{2.13}$$

*Dimostrazione.* La seconda disuguaglianza è una conseguenza del lemma precedente. Per la prima osserviamo che per ogni $u$, $v \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ e per ogni $a \in [0, r_0[$ si ha per la disuguaglianza triangolare

$$M_a(u) \leq M_a(v) + M_a(u - v).$$

Se $v \in C^0(X, \mathbb{R}^N)$ allora si ha $M_0(v) = 0$ e quindi

$$M_0(u) \leq M_0(u - v) \leq \|u - v\|_{BMO}.$$

□

A questo punto non è difficile dimostrare il seguente

**Teorema 2.20.** *$u \in VMO(X, \mathbb{R}^N)$ se e solo se $u \in BMO(X, \mathbb{R}^N)$ e*

$$⨍_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y) \longrightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \to 0 \text{ uniformemente in } x. \tag{2.14}$$

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda l'implicazione $VMO \Rightarrow (2.14)$ sia $\delta > 0$. Allora esiste una funzione $v \in C^0(X, \mathbb{R}^N)$ tale che $\|u - v\|_{BMO} < \frac{\delta}{2}$. Allora si ha

$$\begin{aligned}
&⨍_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y) \leq \\
\leq &⨍_{B_\varepsilon(x)} |(u(y) - v(y)) - (\overline{u}_\varepsilon(x) - \overline{v}_\varepsilon(x))| d\sigma_X(y) + \\
+ &⨍_{B_\varepsilon(x)} |v(y) - \overline{v}_\varepsilon(x)| d\sigma_X(y) \leq \\
\leq &\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon$ abbastanza piccolo si ottiene (2.14). Per l'implicazione opposta osserviamo che (2.14) ci dice che $M_0(u) = 0$, usando il lemma precedente si ottiene la tesi. □

**Corollario 2.20.1.** *Per ogni $u \in VMO(X, \mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\|\overline{u}_\varepsilon - u\|_{BMO} \to 0 \text{ e } \overline{u}_\varepsilon \to u \text{ in } L^1 \text{ se } \varepsilon \to 0.$$

**Corollario 2.20.2.** *Per ogni $u \in VMO(X, Y)$ si ha*

$$\|\overline{u}_\varepsilon - u\|_{BMO} \to 0 \text{ e } \overline{u}_\varepsilon \to u \text{ in } L^1 \text{ se } \varepsilon \to 0.$$

## 2.3 Teoria del grado in VMO

In questa sezione discutiamo l'argomento principale della tesi. Se $u \in C^0(X, Y)$ allora $x \to \overline{u}_\varepsilon(x)$ mappa $X$ in $\mathbb{R}^N$ ma non su $Y$, comunque per $\varepsilon$ piccolo è vicina ad $Y$, perché $\overline{u}_\varepsilon \to u$ uniformemente. Sorprendentemente questa proprietà è vera anche se $u$ non è continua, a patto che sia $u \in VMO(X, Y)$. Per la teoria affrontata nella sezione precedente, infatti, si ha:

$$dist(\overline{u}_\varepsilon, Y) \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - \overline{u}_\varepsilon(x)| \, d\sigma_X(y) \leq M_\varepsilon(u) \to 0 \text{ se } \varepsilon \to 0. \tag{2.15}$$

Questo fatto è il cuore della tesi, infatti ci permette di proiettare $\overline{u}_\varepsilon$, per $\varepsilon$ piccolo, sul suo punto più vicino in $Y$. Denotiamo con $P$ l'operatore di proiezione in $\mathbb{R}^N$ al punto più vicino in $Y$: per quanto detto questo è ben definito almeno in un intorno tubolare di $Y$. Definiamo allora per $\varepsilon$ più piccolo di un certo $\varepsilon_0$

$$u_\varepsilon(x) := P\left(\overline{u}_\varepsilon(x)\right).$$

Forti di questa proiezione e della teoria precedente possiamo dare la tanto annunciata

**Definizione 2.21.** *Sia $u \in VMO(X,Y)$, allora per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo si definisce*

$$deg(u, X, Y) = deg(u_\varepsilon, X, Y). \tag{2.16}$$

Osserviamo che per $\varepsilon$ piccolo, poichè $u_\varepsilon$ è continua, $deg(u_\varepsilon, X, Y)$ è un intero ben definito, inoltre non dipende da $\varepsilon$. Dati infatti $\varepsilon$ e $\varepsilon_1$ piccoli, per dimostare che i gradi sono uguali si può usare facilmente l'omotopia $u_{t\varepsilon+(1-t)\varepsilon_1}$ al variare di $t$ tra $[0,1]$. A priori la definizione di grado che abbiamo dato potrebbe dipendere dalla scelta della metrica su $X$ e dall'immersione di $Y$; fortunatamente non siamo in questa situazione, come dimostreremo con la teoria di seguito.

**Lemma 2.22.** *Sia $u \in VMO(X,Y)$ e supponiamo che per un certo vettore costante $\xi \in \mathbb{R}^N$ si abbia $u(x) + \xi \in Y$ quasi ovunque. Allora $deg(u + \xi) = deg(u)$.*

*Dimostrazione.* Chiaramente la tesi per $\xi = 0$ è banale, supponiamo pertanto $\xi \neq 0$. Dimostreremo che $deg(u) = deg(u+\xi) = 0$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che si abbia $\xi = (\xi_1, 0, \cdots, 0)$ con $\xi_1 > 0$ ed inoltre che $0 \in Y$ e che $y_1$ sia minore o uguale di 0 per ogni $y \in Y$. Allora $u_1(x) \leq -\xi_1$ per quasi ogni $x \in X$. Di conseguenza per $\varepsilon < r_0$ la prima componente di $\overline{u}_\varepsilon(x)$ è minore o uguale a $-\xi_1$, da cui, per $\varepsilon$ piccolo, la prima componente di $P(\overline{u}_\varepsilon(x)) = u_\varepsilon$ è minore o uguale a $-\frac{\xi_1}{2}$. Allora l'immagine di $u_\varepsilon$ non ricopre $Y$ e quindi $0 = deg(u_\varepsilon) = deg(u)$. Scambiando i ruoli di $u$ e $u+\xi$ concludiamo che $deg(u + \xi) = 0$. □

**Lemma 2.23** (Caratterizzazione dei compatti in VMO)**.** *Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme compatto di $VMO(X, \mathbb{R}^N)$, allora*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon(u) = 0 \text{ uniformemente in } u \in \mathcal{F}. \tag{2.17}$$

*Viceversa se $\mathcal{F}$ è una qualsiasi famiglia di funzioni $VMO(X, \mathbb{R}^N)$ tali per cui vale (2.17), allora $\mathcal{F}$ è contenuto in un compatto di $VMO(X, \mathbb{R}^N)$.*

Per una dimostrazione (tutt'altro che banale) di questo lemma si veda [3].

**Teorema 2.24** (Stabilità del grado per perturbazioni in VMO)**.** *Sia $u \in VMO(X,Y)$. Allora esiste $\delta > 0$ dipendente da $u$ tale che se $v \in VMO(X,Y)$ e $dist(u,v) < \delta$, allora $deg(v) = deg(u)$. (Ricordiamo che $dist(u,v)$ è indotta da $\|\cdot\|_{BMO}$ una volta fissata l'immersione di $Y$ in $\mathbb{R}^N$)*

*Dimostrazione.* Procediamo per assurdo e supponiamo, quindi, che la tesi sia falsa. Esiste quindi una successione $v_j$ tale che

$$\|v_j - u\|_{BMO} \to 0 \text{ e } |deg(v_j) - deg(u)| \geq 1.$$

Poichè $v_j$ è compatta in $VMO$, sappiamo dal lemma di caratterizzazione dei compatti in $VMO$ che

$$dist(\overline{v}_{j,\varepsilon}(x), Y) \longrightarrow 0 \text{ se } \varepsilon \to 0$$

uniformemente in $j$ ed in $x$. Quindi esiste un certo $\varepsilon_0 > 0$ per cui è ben definita per ogni $j$ e per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$v_{j,\varepsilon} := P(\overline{v}_{j,\varepsilon}).$$

Per definizione si ha

$$deg(v_j) = deg(v_{j,\varepsilon}) \ \forall j, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{2.18}$$

Fissiamo allora un $\varepsilon < \varepsilon_0$, e consideriamo

$$\xi_j = \fint_X (v_j(y) - u(y)) d\sigma_X(y).$$

Per il lemma 2.9 esiste una costante $C$ dipendente solo da $X$ tale che:

$$\begin{aligned}
&\int_X |v_j(y) - u(y) - \xi_j| \, d\sigma_X(y) \leq \\
\leq& C\|v_j - u - \xi_j\|_{BMO(X)} + \left| \int_X (v_j(y) - u(y) - \xi_j) \, d\sigma_X(y) \right| = \\
=& C\|v_j - u - \xi_j\|_{BMO(X)} \leq C \left( \|v_j - u\|_{BMO(X)} + \|\xi_j\|_{BMO(X)} \right) = \\
=& C\|v_j - u\|_{BMO(X)}.
\end{aligned}$$

A meno di passare ad una sottosuccessione possiamo assumere che $\xi_j$ converga in $Y$ ad un certo vettore $\xi$, dal momento che $Y$ è limitata. Quindi $v_j \to u + \xi$ in $L^1$. Di conseguenza $u + \xi \in Y$ quasi ovunque ed inoltre $\overline{v}_{j,\varepsilon} \to \overline{u}_\varepsilon + \xi$ uniformemente su $X$ quando $j \to \infty$. Quindi $v_{j,\varepsilon} \to (u + \xi)_\varepsilon$ uniformemente su $X$ per $j \to \infty$. Per $j$ abbastanza grande si ha dunque che $deg(v_{j,\varepsilon}) = deg((u + \xi)_\varepsilon)$ e di conseguenza che $deg(v_{j,\varepsilon}) = deg(u + \xi)$ per (2.18) e per la definizione di $deg(u + \xi)$. A questo punto il lemma precedente ci fornisce l'assurdo cercato. $\square$

Questo teorema è molto potente e risponde a tutte le domande che ci siamo posti nel corso della nostra costruzione. Si deducono da esso, infatti, i seguenti corollari.

**Corollario 2.24.1.** *Sia $H_t(\cdot)$ una famiglia ad un parametro di funzioni $VMO$ da $X$ a $Y$, dipendente con continuità dal parametro temporale $t$ rispetto alla topologia $BMO$. Allora $deg\,(H_t(\cdot))$ è indipendente da $t$.*

**Corollario 2.24.2.** *$deg(u, X, Y)$ è indipendente dalla metrica riemanniana su $X$ e dall'immersione di $Y$ in $\mathbb{R}^N$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo di avere un'altra metrica su $X$ e un'immersione liscia di $Y$ in qualche $\mathbb{R}^N$. Otteniamo un'altra famiglia $\tilde{u}_\varepsilon$ che mappa $X$ in $Y$. Sia $\tilde{d}$ il grado corrispondente. Per il corollario 2.13.2 $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ in $BMO(X, Y)$ se $\varepsilon \to 0$. Applicando il teorema di stabilità si ottiene la tesi. $\square$

# Capitolo 3

# Teoria del grado in $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$ e serie di Fourier

## 3.1 Lo spazio $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

In questa sezione introdurremo gli spazi di Sobolev. Considereremo $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Denoteremo con $\alpha$ un multi-indice, ossia un vettore $(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. Dati $\alpha$, $\beta \in \mathbb{N}^N$ multi-indici e $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ un vettore, definiamo le seguenti regole:

- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \cdots, \alpha_N \pm \beta_N)$
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i$ per ogni $i = 1, \cdots, N$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$
- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$, dove $D_i^j = \partial^j / \partial x_i^j$
- $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ con la convenzione $0^0 = 1$
- $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}$ se $\alpha \geq \beta$.

Per i nostri scopi è di fondamentale importanza la seguente

**Definizione 3.1.** *Siano $u$, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremo che $v = D^\alpha u$ in senso debole se vale:*

$$\int_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Osserviamo che la definizione appena data è ben posta in quanto la derivata debole se esiste è unica grazie al seguente lemma, di cui però omettiamo la facile dimostrazione.

**Lemma 3.2** (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). *Sia $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega w\phi dx = 0, \quad \textit{per ogni} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

*allora $w \equiv 0$ quasi ovunque.*

**Definizione 3.3.** *Si chiama spazio di Sobolev di parametri $k$ e $p$ sull'aperto $\Omega$ il seguente spazio di funzioni:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\, |D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ per } |\alpha| \le k\}.$$

Lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ appena introdotto risulta essere uno spazio di Banach con la norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Riportiamo la disuguaglianza di Poincarè che ci sarà utile in seguito.

**Proposizione 3.4.** *Siano $1 \le p \le +\infty$ e $\Omega$ un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^N$ avente bordo regolare. Allora esiste una costante $C(N,p)$, dipendente solo da $N$ e $p$, tale che per ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha*

$$\left\| u - \fint_\Omega u \right\|^p_{L^p(\Omega)} \le C(N,p) \frac{(diam\ \Omega)^{N+p}}{\mu(\Omega)} \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{3.1}$$

*dove $\nabla u$ indica il vettore delle derivate prime deboli (gradiente debole) di $u$.*

Lo spazio di Sobolev $W^{1,N}(\Omega)$ costituisce una classe importante di funzioni $VMO(\Omega)$. Infatti, presa $B \subset \Omega$ una palla, per la disuguaglianza di Poincarè si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f - f_B| \, dx \le \frac{1}{\mu(B)} \mu(B)^{1-\frac{1}{N}} \|f - f_B\|_{L^N(B)} = \\
=&\frac{1}{\mu(B)^{\frac{1}{N}}} \|f - f_B\|_{L^N(B)} \le \frac{C(N)^{\frac{1}{N}} (\text{diam } \Omega)^2}{\mu(B)^{\frac{2}{N}}} \|\nabla f\|_{L^N(B)} = \\
=&C'(N) \|\nabla f\|_{L^N(B)} \to 0 \text{ se } \mu(B) \to 0
\end{aligned}$$

e dunque $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow VMO(\Omega)$.

Si può dimostrare che $C^k(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è un sottospazio di $W^{k,p}(\Omega)$, che però non è chiuso in esso. Questo tuttavia è un sottospazio molto importante per i nostri scopi, diamo pertanto la seguente

**Definizione 3.5.** *Definiamo $H^{k,p}(\Omega)$ la chiusura di $C^k(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)}$.*

Dunque banalmente risulta $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ e l'inclusione in generale è stretta, tuttavia sotto opportune ipotesi di regolarità per l'aperto $\Omega$ i due spazi coincidono. Tra le tante, una condizione molto debole è l'ipotesi del segmento: $\Omega$ verifica la proprietà del segmento se esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_j\}$ di $\partial\Omega$ ed una corrispondente successione $\{y_j\}$ di vettori non nulli, $y_j \in \mathbb{R}^N$, tale che se $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ per qualche $j$, allora $x + ty_j \in \Omega$ per $t \in (0,1)$. Fortunatamente per quanto ci riguarda questa condizione sarà sempre soddisfatta, pertanto d'ora in avanti lavoreremo esclusivamente con gli spazi $H^{k,p}$.

### 3.1.1 Tracce di funzioni $H^{k,p}(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}$

Introduciamo una notazione: per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, scriveremo $x = (\overline{x}, x_N)$, con $\overline{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $x_N \in \mathbb{R}$. Cominciamo col definire le tracce nel caso in cui $\Omega$ è un cilindro:

$$\Omega = \Gamma \times ]0, a[, \text{ con } \Gamma \text{ aperto di } \mathbb{R}^{N-1}_{\overline{x}} \text{ e } 0 < a < \infty.$$

**Definizione 3.6.** *Sia $\gamma_0 : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\Gamma)$ l'applicazione $u \to u_{|\Gamma}$, diremo che $\gamma_0 u$ è la traccia di $u$ su $\Gamma$.*

Ovviamente $\gamma_0$ è un operatore lineare, ed inoltre si ha

**Proposizione 3.7.** *L'operatore lineare $\gamma_0$ è continuo da $C^1(\overline{\Omega})$, munito della norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, in $L^p(\Gamma)$.*

*Dimostrazione.* Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e sia $\overline{x} \in \Gamma$. Allora per ogni $x_N \in (0, a)$ e $x = (\overline{x}, x_N)$ si ha

$$u(x) = u(\overline{x}, 0) + \int_0^{x_N} \frac{\partial}{\partial x_N} u(\overline{x}, t)dt$$

da cui

$$|u(\overline{x}, 0)|^p \leq c(p) \left[ |u(x)|^p + a^{p-1} \int_0^a \left| \frac{\partial}{\partial x_N} u(\overline{x}, t) \right|^p dt \right]$$

e quindi integrando su tutto $\Omega$

$$\int_\Gamma |u(\overline{x}, 0)|^p d\overline{x} \leq \frac{c(p)}{a} \left[ \int_\Omega |u(x)|^p dx + a^p \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_N} u(x) \right|^p dx \right] \leq$$
$$\leq c(p, a)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Da questa proposizione discende che esiste un unico prolungamento di $\gamma_0$ lineare e continuo $H^{1,p} \to L^p(\Gamma)$, che continueremo a chiamare $\gamma_0$.
È possibile dimostrare che i risultati ottenuti nel caso in cui $\Omega = \Gamma \times ]0, a[$ sono validi anche nel caso in cui $a = +\infty$. Purtoppo però ancora non ci possiamo accontentare, in quanto vorremmo poter definire l'operatore di traccia su $H^{1,p}(\Omega)$ con $\Omega$ aperto limitato qualsiasi, o quasi, di $\mathbb{R}^N$. Se $\partial\Omega$ è di classe $C^1$

è ben definito il concetto di integrale di superficie e possiamo quindi definire lo spazio $L^p(\partial\Omega)$ come la chiusura di $C^0(\partial\Omega)$ rispetto alla norma usuale

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Enunciamo, ora che abbiamo tutti gli strumenti, il teorema che volevamo, omettendone anche stavolta la dimostrazione.

**Teorema 3.8.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato avente frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^1$. La traccia $\gamma_0$ è un'applicazione lineare e continua che applica $C^1(\overline{\Omega})$, con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, in $L^p(\partial\Omega)$ e quindi si prolunga in modo unico ad un funzionale lineare e continuo $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tale che*

$$\|u\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p,\Omega)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \ \forall u \in H^{1,p}(\Omega),$$

*dove $c(p,\Omega)$ è una costante che dipende solo da $p$ e $\Omega$.*

### 3.1.2 Gli spazi $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$, per $0 < \theta < 1$

Iniziamo col definire gli spazi $H^{\theta,p}(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato e $\partial\Omega$ è di classe $C^1$. Se $u$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue, definiamo:

$$|u|^p_{\theta,p,\Omega} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+p\theta}}dxdy;$$

$$C^1_\sharp(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}) : |u|_{\theta,p,\Omega}\right\} < +\infty.$$

**Definizione 3.9.** *Per $0 < \theta < 1$, indicheremo con $H^{\theta,p}(\Omega)$ la chiusura di $C^1_\sharp(\overline{\Omega})$, rispetto alla norma $\|u\|_{H^{\theta,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + |u|^p_{\theta,p,\Omega}\right)^{\frac{1}{p}}$.*

Riportiamo una caratterizzazione di tale spazio dovuta a Gagliardo:

$$H^{\theta,p}(\Omega) = \left\{f \in L^p(\Omega) : \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+\theta p}}dxdy < \infty\right\}. \tag{3.2}$$

Grazie a questa caratterizzazione siamo in grado di dimostrare che $H^{\theta,p}(\Omega)$ è contenuto in $VMO(\Omega)$ per ogni $0 < \theta < 1$ e ogni $1 < p < \infty$ con $\theta p = N$; infatti se $B \subset \Omega$ è una palla:

$$\begin{aligned}\int_B\int_B |f(x)-f(y)|dxdy &= \int_B\int_B \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+\theta}}|x-y|^{\frac{N}{p}+\theta}dxdy \\ &\leq C\mu(B)^{\frac{1}{p}+\frac{\theta}{N}}\int_B\int_B \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+\theta}}dxdy.\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Hölder deduciamo che:

$$\begin{aligned}&\int_B \int_B |f(x) - f(y)| dxdy \leq \\ \leq &C\mu(B)^{\frac{1}{p}+\frac{\theta}{N}+2-\frac{2}{p}} \left[ \int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+\theta p}} dxdy \right]^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

e quindi se $\theta p = N$

$$⨍_B ⨍_B |f(x) - f(y)| dxdy \leq C \left[ \int_B \int_B \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+\theta p}} dxdy \right]^{\frac{1}{p}},$$

il che implica che $H^{\theta,p}(\Omega)$ è contenuto in $VMO(\Omega)$.

Passiamo ora a definire gli spazi $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$ con $\Omega$ aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ avente frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^1$.
Poiché la frontiera è regolare e compatta esistono $\{U_j\}_{j=1,\cdots,m}$ ricoprimento finito di $\partial\Omega$ ed una famiglia $\{\varphi_j\}_{j=1,\cdots,m}$ di diffeomorfismi di classe $C^1$ con $\varphi_j : U_j \to Q$, dove $Q = \{y \in \mathbb{R}^N,\, y = (\overline{y}, y_N) : |\overline{y}| < 1,\, -1 < y_N < 1\}$. Per definizione questi diffeomorfismi verificano le seguenti proprietà:

$$\varphi(\Omega \cap U_j) = Q^+,\, \varphi(\partial\Omega \cap U_j) = Q \cap \{y_N = 0\}.$$

Sia $\{\alpha_j\}_{j=1,\cdots,m}$ una partizione dell'unità su $\partial\Omega$ subordinata al ricoprimento $\{U_j\}_{j=1,\cdots,m}$. Allora se $u$ è una funzione definita su $\partial\Omega$, la possiamo decomporre in $u = \sum_{j=1}^m (\alpha_j u)$ e definiamo:

$$\varphi_j^*(\alpha_j u)(\overline{y}, 0) = (\alpha_j u)(\varphi_j^{-1}(\overline{y}, 0)),\ \overline{y} \in Q \cap \{y_n = 0\}.$$

Siccome $\alpha_j$ è a supporto compatto in $U_j \cap \partial\Omega$, la funzione $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ è a supporto compatto in $Q \cap \{y_N = 0\}$ e dunque la si può considerare anche definita su $\mathbb{R}^{N-1}_{\overline{y}}$, prolungata a 0 fuori da $Q \cap \{y_N = 0\}$.

**Definizione 3.10.** *Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ avente frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^1$, allora definiamo*

$$H^{\theta,p}(\partial\Omega) = \left\{ u \in L^p(\partial\Omega) : \varphi_j^*(\alpha_j u) \in H^{\theta,p}(\mathbb{R}^{N-1}_{\overline{y}}),\ j = 1, \cdots, m \right\}.$$

Si può dimostrare che questa definizione è indipendente dalla scelta del sistema di carte locali $(U_j, \varphi_j)$ e dalla partizione dell'unità $\{\alpha_j\}$, inoltre si può verificare che

$$\|u\|_{H^{\theta,p}(\partial\Omega)} = \left( \sum_{j=1}^m \|\varphi_j^*(\alpha_j u)\|^p_{H^{\theta,p}(\mathbb{R}^{N-1}_{\overline{y}})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma su $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$ che lo rende uno spazio di Banach. Osserviamo infine che questa norma dipende dall'atlante e dalla partizione dell'unità scelti, tuttavia si verifica che, al variare di questi, le norme sono equivalenti. Chiudiamo questa sezione con il risultato più importante.

**Teorema 3.11.** *Se $\Omega$ è un aperto limitato tale che $\partial\Omega$ è di classe $C^1$, allora si ha*

$$\gamma_0(H^{1,p}(\Omega)) = H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega). \tag{3.3}$$

Per una dimostrazione si veda [9].

## 3.2 Grado topologico per funzioni in $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$

Presumibilmente la prima nozione di grado topologico fu data per mappe regolari da $S^1$ in $S^1$. Successivamente, in via leggermente più generale, venne definito il grado per le funzioni $u : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tramite la ben nota formula di Cauchy:

$$deg(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{\dot{u}}{u}. \tag{3.4}$$

Sia $\Gamma^+ \subset \mathbb{C}$ una curva chiusa orientata di classe $C^1$, e sia $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Consideriamo la sua parametrizzazione $t \to z(t) = x(t) + iy(t) + a$ con $t \in [0, 1]$ e $z(0) = z(1)$, e dunque $x(t) + iy(t) + a \neq a$ per ogni $t$. Allora la quantità

$$\omega(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a} \tag{3.5}$$

è un intero e viene chiamato indice di avvolgimento di $\Gamma$ rispetto al punto $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\omega(\Gamma, a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)-a} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{x'(t) + iy'(t)}{x(t) + iy(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(x(t) - iy(t))(x'(t) + iy'(t))}{x^2(t) + y^2(t)} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + i(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))}{x^2(t) + y^2(t)} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t))}{x^2(t) + y^2(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) + y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\ln(x^2 + y^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) + x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) + x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

poiché la forma $\frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{y}{x^2+y^2}dx$ è chiusa e la sua primitiva è $\ln(x^2 + y^2)$ che sul periodo conta quanti giri fa $\Gamma$ intorno ad $a$, in un verso o nell'altro, moltiplicato per $2\pi$. Osserviamo che $(\Gamma, a) \to \omega(\Gamma, a)$ è localmente costante, inoltre che $a \to \omega(\Gamma, a)$ è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, ed inoltre che è invariante per omotopia. Per l'unicità del grado dimostrata nel capitolo 1 si ha che $\omega$ è il grado delle funzioni $f$ che parametrizzano una curva chiusa.

Grazie a questa formula, alla teoria del grado in $VMO$ ed a qualche altro risultato in questo capitolo riusciremo a dare per le funzioni in $H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1) \subset VMO(S^1, S^1)$ una formula per il grado che dipenda soltanto dai coefficienti di Fourier di tali funzioni. Ricordiamo che $H^{\frac{1}{2}}(S^1)\left(= W^{\frac{1}{2},2}(S^1)\right)$, grazie alla caratterizzazione di Gagliardo, si può definire come:

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1) = \left\{ f \in L^2(S^1) : \int_{S^1}\int_{S^1} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy < \infty \right\}. \tag{3.6}$$

Forniamo un'ulteriore caratterizzazione di tale spazio in termini dei coefficienti di Fourier di tali funzioni attraverso il seguente

**Lemma 3.12.** *Data $f \in L^2(S^1)$ si ha*

$$\int_{S^1}\int_{S^1} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \, |a_n(f)|^2 , \tag{3.7}$$

*dove $a_n(f)$ è l'$n-$esimo coefficiente di Fourier della $f$.*

*Dimostrazione.*

$$\int_{S^1}\int_{S^1} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sum a_n e^{in\vartheta} - \sum a_n e^{in\psi}\right|^2}{|e^{i\vartheta}-e^{i\psi}|^2} d\vartheta d\psi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{|e^{i\gamma}-1|^2} \int_0^{2\pi} \left|\sum a_n (1-e^{in\gamma}) e^{in\vartheta}\right|^2 d\vartheta =$$
$$= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{in\gamma}-1\right|^2}{|e^{i\gamma}-1|^2} d\gamma.$$

Osserviamo ora che per $n \geq 1$ si ha

$$\frac{\left|e^{in\gamma}-1\right|^2}{|e^{i\gamma}-1|^2} = \left(e^{i(n-1)\gamma} + \cdots + 1\right)\left(e^{-i(n-1)\gamma} + \cdots + 1\right),$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{in\gamma}-1\right|^2}{|e^{i\gamma}-1|^2} d\gamma = 2\pi|n|,$$

e quindi la tesi. □

Torniamo, per un momento, a considerare una funzione $f \in C^1(S^1, S^1)$, e sviluppiamola in serie di Fourier:

$$f(\vartheta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\vartheta}.$$

Inserendo tale sviluppo nella formula di Cauchy si ha:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\overline{f(z)}f'(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\overline{f(\vartheta)}f'(\vartheta)d\vartheta = \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n,m} m\bar{a}_n a_m e^{i(m-n)\vartheta}d\vartheta = \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m}\left(\sum_{n} m\bar{a}_n a_m e^{i(m-n)\vartheta}\right)d\vartheta = \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} m|a_m|^2 d\vartheta = \sum_{m\in\mathbb{Z}} m|a_m|^2.
\end{aligned}
$$

Tutti i passaggi fatti sono leciti in quanto avevamo supposto $f \in C^1(S^1, S^1)$. Lo scopo della teoria seguente è quello di dimostrare che tale formula vale non solo per le funzioni regolari, ma per tutte le funzioni $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$.

**Lemma 3.13.** *Data una funzione $f \in VMO(S^1)$ esiste una successione di funzioni $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(S^1)$ tale che $\|f - f_k\|_{BMO(S^1)} \to 0$ per $k \to \infty$.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $f \in VMO\,([-\pi, \pi])$. Sia $\vartheta(t) \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ tale che $\vartheta(t) \geq 0$ e $\int_{-1}^1 \vartheta(t)dt = 1$, e poniamo

$$f_k(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \frac{s}{k})\vartheta(s)ds.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Esiste allora $\sigma(\varepsilon)$ tale che

$$⨍_{I(x_0,\sigma)} \left|f(t) - \overline{f}_{I(x_0,\sigma)}\right|^2 dt < \varepsilon \;\forall x_0 \in [-\pi, \pi],\, \forall \sigma \in ]0, \sigma(\varepsilon)]. \tag{3.8}$$

Allora se $x_0 \in [-\pi, \pi]$ e $\sigma > \sigma(\varepsilon)$

$$⨍_{I(x_0,\sigma)} \left|f(t) - f_k(t) - (\overline{f - f_k})_{I(x_0,\sigma)}\right|^2 dt \leq \frac{c}{\sigma}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_k(t)|^2\, dt \leq$$

$$\leq \frac{c}{\sigma\varepsilon}\|f - f_k\|_{L^2([-\pi,\pi])} \leq \varepsilon \;\forall k \geq k_\varepsilon.$$

Invece se $x_0 \in [-\pi, \pi]$ e $\sigma \in ]0, \sigma(\varepsilon)]$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\fint_{I(x_0,\sigma)} \left| f(t) - f_k(t) - (\overline{f - f_k})_{I(x_0,\sigma)} \right|^2 dt = \\
=&\fint_{I(x_0,\sigma)} \left| f(t) - \fint_{I(x_0,\sigma)} f(s)ds - \left( f_k(t) - \fint_{I(x_0,\sigma)} f_k(s)ds \right) \right|^2 dt \leq \\
\leq& C \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| f(t) - f_{I(x_0,\sigma)} \right|^2 dt + \\
+& C \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \frac{s}{k})\vartheta(s)ds - \fint_{I(x_0,\sigma)} \int_{-\pi}^{\pi} f(r - \frac{s}{k})\vartheta(s)dsdr \right|^2 dt \leq \\
\leq& C\varepsilon + C \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(s) \left[ f(t - \frac{s}{k}) - \fint_{I(x_0,\sigma)} f(r - \frac{s}{k})dr \right] ds \right|^2 dt \leq \\
\leq& C\varepsilon + C \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(s)ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(s) \left| f(t - \frac{s}{k}) - \fint_{I(x_0,\sigma)} f(r - \frac{s}{k})dr \right|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right|^2 dt \leq \\
\leq& C\varepsilon + C \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(s) \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| f(t - \frac{s}{k}) - \fint_{I(x_0,\sigma)} f(r - \frac{s}{k})dr \right|^2 dtds = \\
\leq& C\varepsilon + c \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(s) \fint_{I(x_0 - \frac{s}{k},\sigma)} \left| f - f_{I(x_0 - \frac{s}{k},\sigma)} \right|^2 dtds \leq \\
\leq& C\varepsilon + C\varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}^+.
\end{aligned}$$

Pertanto per ogni $k \geq k_\varepsilon$ si ha

$$\sup_{x_0 \in [-\pi,\pi]} \sup_{\sigma > 0} \fint_{I(x_0,\sigma)} \left| (f(t) - f_k(t)) - \overline{(f - f_k)}_{I(x_0,\sigma)} \right|^2 dt < \varepsilon,$$

e d'altronde, ovviamente,

$$\| f - f_k \|_{L^2(-\pi,\pi)} < \varepsilon.$$

Ciò prova che $f_k \to f$ in $BMO[-\pi,\pi]$, da cui la tesi. $\square$

**Osservazione 3.14.** *Se $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1)$, la stessa successione converge ad $f$ anche in $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$.*

Siamo ora in grado di stabilire l'annunciato

**Teorema 3.15.** *Per ogni $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, S^1)$ si ha:*

$$deg_{VMO}(f) = deg_{H^{\frac{1}{2}}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left| a_n(f) \right|^2.$$

*Dimostrazione.* Sappiamo dalla teoria trattata nel capitolo precedente che $deg_{VMO}(f)$ è stabile per piccole perturbazioni: cioè che esiste un $\delta > 0$ (dipendente da $f$) tale che

$$deg_{VMO}(f) = deg_{VMO}(g) \text{ se } \| f - g \|_{BMO(S^1)} < \delta.$$

Detta quindi $\{f_k\}$ la successione costruita nel lemma precedente si ha per ogni $k \geq k_\varepsilon$:
$$deg_{VMO}(f) = deg_{VMO}(f_k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left|a_n(f_k)\right|^2 .$$

Ma siccome $f_k \to f$ anche in $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$, si ha che $\sum n\left|a_n(f_k)\right|^2$ converge a $\sum n\left|a_n(f)\right|^2$. Poiché le $f_k$ sono regolari, si ha che $\sum n\left|a_n(f_k)\right|^2 \in \mathbb{Z}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; ne segue che $\sum n\left|a_n(f)\right|^2 \in \mathbb{Z}$ ed esso coincide con $deg_{VMO}(f)$. $\square$

# Bibliografia


[1] F. John, L. Nirenberg *On function of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math., 1961.

[2] H. Brezis *New questions related to the topological degree*, The unity of mathematics, 2006.

[3] H. Brezis, L. Nirenberg *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math., 1995.

[4] P. Acquistapace *On BMO regularity for linear elliptic systems*, Ann. Mat. Pura Appl., 1992.

[5] S. Campanato *Sistemi ellittici in forma divergenza*, Quaderni Sc. Norm. Sup. Pisa, 1980.

[6] R. Adams, J. Fournier *Sobolev spaces*, Elsevier/Academic Press, 2003.

[7] M. Giaquinta *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic sistems*, Birkhäuser, 1993.

[8] K. Deimling *Nonlinear functional analysis*, Springer, 1985.

[9] L. Lions, E. Magenes *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1 Dunod, 1968.

[10] L. Nirenberg *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Lecture Notes, Amer. Math. Soc.,1970.

[11] A. Abbondandolo *Grado Topologico*, Appunti, Università di Pisa