



UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Controllo lineare quadratico per problemi ai limiti parabolici ed iperbolici.

CANDIDATO:
Filippo Giuliani

RELATORE:
Prof. Paolo Acquistapace

CONTRORELATORE:
Prof. Vladimir Georgiev

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

1	Problemi di evoluzione lineare	1
1.1	Sistemi omogenei	2
1.2	Sistemi non omogenei	3
1.3	Sistemi non omogenei perturbati	7
2	Problema di controllo interno	9
2.1	Teoria variazionale	9
2.2	Programmazione dinamica	13
2.3	Sintesi del controllo ottimale	17
2.4	Equazione di Riccati	18
2.5	Il caso analitico	21
2.5.1	Risoluzione con l'equazione di Riccati	21
2.5.2	Il semigruppoo e^{tA}	23
2.5.3	Sintesi del controllo ottimale	30
3	Problemi di controllo al bordo	37
3.1	Estensione di semigruppoo in spazi di Hilbert	37
3.2	Problema parabolico	40
3.2.1	Sintesi del controllo ottimale	48
3.3	Problema iperbolico	50
3.4	Un controesempio	57
	Appendice	62

Ai miei genitori.

Introduzione

La teoria del controllo nasce dall'esigenza di affrontare sfide proposte dalle applicazioni in campo ingegneristico ed economico.

In generale un problema di controllo considera un sistema ricevente un segnale dall'esterno (input), del quale si vuole modificare, attraverso un sistema di controllo, il segnale in uscita (output).

I sistemi di controllo sono principalmente di due tipi: *open loop* (OP) e *closed loop* (CL).

Un sistema *open loop* riceve l'input, lo analizza e lo modifica, trasferendolo in seguito al sistema che emette l'output.

La realizzazione di questo controllo risulta economica per la sua semplicità, ma, al contempo, si possono presentare molti difetti: non è possibile compensare eventuali disturbi al sistema e non è possibile migliorare le prestazioni di una macchina sfruttando i dati relativi agli errori commessi.

Queste mancanze vengono colmate dal controllo di tipo *closed loop* (o *feedback*). Possiamo rappresentare questo sistema con il seguente schema

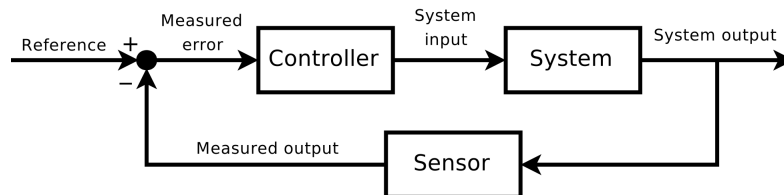


Figura 1: <http://blog.identropy.com/IAM-blog/bid/31405/Identity-Activity-Monitoring>

Quando viene prodotto un output, il controllo lo modifica e lo immette nuovamente nel sistema. Questo procedimento permette ad un sistema soggetto a disturbi di stabilizzarsi.

Spesso l'obiettivo di un problema di controllo è quello di mantenere costante nel tempo una determinata proprietà dei dati di output.

Vediamo qualche esempio.

- Abbiamo un nastro trasportatore di cui vogliamo mantenere costante la velocità. Se fosse presente un peso rilevante sul nastro, la sua velocità

diminuirebbe. Un sistema di controllo *feedback* che regola il voltaggio del motore che muove il nastro rileva il cambio di velocità e aumenta conseguentemente il voltaggio.

- Vogliamo annaffiare un prato installando un sistema automatico di irrigazione. Potremmo porre un controllo che regola l'apertura degli irrigatori periodicamente (tipo *open loop*). Se ad un certo punto piovesse, la quantità di acqua emessa in quel momento sarebbe sprecata. Se invece venisse installato un controllo che regola l'apertura degli irrigatori e rileva anche l'umidità dell'aria vicina al prato, sarebbe possibile tenere chiusi gli irrigatori al momento opportuno (tipo *closed loop*).

Dallo studio dei problemi di controllo deriva una teoria in cui si considerano metodi di ottimizzazione vincolati a sistemi controllati: la **Teoria del controllo ottimo**. Solitamente la quantità da ottimizzare viene chiamata *costo*.

Se ripensiamo all'esempio degli irrigatori e decidiamo di voler risparmiare acqua, stiamo formulando un problema di controllo ottimo.

Situazioni come questa possono essere studiate tramite modelli matematici. Nel corso degli anni la teoria matematica astratta del controllo è entrata a far parte dello studio standard di problemi di controllo in situazioni reali.

Vari strumenti e approcci matematici, anche molto sofisticati, sono stati utilizzati in questo campo scientifico che, inizialmente, era prettamente ingegneristico. I matematici che hanno posto le basi della teoria del controllo astratta sono stati il russo Lev Semenovich Pontryagin (1908 – 1988) e lo statunitense Richard Ernest Bellman (1920 – 1984).

Bellman fu l'ideatore della *programmazione dinamica*, un particolare processo che prevede la scomposizione di un problema complesso in una serie di problemi più semplici risolvibili in sequenza.

In questa tesi la programmazione dinamica costituisce il principale strumento di soluzione dei problemi di controllo ottimo.

Il nostro riferimento per questo elaborato è il libro *Representation and control of infinite dimensional systems* (2007) di Alain Bensoussan, Giuseppe Da Prato, Michel C. Delfour e Sanjoy K. Mitter.

In questo lavoro ci limitiamo a trattare problemi di controllo lineare quadratico nei quali il vincolo è costituito dall'espressione della soluzione mild di un problema di evoluzione lineare. Tali problemi differenziali sono legati al generatore di un semigruppato fortemente continuo o analitico, definito su uno spazio di Hilbert reale.

L'obiettivo è non solo quello di dimostrare l'esistenza e l'unicità di un controllo e di uno stato ottimi, ma anche di provare la relazione fondamentale che lega questi due elementi: la *formula di feedback*.

Nel primo capitolo presentiamo alcuni classici risultati di esistenza di soluzioni mild per problemi di Cauchy astratti.

Nel secondo capitolo affrontiamo il problema di controllo lineare quadratico con operatore di controllo limitato. Questo capitolo è suddiviso in due parti: nella prima, dove il sistema di stato è legato a un semigruppato fortemente continuo,

utilizziamo l'approccio storicamente più antico, quello della teoria variazionale, che sfrutta il principio del massimo di Pontryagin e il principio di ottimalità di Bellman; nella seconda parte consideriamo il caso di semigruppato analitico e utilizziamo la programmazione dinamica combinata allo studio dell'equazione di Riccati.

Nel terzo capitolo consideriamo il problema di controllo lineare quadratico con operatore di controllo illimitato. L'approccio utilizzato è sempre quello della programmazione dinamica e, come nel secondo capitolo, si considerano distintamente il caso analitico e quello fortemente continuo.

Ogni capitolo termina con un esempio di problema di controllo ottimo riguardante un problema ai limiti per un'equazione alle derivate parziali, che si verifica rientrare nelle ipotesi astratte. La verifica completa dei fatti scritti negli esempi viene rimandata all'appendice.

Inoltre, in appendice, vengono brevemente definite le potenze frazionarie di operatori lineari, strumento fondamentale della teoria esposta nel terzo capitolo.

Capitolo 1

Problemi di evoluzione lineare

In questo capitolo presentiamo alcuni risultati classici su problemi di Cauchy astratti usando la teoria dei semigruppı fortemente continui. Ci interessa sapere quando questi problemi hanno soluzione e se possiamo scrivere esplicitamente tali soluzioni; in particolare, ci concentreremo sull'esistenza di soluzioni di tipo mild perché costituiranno il vincolo dei problemi di controllo ottimo che tratteremo in questo elaborato.

Richiamiamo le definizioni di semigruppı fortemente continuo e di generatore di semigruppı.

Definizione 1.1. Sia X uno spazio di Banach reale. Una famiglia di operatori $(T(t))_{t \geq 0}$ lineari e continui da X in sé tali che

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s) & t, s \in [0, \infty), \\ T(0) = I \end{cases}$$

si chiama semigruppı. Chiamiamo le relazioni sopra scritte *leggi di gruppo*. Inoltre, se per ogni $x \in X$ l'applicazione

$$t \longmapsto T(t)x$$

risulta continua, allora $(T(t))_{t \geq 0}$ si dice semigruppı fortemente continuo (o semigruppı C_0).

Per semplificare le notazioni, denoteremo la famiglia di operatori $(T(t))_{t \geq 0}$ con $T(t)$.

Definizione 1.2. Sia $T(t)$ un semigruppı definito su uno spazio di Banach X . L'operatore A definito da

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)-I}{h} x \right\} \\ Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)-I}{h} x, \end{cases} \quad (1.1)$$

si dice generatore del semigruppoo $T(t)$.

Al momento, quando parliamo di problema di controllo ottimo ci riferiamo ad un problema di minimo vincolato per qualche funzionale, dove il vincolo è costituito da un sistema differenziale.

Nelle applicazioni tali sistemi forniscono un modello matematico dell'evoluzione temporale di un qualche fenomeno fisico e il funzionale da minimizzare rappresenta una quantità dipendente dalla trasformazione di questo fenomeno.

1.1 Sistemi omogenei

Sia A il generatore di un semigruppoo fortemente continuo $T(t)$ in uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|)$ e $M > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ due costanti tali che

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Consideriamo il problema di evoluzione lineare omogeneo

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (1.2)$$

ove $T > 0$. Osserviamo che, considerando un intervallo temporale compatto, si ha

$$\sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\| \leq \sup_{t \in [0, T]} Me^{\omega t} \leq K$$

per una certa costante $K > 0$.

Definizione 1.3. Una funzione $x \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T]; X)$ che soddisfa il sistema (1.2) e tale che $x(t) \in D(A)$ per ogni $t \in (0, T]$ si dice soluzione del problema omogeneo.

Lemma 1.4. Se $g \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T]; X)$ e $g'(t) = 0$ per ogni $t \in (0, T)$, allora $g(t)$ è costante.

Dimostrazione. Sia $T \in X^*$, allora la composizione di T con g è un'applicazione a valori in \mathbb{R} tale che

$$\frac{d}{dt} T \circ g = T \circ \frac{d}{dt} g = 0$$

Quindi la funzione $T \circ g$ è costante su $[0, T]$ per ogni funzionale lineare T su X . Per il teorema di Hahn-Banach, per ogni $x \in X$, esiste $T_x \in X^*$ tale che

$$\|T_x\|_{X^*} = 1, \quad |T_x(x)| = \|x\|;$$

allora per ogni $s, t \in [0, T]$ si ha, scelto $T = T_{g(t)-g(s)}$,

$$\|g(t) - g(s)\| = |T(g(t) - g(s))| = |T(g(t)) - T(g(s))| = 0,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.5. Per ogni $x \in D(A)$ esiste una e una sola soluzione del problema (1.2).

Dimostrazione. Esistenza: per definizione di generatore la funzione $x(t) = T(t)x$ soddisfa (1.2) e, poiché $x \in D(A)$, l'applicazione $T(t)x$ è differenziabile con continuità e la sua immagine è contenuta nel dominio di A .

Unicità: sia $v \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T]; X)$ un'altra soluzione. Definiamo

$$g(s) = T(t-s)v(s) \in C^1((0, T); X);$$

ricordando che $v(t) \in D(A)$ si ha

$$g'(s) = -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) = -AT(t-s)v(s) + T(t-s)[Av(s)] = 0$$

allora $g(s)$ è costante e $v(t) = g(t) = g(0) = T(t)x$. \square

1.2 Sistemi non omogenei

Consideriamo ora il problema di evoluzione lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $f \in L^1(0, T; X)$, $x \in D(A)$ e l'operatore A rispetta le stesse ipotesi descritte nel paragrafo precedente.

Definizione 1.6. Una funzione $x \in C([0, T]; X)$, differenziabile in $(0, T]$, che soddisfa il problema (1.3) e tale che $x(t) \in D(A)$ per ogni $t \in (0, T]$ si dice soluzione *classica* (o soluzione) del problema non omogeneo.

Definizione 1.7. La funzione

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (1.4)$$

si dice soluzione *mild* del problema (1.3) se risulta continua su $[0, T]$.

Nell'espressione (1.4) compare l'integrale di Bochner per funzioni definite su un intervallo reale e a valori in uno spazio di Banach. Richiamiamo qui una proprietà che useremo tacitamente nel seguito, ovvero il passaggio sotto segno di integrale di un operatore lineare chiuso.

Lemma 1.8. Se $f \in L^1(0, T; X)$ ed $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ è un operatore lineare chiuso tale che $Af \in L^1(0, T; X)$ allora

$$A \int_0^T f(t) dt = \int_0^T Af(t) dt.$$

Dimostrazione. Se $f \in L^1(0, T; X)$ allora esiste una successione di funzioni semplici $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Psi_n(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Supponiamo che le Ψ_n siano della forma seguente

$$\Psi_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n I_{B_i^n}(t)$$

dove B_i^n è un sottoinsieme di $[0, T]$ misurabile secondo Lebesgue, e indichiamo con y_n l'integrale di Bochner di Ψ_n .

Ovviamente

$$Ay_n = \sum_{i=1}^{k_n} Ax_i^n m(B_i^n),$$

dove abbiamo indicato con m la misura di Lebesgue su $[0, T]$.

Se $Af \in L^1(0, T; X)$ allora ha senso scrivere $\int_0^T Af(t) dt$ e, poiché A è chiuso, vale

$$A \int_0^T f(t) dt = A \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n = \int_0^T Af(t) dt.$$

□

Proposizione 1.9. *Il problema (1.3) ammette al più una soluzione.*

Dimostrazione. Siano y e z due soluzioni di (1.3) e poniamo $v = y - z$. La funzione v soddisfa il problema (1.2) con $x = 0$. Essendo $D(A)$ un sottospazio vettoriale, $0 \in D(A)$, allora per la proposizione 1.5

$$v(t) = T(t)0 = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

□

Lemma 1.10. *Se $g \in C^1([0, T]; X)$ allora*

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Dimostrazione. Fissato $t \in [0, T]$, sia $T \in X^*$ tale che $\|T\| = 1$ e $|T(x)| = \|x\|$. La funzione a valori reali $T \circ g$ appartenente a $C^1([0, T]; \mathbb{R})$ e quindi

$$T(g(t)) = T(g(0)) + \int_0^t T(g'(s)) ds$$

Si conclude che

$$\begin{aligned} 0 &= \left| T(g(t)) - T(g(0)) - \int_0^t T(g'(s)) ds \right| = \left| T \left[g(t) - g(0) - \int_0^t g'(s) ds \right] \right| = \\ &= \left\| g(t) - g(0) - \int_0^t g'(s) ds \right\|. \end{aligned}$$

□

La prossima proposizione ci mostra che non è riduttivo limitarsi a considerare la soluzione mild di un problema di evoluzione lineare se la funzione f è sufficientemente regolare.

Proposizione 1.11. *Se il problema (1.3) ammette una soluzione e $f \in C([0, T]; X)$ allora tale soluzione è di tipo mild.*

Dimostrazione. Sia $x(t)$ soluzione del problema (1.3) e definiamo

$$g(s) = T(t-s)x(s);$$

grazie agli stessi conti visti nella proposizione 1.5 si conclude che

$$g'(s) = T(t-s)f(s).$$

Per ipotesi f è continua e quindi $g \in C^1([0, T]; X)$.

Integrando tra 0 e T la derivata di g si ha per il lemma 1.10

$$T(0)x(t) - T(t)x(0) = x(t) - T(t)x = \int_0^T T(t-s)f(s)ds.$$

□

Osservazione 1.12. Osserviamo che, anche se la funzione $f \in C([0, T]; X)$, può accadere che la funzione $x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$ non sia derivabile e dunque che non risolva il sistema. Ad esempio, se consideriamo $y \notin D(A)$ e $f(t) = T(t)y$, la soluzione mild del sistema (1.3)

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)T(s)y ds = T(t)x + tT(t)y$$

non è derivabile e la sua immagine non è contenuta in $D(A)$.

Nei problemi di controllo ottimo che tratteremo nei capitoli successivi considereremo la funzione espressa da (1.4) come una soluzione generalizzata del sistema non omogeneo, non ponendoci il problema se questa risolva effettivamente il sistema. Il vincolo su cui ricercheremo l'ottimo sarà dunque espresso da tale funzione e non propriamente dal problema differenziale ad essa relativo.

In ogni caso, è interessante sapere quando l'espressione mild (1.4) e il problema (1.3) rappresentano lo stesso vincolo, cioè quando la soluzione mild esiste e coincide con la soluzione classica.

Proposizione 1.13. *Sia $f \in L^1(0, T; X) \cap C((0, T]; X)$ e*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Se $v(t) \in C^1([0, T]; X)$ il problema (1.3) ammette una soluzione $x(t)$ su $[0, T]$ per ogni $x \in D(A)$.

Dimostrazione. Fissato $t \in (0, T)$ consideriamo per $0 < h < T - t$ la seguente identità

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds. \quad (1.5)$$

Dalla continuità di f e la differenziabilità di v si ha $v(t) \in D(A)$ e

$$Av(t) = v'(t) - f(t), \quad \forall t \in (0, T].$$

Poiché $v(0) = 0$, la funzione $x(t) = T(t)x + v(t)$ risolve il problema (1.3). \square

Proposizione 1.14. *Se $f \in C^1([0, T]; X)$ allora per ogni $x \in D(A)$ il problema (1.3) ammette soluzione. Per la proposizione 1.11 tale soluzione è di tipo mild.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.13 basta mostrare che $v(t)$ è differenziabile con continuità.

$$v'(t) = Av(t) + f(t),$$

quindi basterà dimostrare che la funzione $t \mapsto Av(t)$ è continua.

Sia $0 < h < T - t$ e $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|$, allora si ha

$$\|Av(t+h) - Av(t)\| \leq M \|f\|_\infty e^{\omega t} \left[(e^{\omega h} - 1) \int_0^t e^{-\omega s} ds + e^{\omega h} \int_t^{t+h} e^{-\omega s} ds \right].$$

Passando al limite per h che tende a 0 si ha la tesi. \square

Anche nel caso non vi siano condizioni di sufficiente regolarità sulla funzione f , la soluzione mild costituirà l'approssimazione uniforme delle soluzioni classiche del problema (1.3).

Teorema 1.15. *Se $f \in L^1(0, T; X)$, la soluzione mild x è limite uniforme di soluzioni classiche di problemi approssimanti (1.3).*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $D(A)$ convergente a x . Il sottospazio $C^1(0, T; X)$ di $L^1(0, T; X)$ è denso, quindi esiste una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continuamente differenziabili convergente a f in $L^1(0, T; X)$.

Per la proposizione 1.14 il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f_n(t), & t \in (0, T] \\ x(0) = x_n \end{cases} \quad (1.6)$$

ha una soluzione classica

$$x^n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s) ds.$$

Sia $x(t)$ la soluzione mild di (1.3), allora

$$\|x^n(t) - x(t)\| \leq M e^{\omega T} (\|x_n - x\| + \|f_n - f\|_{L^1(0, T; X)}). \quad (1.7)$$

Il secondo membro di (1.7) tende a zero, quando n tende a infinito, uniformemente in $[0, T]$. \square

1.3 Sistemi non omogenei perturbati

Consideriamo ora un problema non omogeneo dove l'operatore A viene perturbato da un operatore $F: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H)$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + F(t)x(t) + g(t) \\ x(0) = x \in D(A). \end{cases} \quad (1.8)$$

Chiamiamo soluzione mild di questo problema una funzione x tale che

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)[F(s)x(s) + g(s)]ds. \quad (1.9)$$

Osserviamo che stavolta la soluzione mild è in forma implicita. Per calcolarla dovremo usare argomenti di punto fisso.

Definizione 1.16. Un'applicazione $F: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ si dice fortemente continua se per ogni $x \in X$ la funzione $t \rightarrow F(t)x$ risulta continua.

Mostriamo un risultato di esistenza e unicità di soluzione mild per il problema (1.8); tale problema è legato ad un tipo di equazione fondamentale nella teoria del controllo che introdurremo nei capitoli successivi.

Lemma 1.17. *Supponiamo che A generi un semigrupp fortemente continuo $T(t)$ e che la funzione $F: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ sia fortemente continua. Allora se g appartiene a $L^p(0, T; X)$, per $p \geq 1$, esiste una e una sola soluzione mild $x(t)$ del problema (1.8).*

Dimostrazione. Per semplicità ci limitiamo a dimostrare solo il caso $p = 1$. Osserviamo che esistono $M > 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$; inoltre

$$\forall x \in H \quad \sup_{t \in [0, T]} \|F(t)x\| < \infty,$$

essendo F fortemente continua. Per il teorema di Banach-Steinhaus esiste quindi una costante $N > 0$ tale che $\|F(t)\| \leq N$ per ogni $t \in [0, T]$.

Cerchiamo una soluzione all'equazione integrale

$$x(t) = S[x(t)] = T(t)x + \int_0^t T(t-s)[F(s)x(s) + g(s)]ds. \quad (1.10)$$

Risolviamo questa equazione in due passi.

Passo 1: mostriamo che l'applicazione S mappa $C([0, T]; X)$ in sé.

Sarà sufficiente dimostrare che la funzione

$$s \mapsto F(s)x(s)$$

è continua. Siano dunque $s_1, s_2 \in [0, T]$, allora

$$\begin{aligned} \|F(s_1)x(s_1) - F(s_2)x(s_2)\| &\leq \|F(s_1)\| \|x(s_1) - x(s_2)\| + \\ &+ \|(F(s_1) - F(s_2))(x(s_2))\| \leq N \|x(s_1) - x(s_2)\| + \|(F(s_1) - F(s_2))(x(s_2))\|. \end{aligned}$$

Dall'ipotesi di forte continuità di $F(t)$ e da quella di $x(t)$, si ha la tesi.

Passo 2: se $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in C([0, T]; X)$ vale

$$\|S^n(x) - S^n(y)\|_\infty \leq \frac{1}{n!} (MN e^{\omega^+ T})^n \|x - y\|_\infty$$

dove $\omega^+ = \max\{0, \omega\}$. Se per qualche $n \in \mathbb{N}$ S^n è una contrazione, dalla completezza di $(C([0, T]; X), \|\cdot\|_\infty)$ segue che S ha un unico punto fisso; infatti, se \bar{x} è l'unico punto fisso di S^n si ha

$$S^n(S\bar{x}) = S(S^n\bar{x}) = S\bar{x}$$

e per l'unicità $S\bar{x} = \bar{x}$.

Perché S^n sia una contrazione basta scegliere n abbastanza grande affinché

$$\frac{1}{n!} (MK e^{\omega^+ T})^n < 1$$

Il punto fisso di S è la soluzione dell'equazione integrale (1.10).

□

Capitolo 2

Problema di controllo interno

Studieremo il problema di controllo ottimo nel caso di controllo lineare quadratico, sfruttando quello che storicamente è stato il primo approccio a questo tipo di problemi, cioè il metodo variazionale. Tale metodo si basa su alcuni teoremi e principi fondamentali dovuti a Bellman e Pontrjagin.

2.1 Teoria variazionale

Chiameremo *sistema di stato* il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x \end{cases} \quad (2.1)$$

per cui valgono le seguenti ipotesi

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} A \text{ genera un semigruppoo fortemente continuo } T(t) \\ \text{definito su uno spazio di Hilbert reale } (H, \|\cdot\|), \\ B \in \mathcal{L}(U, H), \text{ dove } U \text{ è uno spazio di Hilbert reale,} \\ x \in D(A). \end{cases}$$

Chiamiamo lo spazio U *spazio dei controlli* e consideriamo $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ per ogni $t \in [0, T]$.

Indichiamo con $A_n = nR(n; A) = n^2R(n; A) - nI$ gli approssimanti di Yosida di A .

Chiameremo problema approssimante di (2.1) il seguente sistema

$$\begin{cases} x(t) = A_n x(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_n \in D(A) \end{cases} \quad (2.2)$$

Quando parleremo di soluzione del problema (2.1) ci riferiremo sempre alla soluzione mild, cioè

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds. \quad (2.3)$$

Osserviamo che $Bu(t) \in L^2(0, T; H)$

$$\int_0^T \|Bu(s)\|^2 ds \leq \|B\|_{\mathcal{L}(U, H)}^2 \int_0^T \|u(s)\|_U^2 ds \leq \|B\|_{\mathcal{L}(U, H)}^2 \|u\|_{L^2(0, T; U)}^2 < \infty$$

e poiché $[0, T]$ ha misura finita, ciò implica che $f = Bu \in L^1(0, T; H)$. Ha senso quindi, anche in questo caso, parlare di soluzione mild.

Definizione 2.1. Sia H uno spazio di Hilbert reale. Un operatore $L: D(L) \subset H \rightarrow H$ si dice simmetrico se

$$(Lx, y) = (x, Ly) \quad \forall x, y \in D(L).$$

Definizione 2.2. Un operatore $L \in \mathcal{L}(H)$ si dice coercivo se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$(Lx, x) \geq c\|x\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Consideriamo il funzionale *costo*:

$$J(u) = \int_0^T \{ \|C(x(s))\|^2 + \|u(s)\|_U^2 \} ds + (P_0x(T), x(T)) \quad (2.4)$$

per cui valgono le seguenti ipotesi

$$(\overline{\mathcal{H}}) : \begin{cases} C \in \mathcal{L}(H), \\ P_0 \in \mathcal{L}(H) \text{ è un operatore simmetrico e coercivo.} \end{cases}$$

Il problema di controllo ottimo (\mathcal{P}) consiste nel calcolare

$$\inf_{u \in L^2(0, T; U)} J(u),$$

soggetto al vincolo espresso dall'equazione (2.3).

Definizione 2.3. Diciamo che la coppia (x^*, u^*) è **ottima** se $u^* \in L^2(0, T; U)$ minimizza il funzionale $J(u)$ e x^* è soluzione mild del problema (2.1) con $u = u^*$.

Sotto le ipotesi (\mathcal{H}) e $(\overline{\mathcal{H}})$ vediamo che il problema di controllo ha una e una sola coppia ottima.

Teorema 2.4. Supponiamo che siano verificate le ipotesi (\mathcal{H}) e $(\overline{\mathcal{H}})$. Allora esiste una e una sola coppia ottima (x^*, u^*) per il problema (\mathcal{P}).

Dimostrazione. Sia

$$V = \{ (x, u) \in L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; U) : \quad (2.5) \\ x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds, \quad t \in [0, T], x \in H \}.$$

É facile verificare che V è un sottoinsieme convesso e chiuso dello spazio di Banach $L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; U)$.

Supponiamo che

$$\inf_V J < \infty;$$

allora fissato $\epsilon > 0$ esiste $(x_n, u_n)_{\mathbb{N}} \subset V$ ed $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$J(x_n, u_n) \rightarrow \inf_V J.$$

e

$$J(x_n, u_n) < \inf_V J + \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Da ciò segue che $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(0, T; U)$; allora esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) di $(u_n)_{n \geq n_0}$ e $\bar{u} \in L^2(0, T; U)$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$.

É chiaro dunque che la sottosuccessione (x_{n_k}) di $(x_n)_{n \geq n_0}$ converge debolmente in $L^2(0, T; H)$ a

$$\bar{x}(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)B\bar{u}(s) ds.$$

Quindi $(x_{n_k}, u_{n_k}) \rightharpoonup (\bar{x}, \bar{u})$ in $L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; U)$.

Osserviamo che, poiché $Bu_{n_k} \in L^1(0, T; H)$,

$$x_{n_k}(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Bu_{n_k}(s) ds$$

è continua, dunque ha senso considerare $x_{n_k}(T)$.

Analogamente $\bar{x} \in C([0, T]; H)$. Dimostriamo che $x_{n_k}(T) \rightharpoonup \bar{x}(T)$ in H .

Sia $h \in H$, allora

$$\begin{aligned} (x_{n_k}(T) - \bar{x}(T), h) &= \int_0^T (T(T-s)B(u_{n_k} - \bar{u})(s), h) ds = \\ &= (u_{n_k} - \bar{u}, B^*T^*(T - \cdot)h)_{L^2(0, T; U)} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Essendo P_0 coercivo è facile vedere che la norma definita da $(P_0x, x) = \|\sqrt{P_0}x\|$ è equivalente a quella di H .

Abbiamo dimostrato che se $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ in $L^2(0, T; U)$ allora $x_{n_k} \rightharpoonup \bar{x}$ in $L^2(0, T; H)$ e $x_{n_k}(T) \rightharpoonup \bar{x}(T)$ in H . Per la semicontinuità debole delle norme di $L^2(0, T; U)$, $L^2(0, T; H)$ e H si ha che

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x_{n_k}, u_{n_k})$$

da cui si ha che $(\bar{x}, \bar{u}) = (x^*, u^*)$. □

Dimostrata l'esistenza e l'unicità della coppia ottima, mostriamo come le componenti di tale coppia siano legate da una relazione che risulta fondamentale nelle applicazioni della teoria del controllo.

Iniziamo da uno dei principali teoremi della teoria del controllo che fornisce condizioni necessarie per l'ottimalità di una coppia stato-controllo.

Teorema 2.5. (*Principio del massimo di Pontrjagin*)

Se (x^*, u^*) è una coppia ottimale, allora esiste una funzione $p^* \in C([0, T]; H)$, detto arco duale, che è soluzione mild del problema retrogrado

$$\begin{cases} p^{*\prime}(t) = -A^*p^*(t) - C^*Cx^*(t), & t \in [0, T) \\ p^*(T) = P_0x^*(T). \end{cases} \quad (2.6)$$

Inoltre,

$$u^*(t) = -B^*p^*(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Dimostrazione. $J(u)$ è Fréchet differenziabile in $L^2(0, T; U)$ e vale per ogni $v \in L^2(0, T; U)$

$$\begin{aligned} J'(u)v = & 2 \int_0^T [(C^*Cx(u, t), x_u(u, t)v(t)) + (u(t), v(t))] dt + \\ & + 2(P_0(x_u(u, t)v)(T), x(u, T)). \end{aligned}$$

Osserviamo che la derivata dell'applicazione da $L^2(0, T; X)$ in sé

$$u \mapsto x(u, t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds$$

è l'applicazione lineare

$$x_u : v \mapsto \varphi(t) = \int_0^t T(t-s)Bv(s) ds$$

perché la funzione $t \rightarrow T(t)x$ non dipende da u e l'applicazione

$$t \rightarrow \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds$$

è lineare. Dunque

$$\begin{aligned} J'(u)v = & 2 \int_0^T \left[\left(\int_0^t T(t-s)Bv(s) ds, C^*Cx(u, t) \right) + (u(t), v(t)) \right] dt + \\ & + 2 \left(\int_0^T T(T-s)Bv(s) ds, P_0x(u, T) \right); \end{aligned}$$

isolando la $v(t)$ e usando il teorema di Fubini si ottiene

$$J'(u)v = 2 \int_0^T (B^*T^*(T-t)P_0x(u, T) + \quad (2.8)$$

$$+ \int_t^T B^*T^*(s-t)C^*Cx(u, s) ds + u(t), v(t)) dt \quad (2.9)$$

dove T^* è il semigruppone duale di T . Poiché H è uno spazio di Hilbert anche T^* risulta un semigruppone C_0 e il suo generatore coincide con l'operatore aggiunto di A .

Il controllo ottimo è un punto stazionario del funzionale J , quindi

$$J(u^*)v = 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; H),$$

cioè, il primo membro del prodotto scalare in (2.8) appartiene al nucleo di tutti i funzionali lineari e continui su $L^2(0, T; H)$ e per il teorema di Hahn-Banach è identicamente nullo. Ponendo

$$p^*(t) = T^*(T-t)P_0x^*(T) + \int_t^T T^*(s-t)C^*Cx^*(s)ds$$

e osservando che p^* ha la forma della soluzione mild di (2.6), si ha la tesi. \square

2.2 Programmazione dinamica

Col termine programmazione dinamica intendiamo lo studio di problemi di controllo dove le condizioni iniziali, spaziale e temporale, costituiscono una variabile del sistema. Immergiamo dunque il nostro problema in una famiglia di problemi più generale.

Fissato $t \in [0, T]$, consideriamo

$$\begin{cases} x'(s) = Ax(s) + Bu(s), & t \leq s \leq T \\ x(t) = x \in H \end{cases} \quad (2.10)$$

sotto le ipotesi (\mathcal{H}) .

Definizione 2.6. La soluzione mild di (2.10) è

$$x(s) = T(s-t)x + \int_t^s T(z-t)Bu(z)dz, \quad s \in [t, T] \quad (2.11)$$

se risulta continua su $[t, T]$.

Definiamo inoltre

$$J(t, x, u) = \int_t^T \{ \|Cx(s)\|^2 + \|u(s)\|_U^2 \} ds + (P_0x(T), x(T)) \quad (2.12)$$

$$V(t, x) = \inf \{ J(t, x, u); u \in L^2(t, T; U); x \text{ soddisfa (2.10) in } [t, T] \}; \quad (2.13)$$

V è detta *funzione valore* e si considerano ancora le ipotesi $(\overline{\mathcal{H}})$.

Osservazione 2.7. Usiamo le seguenti notazioni per il controllo ottimo e la relativa soluzione del sistema (2.10) : $x_{t,x}^*$, $u_{t,x}^*$.

Osservazione 2.8. Nell'ambito della programmazione dinamica abbiamo bisogno del principio del massimo di Pontrjagin in forma più generale.

Se $(x_{t,x}^*, u_{t,x}^*)$ è una coppia ottimale per il problema (2.10), allora esiste una funzione $p_{t,x}^* \in C([0, T]; H)$, detto arco duale, che è soluzione mild del problema retrogrado

$$\begin{cases} p_{t,x}^{*'}(s) = -A^*p_{t,x}^*(s) - CC^*x_{t,x}^*(s), & s \in [t, T] \\ p_{t,x}^*(T) = P_0x_{t,x}^*(T). \end{cases} \quad (2.14)$$

Inoltre, si ha dal teorema 2.4

$$V(t, x) = \int_t^T \{ \|Cx_{t,x}^*(z)\|^2 + \|u_{t,x}^*(z)\|_U^2 \} dz + (P_0x_{t,x}^*(T), x_{t,x}^*(T)). \quad (2.15)$$

Mostriamo ora il teorema fondamentale della programmazione dinamica, dovuto a Bellman.

Teorema 2.9. (*Principio di ottimalità di Bellman*)

Siano $x \in H$, $0 \leq t \leq T$; allora vale

$$(u_{0,x}^*)|_{[t,T]} = u_{t,x_{0,x}^*}^*(t) \quad (2.16)$$

Dimostrazione. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x'(s) = Ax(s) + Bu(s), & 0 \leq t < s \leq T \\ x(t) = x_{0,x}^*(t) \in H \end{cases} \quad (2.17)$$

Vogliamo dimostrare che $(u_{t,x_{0,x}^*}^*(t), x^*) := (\hat{u}, \hat{x})$, dove x^* è la soluzione di (2.17) con

$$u = u_{t,x_{0,x}^*}^*(t) \in L^2(t, T; U),$$

che è ottimale per il problema di controllo in $[t, T]$.

Supponiamo per assurdo che

$$\int_t^T \{ \|C\hat{x}(s)\|^2 + \|\hat{u}(s)\|_U^2 \} ds + (P_0\hat{x}(T), \hat{x}(T)) < \quad (2.18)$$

$$< \int_t^T \{ \|Cx_{0,x}^*(s)\|^2 + \|u_{0,x}^*(s)\|_U^2 \} ds + (P_0x_{0,x}^*(T), x_{0,x}^*(T)) \quad (2.19)$$

Consideriamo ora due funzioni \bar{x}, \bar{u} tali che

$$\bar{x}(s) = \begin{cases} x_{0,x}^*(s) & s \in [0, t] \\ \hat{x}(s) & s \in [t, T] \end{cases}$$

e

$$\bar{u}(s) = \begin{cases} u_{0,x}^*(s) & s \in [0, t] \\ \hat{u}(s) & s \in [t, T]. \end{cases}$$

Aggiungendo ad ambo i membri della disuguaglianza (2.18) la quantità

$$\int_0^t \{ \|Cx_{0,x}^*(s)\|^2 + \|u_{0,x}^*(s)\|_U^2 \} ds$$

otteniamo

$$\int_0^T \{ \|C\bar{x}(s)\|^2 + \|\bar{u}(s)\|_U^2 \} ds < J(0, x, u_{0,x}^*),$$

che è assurdo per l'ottimalità di $u_{0,x}^*$ in $[0, T]$. \square

É immediato il seguente corollario

Corollario 2.10. *Fissato $s \in [t, T]$ si ha*

$$V(s, x_{t,x}^*(s)) = \int_s^T \{ |Cx_{t,x}^*(z)|^2 + |u_{t,x}^*(z)|^2 \} dz + (P_0x_{t,x}^*(T), x_{t,x}^*(T)).$$

Il principio di ottimalità di Bellman ci dice che se ci restringiamo a risolvere il problema di controllo in un sottointervallo temporale di $[0, T]$, il controllo ottimo è la restrizione del controllo ottimo relativo al problema più ampio.

In sostanza, lavorare su un intervallo di tempo meno ampio non ci permette di migliorare il risultato che otterremmo da uno studio globale del problema. Dal principio di ottimalità si deduce inoltre che la funzione valore non dipende dal tempo finale T .

Vediamo altri importanti corollari di questo risultato.

Corollario 2.11. *Fissato $s \in [t, T]$*

$$V(t, x) = \int_t^s \{|Cx_{t,x}^*(z)|^2 + |u_{t,x}^*(z)|^2\} dz + V(s, x_{t,x}^*(s))$$

Dimostrazione. Per il principio di ottimalità

$$V(s, x_{t,x}^*(s)) = \int_s^T \{|Cx_{t,x}^*(z)|^2 + |u_{t,x}^*(z)|^2\} dz + (P_0 x_{t,x}^*(T), x_{t,x}^*(T))$$

e scomponendo il primo addendo di (2.15) in due integrali, uno in $[t, s]$ e l'altro in $[s, T]$, si ha la tesi. \square

Corollario 2.12. *Se $0 \leq t \leq s$ risulta:*

$$V(t, x) = \inf \left\{ \int_t^s \{|Cx(z)|^2 + |u(z)|^2\} dz + V(s, x(s)), \right. \\ \left. u \in L^2(t, T; U); x(t) \text{ soddisfa (2.10)} \right\}. \quad (2.20)$$

Dimostrazione. Indichiamo con L il secondo membro di (2.20), dal corollario 2.11 si ha $V(t, x) \geq L$.

Sia $u \in L^2(t, T; U)$ e sia x la soluzione di (2.10), si ha, fissato $s \in [t, T]$,

$$V(t, x) \leq \int_t^s \{|Cx(z)|^2 + |u(z)|^2\} dz + \quad (2.21)$$

$$+ \int_s^T \{|Cx(z)|^2 + |u(z)|^2\} dz + (P_0 x(T), x(T)). \quad (2.22)$$

Scegliamo $\bar{u} \in L^2(t, T; U)$ definito da

$$\bar{u}(\sigma) = \begin{cases} u(\sigma) & \sigma \in [t, s] \\ v(\sigma) & \sigma \in [s, T] \end{cases}$$

dove v è un arbitrario elemento di $L^2(t, T; U)$ e u è un fissato elemento di $L^2(t, s; U)$. Consideriamo la disuguaglianza (2.21) con $u = \bar{u}$; considerando a secondo membro di questa disuguaglianza l'estremo inferiore su $L^2(s, T; U)$ otteniamo per il corollario 2.11

$$V(t, x) \leq \int_t^s \{|Cx(z)|^2 + |u(z)|^2\} dz + V(s, x(s))$$

per ogni $u \in L^2(t, T; H)$, quindi $V(t, x) \leq L$. \square

Dimostriamo ora che la funzione valore può essere espressa come una forma quadratica su H .

Lemma 2.13. *Il controllo ottimale $u_{t,x}^*$ e lo stato ottimale $x_{t,x}^*$ sono applicazioni lineari e continue nella variabile x come applicazioni, rispettivamente, da H in $L^2(t, T; U)$ e in $C([t, T]; H)$.*

Inoltre esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \in H, t \in [0, T]$ e $s \in [t, T]$, risulta

$$\|u_{t,x}^*\|_U + \|x_{t,x}^*\| + \|p_{t,x}^*\| \leq L\|x\|, \quad V(t, x) \leq L\|x\|^2. \quad (2.23)$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente espressione di $J(t, x, u)$

$$J(t, x, u) = g_{t,x} + 2(f_x, u)_{L^2(t, T; U)} + (\Gamma_t u, u)_{L^2(t, T; U)}$$

dove

$$\begin{aligned} g_{t,x} &= \int_t^T (C^* C T(s)x, T(s)x) ds + (P_0 T(T)x, T(T)x), \\ f_x(t) &= B^* T^*(T-t) P_0 T(T)x + B^* \int_t^T C^* C T^*(s-t)x ds, \\ \Gamma_t &= I + K_t^* P_0 K_t + L_t^* S L_t \end{aligned}$$

e gli operatori $L_t \in \mathcal{L}(L^2(t, T; U))$ e $K_t \in \mathcal{L}(L^2(t, T; U), H)$ sono definiti da

$$\begin{aligned} L_t[h](s) &= \int_t^s T(s-r) B h(r) dr, \quad \forall h \in L^2(t, T; U), \\ K_t(h) &= \int_t^T T(T-r) B h(r) dr, \quad \forall h \in L^2(t, T; U). \end{aligned}$$

Osserviamo che $K_t^* = K_t$ e che la funzione $u \mapsto 2(f_x, u)_{L^2(t, T; U)}$ è lineare (quindi coincide con la sua derivata di Frèchet). Calcoliamo la derivata di $u \mapsto (\Gamma_t u, u)_{L^2(t, T; U)}$.

$$(\Gamma_t(u+h), u+h)_{L^2(t, T; U)} - (\Gamma_t u, u)_{L^2(t, T; U)} = 2(\Gamma_t u, h)_{L^2(t, T; U)} + (\Gamma_t h, h)_{L^2(t, T; U)}$$

e dal fatto che

$$\begin{cases} |(\Gamma_t u, h)_{L^2(t, T; U)}| \leq \|\Gamma_t\|_{\mathcal{L}(L^2(t, T; U))} \|u\|_U \|h\| = o(1) & \text{per } h \rightarrow 0 \\ |(\Gamma_t h, h)_{L^2(t, T; U)}| \leq \|\Gamma_t\|_{\mathcal{L}(L^2(t, T; U))} \|h\|^2 = o(h) & \text{per } h \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

si ha che la derivata di $u \mapsto (\Gamma_t u, u)_{L^2(t, T; U)}$ è l'applicazione lineare

$$h \mapsto 2(\Gamma_t u, h)_{L^2(t, T; U)}.$$

Poiché $u_{t,x}^*$ è un punto stazionario del funzionale J

$$0 = \frac{d}{du} J(u)|_{u=u_{t,x}^*} h = 2(f_x, h)_{L^2(t, T; U)} + (\Gamma_t u_{t,x}^*, h)_{L^2(t, T; U)}$$

da cui si ha che

$$u_{t,x}^* = -\Gamma_t^{-1} f_x$$

e f_x è lineare nella x . □

Proposizione 2.14. $V(t, \cdot)$ è una forma quadratica su H , cioè per ogni $t \in [0, T]$ esiste $Q(t) \in \mathcal{L}(H)$, positivo, tale che:

$$V(t, x) = (Q(t)x, x), \quad \forall x \in H, \forall t \in [0, T].$$

Inoltre $\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Fissiamo $t \in [0, T]$ e consideriamo $V(t, x)$ nella forma (2.15). Omettiamo la variabile t per comodità. Osserviamo che $V(x) = A(x, x)$, dove $A(x, y)$ è la forma bilineare su $H \times H$ definita così

$$A(x, y) = \int_t^T \{ \|Cx_{t,y}^*(z)\|^2 + (u_{t,x}^*(z), u_{t,y}^*(z))_U \} dz + (P_0 x_{t,x}^*(T), x_{t,y}^*(T))$$

Per il lemma 2.13 $|A(x, y)| \leq K \|x\| \|y\|$ per una costante K opportuna. Allora l'applicazione $y \rightarrow A(x, y)$ è lineare e continua su H , quindi per il teorema di Riesz esiste $r_x \in H$ tale che $A(x, y) = (r_x, y)$ per ogni $x \in H$.

Dimostriamo che l'applicazione $x \rightarrow r_x$ è lineare e continua. La linearità è semplice conseguenza della seguente relazione e della bilinearità di A

$$(r_{ax+bx'}, y) = A(ax + bx', y)$$

La continuità è data dalla stima seguente

$$\|r_x\|^2 = |(r_x, r_x)| = |A(r_x, x)| \leq K \|r_x\| \|x\|,$$

quindi possiamo scrivere $r_x = Qx$, con $Q \in \mathcal{L}(H)$.

Per quanto riguarda l'uniforme limitatezza degli operatori $Q(t)$, si ha dall'identità di polarizzazione, fissato $a > 0$ e $x \in H$,

$$\begin{aligned} (Q(t)x, Q(t)x) &= \left(Q(t) \frac{x}{a}, Q(t)ax \right) = \frac{1}{4} \left[V \left(t, \frac{x}{a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + aQ(t)x \right) - V \left(t, \frac{x}{a} - aQ(t)x \right) \right] \leq \frac{L}{4} \left[2 \frac{\|x\|^2}{a^2} + 2a^2 \|Q(t)x\|^2 \right] = \\ &= \frac{L}{2} \left[\frac{\|x\|^2}{a^2} + a^2 \|Q(t)x\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Scelto $a = \frac{1}{L}$, ricaviamo

$$\frac{1}{2} \|Q(t)x\|^2 \leq \frac{L^2}{2} \|x\|^2,$$

da cui $\|Q(t)x\| \leq L \|x\|$. □

2.3 Sintesi del controllo ottimale

Sfruttando i principi di Bellman e di Pontrjagin si ottiene una relazione funzionale tra controllo ottimo e stato ottimo, detta **formula di feedback**.

Teorema 2.15. Se Q è l'operatore definito nella proposizione 2.14, risulta

$$u_{0,x}^*(s) = -B^*Q(s)x_{0,x}^* \quad (2.25)$$

e lo stato ottimo x^* è soluzione del seguente problema di Cauchy, detto **closed loop equation**

$$\begin{cases} x'(s) = Ax(s) - BB^*Q(s)x(s), & s \in [0, T] \\ x(0) = x. \end{cases} \quad (2.26)$$

Dimostrazione. Dal corollario 2.11 segue che

$$V(t, x) = \int_t^s \{ \|Cx_{t,x}^*(z)\|^2 + \|u^*(z)\|_U^2 \} dz + (Q(s)x_{t,x}^*(s), x_{t,x}^*(s)). \quad (2.27)$$

Dal principio del massimo di Pontrjagin si ha che esistono tre funzioni u, x, p tali che

$$\begin{cases} x'(r) = Ax(r) + Bu(r), & x(0) = x, & r \in (0, s] \\ p'(r) = -A^*p(r) - C^*Cx(r), & p(s) = Q(s)x(s), & r \in [0, s) \\ u(r) = -B^*p(r), & r \in [0, s] \end{cases} \quad (2.28)$$

Ponendo in tale sistema $r = s$ si ottiene:

$$u(s) = -B^*p(s) = -B^*Q(s)x(s).$$

Essendo $u = u_{0,x}^*, x = x_{0,x}^*, p = p_{0,x}^*$, otteniamo la formula (2.25).

Considerando tale formula è immediato constatare che $x^* = x_{0,x}^*$ risolve, in senso generalizzato, la closed loop equation. \square

La formula di feedback ci dice che il controllo ottimo cambia contemporaneamente alle trasformazioni dello stato ottimo.

Dalla closed loop equation si deduce che lo stato ottimo può essere determinato ad ogni istante senza avere informazioni sul suo passato: la sua derivata all'istante s è caratterizzata da fattori che dipendono solo da tale istante. Come unica informazione abbiamo bisogno della condizione iniziale.

Di conseguenza per determinare il controllo ottimo ad un dato istante, non è necessario avere informazioni passate o future.

Tuttavia non si può dire lo stesso riguardo al calcolo della funzione $V(t, x)$, che coinvolge valori futuri del controllo. Vedremo nei capitoli successivi che c'è un metodo diretto per calcolare tale valore attraverso la risoluzione di un'equazione differenziale. Tale equazione prende il nome di equazione di Riccati.

2.4 Equazione di Riccati

Costruiamo un'equazione differenziale che ha come soluzione la funzione valore $V(t, x)$. Vedremo nei capitoli successivi come sfruttare la soluzione di questa equazione per arrivare alle stesse conclusioni sull'esistenza e l'unicità della coppia ottima del problema di controllo.

Vediamo un lemma che ci dice che la funzione valore è lipschitziana rispetto a t .

Lemma 2.16. *Siano $t, s \in [0, T]$, $x \in D(A)$; esiste $G > 0$ tale che:*

$$|V(t, x) - V(s, x)| \leq G(\|x\| + \|Ax\|)\|x\||t - s|$$

Dimostrazione. Fissati $x, z \in H$ e $t \in [0, T]$, per i lemma 2.13 e 2.14, si ha

$$\begin{aligned} |V(t, x) - V(t, z)| &= |(Q(t)x, x) - (Q(t)z, z)| \leq |(Q(t)(x - z), x)| + \\ &\quad + |(Q(t)z, x - z)| \leq L(\|x\| + \|z\|)\|x - z\|. \end{aligned}$$

Sia $s \in [t, T]$, allora dal corollario 2.11

$$V(t, x) - V(s, x) = \int_t^s \{ \|Cx_{t,x}^*(z)\|^2 + \|u_{t,x}^*(z)\|_U^2 \} dz + V(s, x_{t,x}^*(s)) - V(s, x);$$

per la stima fatta sopra e per il fatto che $\|x_{t,x}^*(s)\| + \|u_{t,x}^*(s)\|_U \leq L\|x\|$, otteniamo

$$|V(t, x) - V(s, x)| \leq (1 + \|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2)L^2\|x\|^2|s - t| + L(1 + L)\|x\|\|x - x_{t,x}^*(s)\|. \quad (2.29)$$

Osservando che

$$x_{t,x}^*(s) = T(s - t)x + \int_t^s T(s - z)Bu_{t,x}^*(z)dz$$

e, poiché $x \in D(A)$,

$$T(s - t)x - x = \int_0^{s-t} T(r)Ax dr,$$

si conclude che

$$\begin{aligned} \|x_{t,x}^*(s) - x\| &= \left\| \int_0^{s-t} T(r)Ax dr + \int_t^s T(s - h)Bu_{t,x}^*(h) dh \right\| \leq \\ &\leq Me^{\omega t}|t - s|(\|Ax\| + \|B\|_{\mathcal{L}(U,H)}L\|x\|). \end{aligned}$$

Combinando l'ultima disuguaglianza con la stima (2.29) si ha la tesi. \square

Teorema 2.17. *(Equazione di Riccati)*

Se $x \in D(A)$, allora $V(t, x) = (Q(t)x, x)$ è derivabile quasi ovunque in $[0, T]$ e risulta:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Q(t)x, x) + (Q(t)x, Ax) + (Q(t)Ax, x) - \|B^*Q(t)x\|^2 + (C^*Cx, x) = 0 \\ Q(T) = P_0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(A)$; $V(t, x)$ è derivabile quasi ovunque in $[0, T]$ per il lemma 2.16. Fissiamo un t in cui $V(\cdot, x)$ sia derivabile e sia $r \in [t, T]$.

Dal principio di ottimalità di Bellman segue che:

$$\begin{aligned} V(r, x_{t,x}^*(r)) &= (Q(r)x_{t,x}^*(r), x_{t,x}^*(r)) = \\ &= \int_r^T \{ \|C(x_{t,x}^*(s))\|^2 + \|u_{t,x}^*(s)\|_U^2 \} ds + (P_0x_{t,x}^*(T), x_{t,x}^*(T)). \end{aligned}$$

Derivando tale espressione e utilizzando la formula di feedback (2.25) otteniamo

$$\frac{d}{dr}(Q(r)x_{t,x}^*(r), x_{t,x}^*(r))|_{r=t} = -\|C(x_{t,x}^*(t))\|^2 - \|u_{t,x}^*(t)\|_U^2 = -\|Cx\|^2 - \|u_{t,x}^*(t)\|_U^2 \quad (2.31)$$

Calcoliamo la derivata a primo membro:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [(Q(t+h)x_{t,x}^*(t+h), x_{t,x}^*(t+h)) - (Q(t)x, x)] = \\ & = \left[(Q(t+h) \frac{x_{t,x}^*(t+h) - x}{h}, x_{t,x}^*(t+h)) \right] + \\ & + \left[Q(t+h)x, \frac{x_{t,x}^*(t+h) - x}{h} \right] + \frac{1}{h} (Q(t+h)x - Q(t)x, x), \end{aligned}$$

passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} & (Q(t)(Ax + Bu_{t,x}^*(t)), x) + (Q(t)x, Ax + Bu_{t,x}^*(t)) + \frac{d}{dt}(Q(t)x, x) = \\ & = (Q(t)Ax, x) + (Q(t)x, Ax) + (Q(t)Bu_{t,x}^*(t), x) + (Q(t)x, Bu_{t,x}^*(t)) + \\ & + \frac{d}{dt}(Q(t)x, x) = (Q(t)Ax, x) + (Q(t)x, Ax) - 2\|u_{t,x}^*(t)\|_U^2 + \frac{d}{dt}(Q(t)x, x) \end{aligned}$$

da cui, sostituendo in (2.31) e ricordando la formula (2.25), si ha la tesi. \square

L'equazione (2.30) si chiama equazione di Riccati e formalmente si può riscrivere nella seguente forma

$$\begin{cases} Q' + A^*Q + QA - QBB^*Q + C^*C = 0, & t \in [0, T) \\ Q(T) = P_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Questo problema è retrogrado, cioè ponendo $P(t) = Q(T - t)$ può essere riformulato nel seguente modo

$$\begin{cases} P' + A^*P + PA - PBB^*P + C^*C = 0, & t \in (0, T] \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Nel seguito ci riferiremo a quest'ultima formulazione quando parleremo di equazione di Riccati.

2.5 Il caso analitico

2.5.1 Risoluzione con l'equazione di Riccati

Risolviamo ora il problema di controllo nel caso in cui l'operatore A sia il generatore di un semigruppoo $T(t)$ analitico.

Utilizziamo l'approccio moderno che consiste nei seguenti passi:

1. trovare una soluzione P dell'equazione di Riccati;
2. usare la soluzione P in combinazione con l'identità fondamentale e la closed loop equation per ottenere la formula di feedback.

Indichiamo con Σ_δ , $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, il sottoinsieme complesso

$$\Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \delta\}.$$

Definizione 2.18. Una famiglia di operatori $(T(z))_{\Sigma_\delta \cup \{0\}}$ continui e lineari da uno spazio di Banach X in sé è un semigruppoo analitico (di angolo δ) se

1. soddisfa le leggi di gruppo;
2. l'applicazione $z \rightarrow T(z)$ è analitica su Σ_δ ;
3. $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ per ogni $x \in X$ nel settore $\Sigma_{\delta'}$, per ogni $0 < \delta' < \delta$.

Ricordiamo l'equazione di Riccati

$$\begin{cases} P' = A^*P + PA - PBB^*P + C^*C \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.34)$$

e introduciamo alcuni spazi funzionali che useremo frequentemente nel seguito.

$$\Sigma(H) = \{T \in \mathcal{L}(H); T \text{ è simmetrico}\}$$

$$\Sigma^+(H) = \{T \in \Sigma(H); (Tx, x) \geq 0 \forall x \in H\}$$

Osserviamo che $\Sigma(H)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(H)$.

Indichiamo con $C([0, T]; \Sigma(H))$ l'insieme delle funzioni continue da $[0, T]$ a $\Sigma(H)$ e con $C_s([0, T]; \Sigma(H))$ l'insieme

$$\{F \in C([0, T]; \Sigma(H)) : F \text{ è fortemente continua}\}$$

Tale spazio munito della norma $\|F\|_s = \sup\{\|F(t)\|_{\mathcal{L}(H)} : t \in [0, T]\}$ risulta di Banach.

Vediamo ora una generalizzazione del principio delle contrazioni per lo spazio $C_s([0, T]; \Sigma(H))$.

Teorema 2.19. Sia $T > 0$ e $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di applicazioni da $C_s([0, T]; \Sigma(H))$ in sé tale che

$$\|\gamma_n(P) - \gamma_n(Q)\|_s \leq \alpha \|P - Q\|_s, \quad \forall P, Q \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$$

dove $\alpha \in (0, 1)$.

Supponiamo inoltre che esista $\gamma \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ tale che, per ogni $x \in H$,

$$\gamma_n(P)x \rightarrow \gamma(P)x \quad \text{in } C([0, T]; H), \quad \forall P \in C_s([0, T]; \Sigma(H)) \quad (2.35)$$

Allora esistono unici $P_n, P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ tali che

$$\gamma_n(P_n) = P_n, \quad \gamma(P) = P.$$

e, per ogni $x \in H$, vale

$$P_n(\cdot)x \rightarrow P(\cdot)x, \quad \text{in } C([0, T]; H).$$

Dimostrazione. Osserviamo che da (2.35) si ha che γ è una α -contrazione come le γ_n .

Poniamo

$$\begin{cases} P^{(0)} = 0, & P_n^{(0)} = 0 \\ P^{(m+1)} = \gamma(P^{(m)}), & P_n^{(m+1)} = \gamma_n(P_n^{(m)}) \end{cases}$$

Dal principio delle contrazioni segue che esistono $P, P_n \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ tali che

$$P^{(m)} \rightarrow P, \quad P_n^{(m)} \rightarrow P_n \quad \text{in } C_s([0, T]; \Sigma(H)).$$

Valgono le seguenti stime

$$\begin{cases} \|P - P^{(m)}\|_s \leq \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k \|\gamma(0)\|_{\mathcal{L}(H)} \\ \|P_n - P_n^{(m)}\|_s \leq \sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k \|\gamma_n(0)\|_{\mathcal{L}(H)}. \end{cases}$$

Fissiamo $t \in [0, T]$ e $x \in H$, allora

$$\|P(t)x - P_n(t)x\| \leq \|P(t)x - P^{(m)}(t)x\| + \|P^{(m)}(t)x - P_n^{(m)}(t)x\| + \|P_n^{(m)}(t)x - P_n(t)x\|$$

Poiché $0 < \alpha < 1$, fissato $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ esiste ν tale che

$$\sum_{k=m}^{\infty} \alpha^k \{\|\gamma(0)\|_s + \|\gamma_n(0)\|_s\} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall m \geq \nu.$$

Da ciò segue che

$$\|P(t)x - P_n(t)x\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \|P^{(\nu)}(t)x - P_n^{(\nu)}(t)x\|$$

e per l'ipotesi (2.35)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(\nu)}(\cdot)x = P^{(\nu)}(\cdot)x \quad \text{in } C([0, T]; H),$$

da cui la tesi. □

Utilizzeremo le soluzioni del seguente problema approssimante

$$\begin{cases} P_n' = A_n^* P_n + P_n A_n - P_n B B^* P_n + C^* C \\ P_n(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.36)$$

dove gli operatori A_n sono gli approssimanti di Yosida di A .

2.5.2 Il semigruppò e^{tA}

Definiamo un tipo di semigruppò su $\Sigma(H)$ che comparirà nell'espressione delle soluzioni mild dell'equazione di Riccati. Iniziamo dalla definizione del suo generatore.

Fissato $S \in \Sigma(H)$, consideriamo l'applicazione $\phi_S: D(A) \times D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\phi_S(x, y) = (Sx, Ay) + (Ax, Sy).$$

Definiamo $D(A) = \{S \in \Sigma(H) : \phi_S \text{ è continua su } H \times H\}$.

Lemma 2.20. *Se $S \in D(A)$ allora ϕ_S si estende univocamente a una forma bilineare continua su $H \times H$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'estensione continua di ϕ_S al prodotto $\overline{D(A)} \times \overline{D(A)}$.

Indichiamo con $p: H \rightarrow \overline{D(A)}$ la proiezione lineare e continua sul sottospazio chiuso $\overline{D(A)}$. La composizione $\phi_S \circ (p \otimes p): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ risulta continua e, per definizione di proiezione, ristretta a $\overline{D(A)} \times \overline{D(A)}$, coincide con ϕ_S .

L'unicità dell'estensione deriva dal fatto che $D(A) \times D(A)$ è denso in $H \times H$. \square

A questo punto, è possibile definire un operatore lineare, che indichiamo con $\mathcal{A}(S)$ tale che

$$(\mathcal{A}(S)x, y) = \phi_S(x, y), \quad x, y \in D(A), \quad S \in D(A)$$

Abbiamo così definito un operatore $\mathcal{A}: D(A) \subset \Sigma(H) \rightarrow \Sigma(H)$, il cui dominio, in generale, non è denso in $\Sigma(H)$. Tale operatore risulta in ogni caso chiuso.

Proposizione 2.21. *Sia $S \in D(A)$, allora per ogni $x \in D(A)$ si ha $Sx \in D(A^*)$ e vale*

$$\mathcal{A}(S)x = A^*Sx + SAx$$

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in D(A)$

$$(Sx, Ay) = \phi_S(x, y) - (Ax, Sy);$$

ne segue che, fissato $x \in D(A)$, la mappa da $D(A)$ in \mathbb{C} definita da $y \rightarrow (Sx, Ay)$ è continua su H ; ciò implica che $Sx \in D(A^*)$ e che per ogni $y \in H$

$$(\mathcal{A}(S)x, y) = \phi_S(x, y) = (A^*Sx, y) + (SAx, y)$$

\square

Definiamo il semigruppò e^{tA} nel modo seguente:

$$e^{tA}(S) = T^*(t)ST(t) \quad \forall S \in \Sigma(H).$$

Tale semigruppò non è fortemente continuo, in generale; vale però la seguente proprietà, di facile verifica,

$$e^{tA}Sx \rightarrow Sx \quad \text{per } t \rightarrow 0 \quad \forall x \in H, \quad \forall S \in \Sigma(H).$$

Analogamente definiamo il semigruppoo e^{tA_n} relativo all'approssimante di Yosida A_n .

Possiamo riscrivere l'equazione di Riccati nella maniera seguente

$$\begin{cases} P'(t) = \mathcal{A}(P(t)) - P(t)BB^*P(t) + C^*C \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Poiché $A_n \in \mathcal{L}(H)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il problema (2.36) è equivalente alla seguente equazione integrale

$$P_n(t)x = e^{tA_n^*}P_0e^{tA_n}x + \int_0^t e^{(t-s)A_n^*}[C^*C - P_n(s)BB^*P_n(s)]e^{(t-s)A_n}x ds, \quad x \in H \quad (2.38)$$

Cominciamo con un risultato di esistenza locale e di unicità per la soluzione mild del problema (2.34).

Definizione 2.22. Siano dati $T_0 > 0$, $r > 0$ e definiamo

$$\begin{cases} \tau_r = \min\left\{\frac{1}{2rN\|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}}, \frac{r}{2N(\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r^2\|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)})}, T_0\right\} \\ N = M^2e^{2\omega^+T_0} \end{cases} \quad (2.39)$$

dove $\omega^+ = \max\{0, \omega\}$.

Denotiamo inoltre con B_r l'insieme

$$B_r = \{F \in C_s([0, \tau_r]; \Sigma(H)) : \|F\|_s \leq r\}.$$

Proposizione 2.23. Sia $p > 0$ tale che $\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} \leq p$. Allora esiste $r = r(p) > 0$ e $\tau_r = \tau_{r(p)}$ tale che il problema (2.34) (rispettivamente (2.36)) ha una soluzione mild $P \in C_s([0, \tau_r]; \Sigma(H))$ (rispettivamente $P_n \in C_s([0, \tau_r]; \Sigma(H))$) e questa soluzione è l'unica nella palla B_r . Inoltre $P_n(\cdot)x$ converge a $P(\cdot)x$ in $C([0, \delta_r]; H)$ per ogni $x \in H$.

Dimostrazione. Vogliamo risolvere l'equazione integrale

$$\gamma(P(t))x = P(t)x = e^{tA^*}P_0e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A^*}[C^*C - P(s)BB^*P(s)]e^{(t-s)A}x ds.$$

Scegliamo $r = r(p) = \frac{N\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}}{2}$. Per ogni $P, Q \in B_r$ si ha

$$\begin{cases} \|\gamma(P) - \gamma(Q)\|_s \leq N\tau_r\|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}\|P - Q\|_s \\ \|\gamma(P)\|_s \leq N\{\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + \tau_r(\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r^2\|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)})\}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Per la scelta fatta su r si ha che $\gamma: C([0, T]; \Sigma(H)) \rightarrow C([0, T]; \Sigma(H))$ è una $\frac{1}{2}$ -contrazione in B_r , da cui si deduce la tesi. Analoga è la dimostrazione per le soluzioni del problema (2.36) con

$$\begin{aligned} \gamma_n(P_n(t))x = P_n(t)x = e^{tA_n^*}P_0e^{tA_n}x + \\ + \int_0^t e^{(t-s)A_n^*}[C^*C - P_n(s)BB^*P_n(s)]e^{(t-s)A_n}x ds. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.24. *Siano $P_n, P \in C_s([0, \tau], \Sigma(H))$ soluzioni mild rispettivamente delle equazioni di Riccati (2.36) e (2.34); allora*

$$P_n(t) \geq 0, \quad P(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Dimostrazione. Consideriamo l'espressione (2.38), fissiamo $x \in H$, $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$. Si ha

$$(P_n(t)x, x) = \|P_0 e^{tA_n} x\|^2 + \int_0^t \left[\|C e^{(t-s)A_n} x\|^2 - \|B^* P_n(s) e^{(t-s)A_n} x\|^2 \right] ds \geq 0.$$

La positività di $P(t)$ seguirà dal fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\cdot)x = P(\cdot)x \quad \text{in } C([0, T]; H).$$

Il risultato sopra scritto verrà dimostrato nel teorema successivo. \square

In conclusione, dimostriamo l'esistenza globale della soluzione mild dell'equazione di Riccati.

Teorema 2.25. *Il problema (2.34) ha una soluzione mild unica $P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$. Inoltre il problema (2.36) ha un'unica soluzione $P_n \in C([0, T], \Sigma(H))$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\cdot)x = P(\cdot)x \quad \text{in } C([0, T]; H)$$

per ogni $x \in H$.

Dimostrazione. Consideriamo $T_0 = T$; per la proposizione 2.23, per ogni $p > 0$ tale che $\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} \leq p$, esiste r tale che

$$\gamma_n(B_r) \cup \gamma(B_r) \subset B_r$$

e

$$\begin{cases} \|\gamma(P) - \gamma(Q)\|_s \leq 2\tau_r N \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|P - Q\|_s \\ \|\gamma_n(P) - \gamma_n(Q)\|_s \leq 2\tau_r N \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|P - Q\|_s \end{cases} \quad (2.41)$$

per ogni $P, Q \in B_r$.

Osserviamo che la quantità r , definita nella proposizione (2.23), dipende unicamente da $\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$, e così di conseguenza anche τ_r . Sarà sufficiente quindi stimare la norma di $P(t)$ sull'intervallo $[0, \tau_r]$.

Sia $P \in C_s([0, \tau_r], \Sigma(H))$ la soluzione mild dell'equazione di Riccati in $[0, \tau_r]$. Si ha

$$\|P(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq N \left\{ \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + \delta_r (\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r^2 \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}) \right\} \quad t \in [0, \delta_r],$$

poniamo $p_1 = N \left\{ \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + \delta_r (\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r^2 \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}) \right\}$ e $r_1 = r(p_1)$. Osserviamo che $N \geq 1$, quindi $p_1 \geq \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$.

Chiamiamo dunque $P \in C_s([0, \tau_{r_1}], \Sigma(H))$ la soluzione mild dell'equazione di Riccati nell'intervallo $[0, \delta_{r_1}]$.

Possiamo considerare ora, per $\epsilon > 0$ piccolo da scegliere, $Q \in C_s([\delta_{r_1} - \epsilon, 2\delta_{r_1} - \epsilon], \Sigma(H))$ soluzione dell'equazione integrale di Riccati

$$Q(t) = e^{t+\delta_{r_1}-\epsilon A^*} P(\delta_{r_1} - \epsilon) e^{t+\delta_{r_1}-\epsilon A} x + \int_{\delta_{r_1}-\epsilon}^t e^{(t-s)A^*} [C^*C - P(s)BB^*P(s)] e^{(t-s)A} x ds$$

su $[\delta_{r_1} - \epsilon, 2\delta_{r_1} - \epsilon]$.

Tale soluzione verifica come prima per $t \in [\delta_{r_1} - \epsilon, 2\delta_{r_1} - \epsilon]$

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq N \{ \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + \tau_{r_1} (\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r_1^2 \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}) \}.$$

Dall'ultima stima si ha che P e Q appartengono entrambe alla palla B_{r_1} e quindi, per l'unicità provata nella proposizione 2.23 risulta ben definita la funzione

$$\bar{P}(t) = \begin{cases} P(t), & t \in [0, \delta_{r_1}], \\ Q(t), & t \in [\delta_{r_1}, 2\delta_{r_1} - \epsilon] \end{cases}$$

soluzione mild dell'equazione di Riccati nell'intervallo $[0, 2\delta_{r_1} - \epsilon]$. Inoltre tale soluzione è ancora positiva e vale

$$\|\bar{P}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq N \{ \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + \delta_r (\|C^*C\|_{\mathcal{L}(H)} + r^2 \|BB^*\|_{\mathcal{L}(H)}) \} \quad t \in [0, 2\delta_{r_1} - \epsilon].$$

Ripetendo lo stesso ragionamento copriamo l'intervallo $[0, T]$ in N passi scegliendo

$$\begin{cases} N > \frac{T}{\delta_{r_1}}, \\ \epsilon \leq \frac{N\delta_{r_1} - T}{N-1}. \end{cases}$$

□

Il resto del paragrafo è dedicato alla dimostrazione dell'equivalenza tra la soluzione mild e classica dell'equazione di Riccati.

Definizione 2.26. Si definisce soluzione classica del problema (2.34) un operatore $P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ che sia differenziabile per ogni $t \in (0, T]$, $P(t) \in D(A)$ per ogni $t \in (0, T]$ e tale che soddisfi il problema (2.34).

Per dimostrare i teoremi che seguiranno abbiamo bisogno di alcune stime sulle norme dei semigrupp e di alcuni lemmi.

Lemma 2.27. *Sia $T(t)$ un semigrupp analitico generato da un operatore A . Allora esistono due costanti positive c e β tali che*

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq ce^{t\beta}, & \|A^\gamma T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq \frac{c}{t^\gamma} e^{t\beta}, & t \in (0, 1), & \gamma > 0 \\ \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq c^2 e^{2t\beta}, & \|Ae^{tA}\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq \frac{c}{2t} e^{2t\beta}, & t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $\gamma = 1$.

L'operatore A , in quanto generatore di un semigrupp analitico, è settoriale, cioè esistono due costanti $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tali che

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$$

e

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}$$

Poiché $T(t)$ è il semigrupp analitico generato dall'operatore A , esso si può esplicitare attraverso la seguente formula

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\epsilon, \eta}^{\omega+}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda$$

dove $\epsilon > 0$ e $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \theta)$ e la curva

$$\gamma_{\epsilon, \eta}^{\omega+} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| = \eta, |\lambda - \omega| \geq \epsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| \leq \eta, |\lambda - \omega| = \epsilon\}$$

è percorsa in verso antiorario.

Se $x \in D(A)$ allora $T(t)x \in D(A)$ e vale

$$AT(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\epsilon, \eta}^{\omega+}} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda;$$

ora centriamo il cammino in 0

$$(A - \omega)T(t) = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{\epsilon, \eta}} \lambda e^{t\lambda} R(\lambda, A)x d\lambda,$$

e con il cambiamento di variabile $z = \lambda t$ si ottiene

$$(A - \omega)T(t) = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i} \int_{\gamma_{t\epsilon, \eta}} \frac{z}{t} e^z R\left(\frac{z}{t}, A\right) x \frac{dz}{t} = \frac{e^{\omega t}}{2\pi i t^2} \int_{\gamma_{t\epsilon, \eta}} z e^z R\left(\frac{z}{t}, A\right) x dz$$

vogliamo dimostrare ora che questo integrale è uguale all'integrale fatto sul cammino $\gamma_{\epsilon, \eta}$. Consideriamo i cammini

$$\gamma_{\epsilon, \eta}^N = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| = \eta, N \geq |\lambda| \geq \epsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| \leq \eta, |\lambda| = \epsilon\}$$

dove $N \in \mathbb{N}$.

Per N opportunamente grande possiamo chiudere i cammini $\gamma_{\epsilon, \eta}^N$ e $\gamma_{t\epsilon, \eta}^N$ a sinistra con lo stesso arco di circonferenza \mathcal{C} . L'integrale su questi cammini chiusi è nullo perché gli integrandi sono definiti su un semplicemente connesso, allora gli integrali sui cammini $\gamma_{\epsilon, \eta}^N$ e $\gamma_{t\epsilon, \eta}^N$ sono uguali per ogni naturale maggiore di N . Di conseguenza, se dimostriamo che al crescere di N l'integrale sull'arco \mathcal{C} è zero, al limite questi integrali saranno entrambi uguali all'integrale sul cammino $\gamma_{\epsilon, \eta}$.

E' facile dimostrare che ciò avviene se la funzione integranda $f(z)$ moltiplicata

per z tende a zero quando $|z| \rightarrow \infty$. Questo accade nel nostro caso in quanto l'arco \mathcal{C} è a sinistra dell'origine e quindi $\cos \theta < 0$. Concludiamo con la stima

$$\left\| \frac{e^{\omega t}}{2\pi i t^2} \int_{\gamma_{t\epsilon, \eta}^N} z e^z R\left(\frac{z}{t}, A\right) x dz \right\| \leq \frac{e^{\omega t}}{2\pi t^2} \left[2 \int_{\epsilon}^{\infty} r e^{r \cos \theta} \frac{M}{r} dr + 2 \int_0^{\theta} e^{r \cos \eta} M d\eta \right]$$

da cui si ha la tesi.

Le altre disuguaglianze si ottengono in modo analogo. \square

Lemma 2.28. *Sia $E \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ e F l'operatore definito così:*

$$F(t)x = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} E(s)x ds,$$

allora $F \in C^\alpha([0, T]; \Sigma(H))$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$ ed esiste una costante $K_\alpha > 0$ tale che

$$\|F(t)x - F(r)x\| \leq K_\alpha |t - r|^\alpha \|E\|_s |x|, \quad \forall t, r > 0$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $0 < r < t$

$$\int_0^r e^{(t-s)\mathcal{A}} E(s)x ds = \int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \mathcal{A} e^{z\mathcal{A}} E(s)x dz ds$$

allora

$$F(t)x - F(r)x = \int_r^t e^{(t-s)\mathcal{A}} E(s)x ds + \int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \mathcal{A} e^{z\mathcal{A}} E(s)x dz ds$$

quindi si ha per il lemma (2.27)

$$\|F(t) - F(r)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq c^2 e^{2t\beta} \left[|t - r| \|E\|_s + \left(\int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \frac{dz}{z} ds \right) \|E\|_s \right].$$

Concludiamo osservando che, per $\alpha \in (0, 1)$

$$\int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \frac{dz}{z} ds \leq \frac{1}{\alpha} |t - r|^\alpha \int_0^r (r - s)^{-\alpha} ds.$$

\square

Lemma 2.29. *Sia $M \in C^\alpha([0, T]; \Sigma(H))$ con $\alpha \in (0, 1)$.*

Sia

$$G(t) = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} M(s)x ds,$$

allora $G \in C^1([0, T]; \Sigma(H)) \cap C([0, T]; D(\mathcal{A}))$ e

$$G'(t) = \mathcal{A}(G(t)) + M(t)$$

Dimostrazione. Poniamo

$$G_n(t)x = \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}_n} (M(s))x ds$$

e calcoliamo la derivata di $G_n(t)$:

$$\begin{aligned} G_n(t+h) - G_n(t) &= e^{(t+h)\mathcal{A}_n} \int_0^{t+h} e^{-s\mathcal{A}_n} M(s) ds - e^{t\mathcal{A}_n} \int_0^t e^{-s\mathcal{A}_n} M(s) ds = \\ &= e^{t\mathcal{A}_n} \left(\int_0^t e^{-s\mathcal{A}_n} (e^{h\mathcal{A}_n} - I) M(s) ds + e^{h\mathcal{A}_n} \int_t^{t+h} e^{-s\mathcal{A}_n} M(s) ds \right) \end{aligned}$$

dividendo per h

$$\begin{aligned} \frac{G_n(t+h) - G_n(t)}{h} &= e^{t\mathcal{A}_n} \left(\frac{e^{h\mathcal{A}_n} - I}{h} \right) \int_0^t e^{-s\mathcal{A}_n} M(s) ds + \\ &\quad + e^{t\mathcal{A}_n} e^{h\mathcal{A}_n} \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-s\mathcal{A}_n} M(s) ds \right] \end{aligned}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ha

$$G'_n(t) = \int_0^t \mathcal{A}_n e^{(t-s)\mathcal{A}_n} M(s) ds + M(t). \quad (2.42)$$

Aggiungendo e togliendo $\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}_n} (M(t))x ds$ si ottiene

$$G'_n(t) = \int_0^t \mathcal{A}_n e^{(t-s)\mathcal{A}_n} (M(s) - M(t)) ds + e^{t\mathcal{A}_n} (M(t)),$$

e per il lemma (2.27)

$$\|\mathcal{A}_n e^{(t-s)\mathcal{A}_n} (M(t) - M(s))\| \leq 2c^2 e^{2t\gamma} |t-s|^{\alpha-1} \|M\|_\alpha$$

dove

$$\|M\|_\alpha = \sup_{0 \leq t < s \leq T} \frac{\|M(t) - M(s)\|}{|t-s|^\alpha}$$

quindi la funzione

$$s \rightarrow \mathcal{A}_n e^{(t-s)\mathcal{A}_n} (M(t) - M(s))$$

appartiene allo spazio $L^1(0, t; \Sigma(H))$ e le G'_n risultano continue.

Se consideriamo sullo spazio $C^1([0, T]; \Sigma(H))$ la topologia indotta dalla norma

$$\|F\| = \|F\|_s + \|F'\|_s$$

si ha che il limite delle derivate delle G_n coincide con la derivata di G , cioè, dall'espressione (2.42)

$$G'(t) = \int_0^t \mathcal{A} e^{(t-s)\mathcal{A}} [M(s) - M(t)] ds + e^{t\mathcal{A}} M(t).$$

Per dimostrare che, fissato $t \in [0, T]$, $G(t) \in D(\mathcal{A})$ dobbiamo mostrare che l'applicazione

$$\phi_{G(t)}(x, y) = (G(t)x, Ay) + (Ax, G(t)y)$$

è continua su $H \times H$.

$$\begin{aligned} (G(t)x, Ay) + (Ax, G(t)y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(G_n(t)x, A_n y) + (A_n x, G_n(t)y)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n(G_n(t)x), y) = (G'(t)x, y) - (M(t)x, y) \end{aligned}$$

Per t fissato $G'(t)$ e $M(t)$ sono elementi di $\mathcal{L}(H)$, da cui si ha la tesi. \square

Teorema 2.30. *Sia $P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ soluzione mild dell'equazione di Riccati, allora P è soluzione classica. Inoltre $P \in C^1([\epsilon, T]; \Sigma(H))$ per ogni $0 < \epsilon < T$.*

Dimostrazione. Riscriviamo P nella seguente forma

$$P(t)x = e^{tA}P_0x + \int_0^t e^{(t-s)A}E(s)x ds$$

dove $x \in H$ ed $E = C^*C - PBB^*P$.

Poiché $x \mapsto e^{tA}P_0x$ è analitica per $t > 0$, per il lemma (2.28) abbiamo che $P \in C^\alpha([\epsilon, T]; \Sigma(H))$ per $0 < \epsilon < T$, $\alpha \in (0, 1]$.

Inoltre per ogni $x \in H$ e $t \geq \epsilon$ vale

$$P(t)x = e^{(t-\epsilon)A}P(\epsilon)x + \int_\epsilon^t e^{(t-s)A}E(s)x ds$$

Per il lemma (2.29)

$$P \in C^1([\epsilon, T]; \Sigma(H)) \cap C([\epsilon, T]; D(\mathcal{A})), \quad 0 < \epsilon < T$$

che implica $E \in C^1([\epsilon, T]; \Sigma(H))$. \square

2.5.3 Sintesi del controllo ottimale

Gli elementi di cui abbiamo bisogno per trovare la relazione funzionale tra lo stato ottimo e il controllo ottimo (una formula simile a quella di *feedback*) sono un'identità, detta identità fondamentale, e la soluzione di una closed loop equation. Cominciamo da quest'ultima.

Proposizione 2.31. *(Closed loop equation) Sia $t \in [0, T]$ e $x \in H$, allora il seguente sistema ha un'unica soluzione mild appartenente a $C([t, T]; H)$*

$$\begin{cases} x'(s) = Ax(s) - BB^*P(T-s)x(s), & s \in [t, T] \\ x(t) = x \end{cases} \quad (2.43)$$

Dimostrazione. Si dimostra col principio delle contrazioni, grazie alla limitatezza di $P(T-t)$, che esiste una e una sola $x(\cdot)$ tale che

$$x(s) = T(s-t)x - \int_t^s T(s-z)BB^*P(T-z)x(z)dz$$

Indichiamo con L l'operatore tale che

$$L(x)[s] = T(s-t)x - \int_t^s T(s-z)BB^*P(T-z)x(z) dz.$$

Tale operatore mappa lo spazio di Banach $(C([0, T]; H), \|\cdot\|_\infty)$ in sé. Se

$$K = \sup_{z \in [t, T]} \|P(T-z)\|_{\mathcal{L}(H)}$$

si ha

$$\|L(x) - L(y)\| \leq K\|B\|_{\mathcal{L}(U, H)}^2 M e^{-\omega t} (e^{\omega s} - e^{\omega t}) \|y - x\|_\infty.$$

Quindi se

$$t < \bar{t} < t + \frac{1}{\omega} \log \left(1 + \frac{1}{M\|B\|^2 K} \right)$$

L risulta una contrazione su $C[t, \bar{t}]$. L'unico parametro da cui dipende il fatto che L sia una contrazione è il tempo, quindi basterà ripetere un analogo ragionamento per ricoprire l'intervallo $[t, T]$. \square

Proposizione 2.32. (*identità fondamentale*) Sia $x \in H$, $u \in L^2(t, T; U)$ e $x(t)$ la corrispondente soluzione dell'equazione di stato. Allora vale la seguente identità:

$$J(t, x, u) = (P(T-t)x, x) + \int_t^T \|u(s) + B^*P(T-s)x(s)\|_U^2 ds$$

dove $P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ è la soluzione mild dell'equazione di Riccati.

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$J(t, x, u) = \int_t^T \{ \|Cx(s)\|^2 + \|u(s)\|_U^2 \} ds + (P_0x(T), x(T)),$$

quindi dobbiamo dimostrare che

$$\begin{aligned} (P(T-t)x, x) - (P_0x(T), x(T)) &= \int_t^T \{ \|Cx(s)\|^2 + \|u(s)\|_U^2 \} ds - \\ &\quad - \int_t^T \|u(s) + B^*P(T-s)x(s)\|_U^2 ds. \end{aligned}$$

Consideriamo P_n soluzione dell'equazione di Riccati (2.36) e x_n soluzione del sistema

$$\begin{cases} x'_n(s) = A_n x_n(s) + Bu(s), & s \in [t, T] \\ x_n(t) = x. \end{cases}$$

Grazie al teorema (2.25) basterà integrare tra 0 e t l'espressione

$$\frac{d}{ds}(P_n(T-s)x_n(T-s), x_n(T-s))$$

e poi passare al limite per ottenere $(P(T-t)x, x) - (P_0x(T), x(T))$.

Svolgiamo il calcolo della derivata e questo ci porterà alla conclusione. Ricordiamo che P_n è un operatore simmetrico.

$$\begin{aligned} & (P_n(T)x_n(T-s), x_n(T-s)) - (P_0x_n(T-s), x_n(T-s)) = \\ & = ([A^*P_n(s) + P_n(s)A - P(s)BB^*P_n(s) + C^*C]x_n(T-s), x_n(T-s)) + \\ & + 2(P_n(s)[-Ax_n(T-s) - Bu(T-s)], x_n(T-s)) = \\ & = ([A^*P_n(s) + P_n(s)A - P_n(s)BB^*P_n(s) + C^*C]x_n(T-s), x_n(T-s)) - \\ & - (A^*P_n(s), x_n(T-s)) - (P_n(s)A, x_n(T-s)) - 2(P_n(s)Bu(T-s)) = \\ & = -(P_n(s)BB^*P(s)x_n(T-s), x_n(T-s)) - \\ & - 2(u(T-s), B^*P(s)x_n(T-s)) + \|Cx_n(T-s)\|^2. \end{aligned}$$

Ora aggiungendo e togliendo $\|u\|_U^2$ si ha la tesi. \square

Combinando i risultati sull'esistenza della soluzione mild per l'equazione di Riccati e per la closed loop equation con l'ultima proposizione si ha il seguente

Teorema 2.33. *Sia (x^*, u^*) la coppia ottima del problema di controllo con condizioni iniziali $t \in [0, T]$ e $x \in H$. Allora*

$$u^*(s) = -B^*P(T-s)x^*(s), \quad s \in [t, T].$$

Dimostrazione. Dall'identità fondamentale si ha che

$$J(t, x, u) \geq (P(T-t)x, x), \quad \forall u \in L^2(t, T; U)$$

quindi $V(t, x) \geq (P(T-t)x, x)$. Sia $\bar{x}(t)$ la soluzione mild di (2.43) e

$$\bar{u}(s) = -B^*P(T-s)\bar{x}(s), \quad s \in [t, T];$$

allora

$$J(t, x, \bar{u}) = (P(T-t)x, x) = V(t, x)$$

cioè (\bar{x}, \bar{u}) è la coppia ottima del problema (che sappiamo essere unica per il teorema 2.4). \square

Esempio 2.34. Mostriamo un problema di controllo ottimo relativo all'equazione delle onde. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n con frontiera regolare (ad esempio di classe C^1).

Vogliamo minimizzare il funzionale

$$\begin{aligned} J(u) = & \int_0^T \int_{\Omega} \{|\nabla f(t, x)|^2 + |f_t(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2\} dt dx + \\ & + \int_{\Omega} \{|\nabla f(T, x)|^2 + |f_t(T, x)|^2\} dx \end{aligned}$$

sullo spazio $L^2([0, T] \times \Omega)$, soggetto al vincolo

$$\begin{cases} f_{tt}(t, x) = \Delta f(t, x) + B(u(t, \cdot))(x), & (t, x) \in (0, T] \times \Omega \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in \Omega \\ f_t(0, x) = f_1(x), & x \in \Omega \\ f(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T] \times \Omega, \end{cases} \quad (2.44)$$

dove B è un operatore lineare definito su $L^2(\Omega)$.

Osserviamo che il vincolo non ha l'usuale forma di quelli presi in considerazione fino ad ora. Vediamo dunque come possiamo passare alla formulazione classica. Sia $H = H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ e $U = L^2(\Omega)$.

Denotiamo con

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

il generico elemento di H . Il prodotto scalare in H è definito da

$$\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = (\nabla x_0, \nabla z_0)_{L^2(\Omega)} + (x_1, z_1)_{L^2(\Omega)}.$$

Indichiamo con A la realizzazione dell'operatore di Laplace in $L^2(\Omega)$, cioè

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Af = -\Delta f. \end{cases}$$

A è autoaggiunto e strettamente positivo (rimandiamo i dettagli di questo fatto all'appendice). Possiamo allora riscrivere il prodotto scalare H nella seguente maniera

$$(X, Z) = (\sqrt{A}x_0, \sqrt{A}z_0) + (x_1, z_1), \quad \forall X, Z \in H.$$

Definiamo l'operatore \mathcal{A} nel seguente modo

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \oplus H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{A}X = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \forall X \in D(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

L'operatore \mathcal{A} genera il semigrupp fortemente continuo di contrazioni in H

$$T(t) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{A}t) & \sqrt{A} \sin(\sqrt{A}t) \\ -\sqrt{A} \sin(\sqrt{A}t) & \cos(\sqrt{A}t) \end{bmatrix}$$

Sia $B \in \mathcal{L}(U; H)$ tale che

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad u \in U.$$

Osserviamo che $B^* \in \mathcal{L}(H; U)$ e

$$B^* \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1, \quad X \in H$$

e

$$BB^* \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Poniamo

$$f^0(t) = f(t, \cdot), \quad f^1(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot), \quad u(t) = u(t, \cdot).$$

Possiamo finalmente scrivere il problema nella forma astratta

$$\begin{cases} Y' = \mathcal{A}Y + Bu \\ Y(0) = Y_0, \end{cases}$$

dove

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x^0(t) \\ x^1(t) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

la funzione costo può essere riscritta come

$$J(u) = \int_0^T \{|Y(t)|_H^2 + |u(t)|_U^2\} dt + |Y(T)|_H^2.$$

Quindi $C = P_0 = I_H$. L'equazione di Riccati associata al problema è la seguente

$$\begin{cases} P' = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ P(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Le ipotesi (\mathcal{H}) e $(\overline{\mathcal{H}})$ sono rispettate, dunque esiste un'unica soluzione mild $P \in C_s([0, T]; \Sigma^+(H))$. Esiste inoltre una e una sola coppia ottima (f^*, u^*) e vale la formula di feedback

$$u^*(t, x) = -(P_{21}(T-t)f^*(t, \cdot))(x) - (P_{22}(T-t)\frac{\partial}{\partial t}f^*(t, \cdot))(x).$$

dove con P_{ij} , $i, j \in \{0, 1\}$, abbiamo indicato le entrate della matrice

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}.$$

La closed loop equation è

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, x) = \Delta f(t, x) - (P_{21}(T-t)f(t, \cdot))(x) - \\ \quad -(P_{22}(T-t)\frac{\partial}{\partial t}f(t, \cdot))(x) f(t, x) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \partial\Omega \\ f(0, x) = f_0(x) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = f_1(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

dove nella prima equazione $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$.

Esempio 2.35. Il seguente problema di controllo presenta come vincolo un'equazione con ritardo (*delay equation*). Tali equazioni forniscono un modello per fenomeni la cui evoluzione dipende dalla loro storia passata. Un esempio è fornito dalla equazione della popolazione

$$z'(t) = -dz(t) + bz(t-r)$$

dove $d \geq 0$ indica il tasso di mortalità, $b \geq 0$ il tasso di crescita, $r > 0$ il ritardo dovuto ai tempi della gravidanza e $z(t)$ è il numero di individui della popolazione al tempo t .

Scegliendo opportunamente lo spazio degli stati, possiamo utilizzare la teoria dei semigruppì come abbiamo fatto fino ad ora per trattare anche questo tipo di problemi.

Siano $C, D \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} z'(t) = Cz(t) + Dz(t-r), & t \in [0, T] \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{C}^n \\ z(\theta) = h_1(\theta), & \text{per q.o } \theta \in [-r, 0], \end{cases} \quad (2.45)$$

dove $h_1 \in L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n)$ e chiamiamo la quantità $r > 0$ ritardo (*delay*).

Su ogni intervallo di lunghezza r si può facilmente trovare la soluzione del problema (2.45):

$$z(t) = \begin{cases} h_1(t), & t \in [0, T] \\ e^{tC}h_0 + \int_0^t e^{(t-s)C}Dh_1(s-r) ds, & t \in [0, r] \\ e^{(t-r)C}z(r) + \int_r^t e^{(t-s)C}Dz(s-r) ds, & t \in [r, 2r], \end{cases} \quad (2.46)$$

e così via. Indichiamo con H lo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^n \times L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n)$ e con $h = (h_0, h_1)$ il suo generico elemento.

Definiamo il semigruppò $T(t)$ su H dato da

$$T(t)h = (z(t), z_t) \quad t \in [0, T],$$

dove z è soluzione di (2.45) e $z_t(\theta) = z(t+\theta)$ per $\theta \in [-r, 0]$.

In appendice dimostriamo che $T(t)$ è un semigruppò fortemente continuo e l'operatore definito da

$$\begin{cases} D(A) = \{h = (h_0, h_1) \in H : h_1 \in W^{1,2}(-r, 0; \mathbb{C}^n), h_0 = h_1(0)\} \\ Ah = (Ch_0 + Dh_1(-r), h_1'). \end{cases} \quad (2.47)$$

lo genera.

Poniamo $H_1 = L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n)$, $U = \mathbb{C}^n$ e

$$x(t) = (z(t), z_t).$$

Il problema (2.45) è dunque equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = (h_0, h_1) \end{cases} \quad (2.48)$$

dove $B: \mathbb{C}^n \rightarrow H_1$ è l'operatore lineare definito da

$$Bu = (u, 0).$$

Osserviamo che $B^*: H_1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ manda la coppia (x_0, x_1) nell'elemento x_0 . Consideriamo il problema di controllo

$$\min_{u \in L^2(0, T; \mathbb{C}^n)} J(u)$$

dove

$$J(u) = \int_0^T \{|z(t)|^2 + |u(t)|^2\} dt + |z(T)|^2$$

e abbiamo indicato con $|\cdot|$ indica la norma euclidea di \mathbb{C}^n .

Ponendo

$$C(x_0, x_1) = P_0(x_0, x_1) = (x_0, 0)$$

il funzionale costo può essere riscritto come

$$J(u) = \int_0^T \{\|Cx(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\} dt + \|P_0x(T)\|_{H_1}.$$

La composizione $BB^*: \mathbb{C}^n \times L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n \times L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n)$ può essere espressa nella forma matriciale

$$BB^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza l'equazione di Riccati è

$$\begin{cases} P' = A^*P + PA - P^2 + C^*C, \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Possiamo scrivere anche P in forma matriciale

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} P_{00} &\in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), & P_{01} &\in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathbb{C}^n), \mathbb{C}^n) \\ P_{10} &\in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, L^2(0, T; \mathbb{C}^n)), & P_{11} &\in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathbb{C}^n)). \end{aligned}$$

Facilmente si vede che $C, P_0 \in \mathcal{L}(H_1)$, inoltre $(P_0(x_0, x_1), (x_0, x_1))_{H_1} = 2\|(x_0, x_1)\|_{H_1}$, da cui si ha la coercività. vale dunque la formula di feedback e il controllo ottimo è dato da

$$u^*(t) = -P_{00}(T-t)z^*(t) - P_{01}(T-t)z_t^*.$$

Capitolo 3

Problemi di controllo al bordo

3.1 Estensione di semigruppri in spazi di Hilbert

Facciamo qualche osservazione sulle estensioni di operatori illimitati in spazi di Hilbert e introduciamo delle notazioni che useremo in seguito.

Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert reale e indichiamo con H' il suo spazio duale, cioè l'insieme delle applicazioni lineari e continue su H a valori reali.

Identifichiamo, grazie alla bigezione data dal teorema di Riesz, lo spazio H con H' .

Sia $T(t)$ un semigruppri fortemente continuo su H generato da A , $T^*(t)$ il semigruppri aggiunto di $T(t)$ con generatore A^* e indichiamo con $D(A^*) \subset H' = H$ il dominio di A^* .

Il sottospazio $D(A^*)$, dotato della norma del grafico

$$\|x\|_{D(A^*)}^2 = \|x\|_H + \|A^*x\|_H$$

è uno spazio di Hilbert e rende continuo l'operatore A^* . Da qui in avanti lo considereremo dotato di tale norma. Si vede facilmente che tale struttura si immerge con continuità nello spazio H .

Sappiamo già che $T^*(t)$ è fortemente continuo su H' e tale resta la sua restrizione al sottospazio $D(A^*)$. Indichiamo ancora con $T^*(t)$ tale restrizione.

Con ragionamenti analoghi si ha che $(T^*(t))^*$ è un semigruppri fortemente continuo su $D(A^*)'$. Tale semigruppri può essere visto come un'estensione di $T(t)$ a $D(A^*)'$, vediamo perché.

I duali rovesciano le inclusioni, quindi

$$D(A^*) \subset H' = H \implies H = H' = H'' \subset D(A^*)'$$

quindi, dall'identificazione di H col suo duale, si ha che $D(A^*)$ e $D(A)$ sono inclusi in $D(A^*)'$.

Se $x \in D(A^*)'$ indichiamo $x(\cdot)$ con $\langle x, \cdot \rangle_{D(A^*)}$. Per ogni $x \in H$ e $y \in D(A^*)$

esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|(T(t)x, y)| \leq C\|y\|_{D(A^*)},$$

quindi $T(t)x \in D(A^*)'$. Inoltre

$$(T(t)x, y) = (x, T^*(t)y) = \langle T^*(t)^*x, y \rangle_{D(A^*)}, \quad \forall x \in H, \forall y \in D(A^*),$$

cioè $T^*(t)^*$ coincide con $T(t)$ su H .

Il semigruppoo $T(t)$ può essere considerato indifferentemente definito sui tre spazi $D(A)$, $H = H'$ e $D(A^*)'$.

Analogamente l'operatore $(A^*)^*: H \rightarrow D(A^*)'$ può essere visto come l'estensione del generatore A . Lo denotiamo quindi con la stessa lettera e scriviamo

$$A \in \mathcal{L}(D(A), H) \cap \mathcal{L}(H, D(A^*)').$$

Studieremo in questa parte i problemi di controllo ottimo in cui l'operatore di controllo B è illimitato. Il capitolo è suddiviso in due parti in cui si affrontano problemi di tipo iperbolico e parabolico, coinvolgenti cioè, rispettivamente, il generatore di un semigruppoo analitico e fortemente continuo.

I sistemi di stato relativi ai problemi di controllo avranno la stessa forma di quelli studiati nel capitolo precedente, o almeno sarà sempre possibile riportarli in tale forma.

Vediamo un esempio che giustifica il termine *controllo al bordo* e mostra come si possa passare da un sistema con condizioni iniziali sulla frontiera dipendenti dal controllo u ad un altro che ha la generica forma precedentemente introdotta.

Esempio 3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con frontiera $\partial\Omega$ regolare.

Consideriamo il seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{u \in L^2([0, T] \times \partial\Omega)} J(u),$$

dove

$$J(u) = \int_0^T \int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(t, \sigma)|^2 d\sigma dt + \int_{\partial\Omega} |\Gamma x(T, \cdot)(x)|^2 dx,$$

soggetto al vincolo

$$\begin{cases} f_t(x, t) = \Delta f(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in \Omega, \\ f(t, x) = u(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $f_0 \in L^2(\Omega)$, $\Gamma \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega))$ e

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

è l'operatore di Laplace. Poniamo $H = L^2(\Omega)$, $U = L^2(\partial\Omega)$ e osserviamo che il controllo u compare nelle condizioni di bordo del vincolo.

Ricordiamo la definizione della realizzazione dell'operatore di Laplace A :

$$\begin{cases} Af = \Delta f, & \forall f \in D(A) \\ D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

A è strettamente negativo e autoaggiunto in H , quindi il tipo del semigruppato analitico $T(t)$ generato da A è strettamente negativo. Inoltre

$$D((-A)^\alpha) = \begin{cases} H^{2\alpha}(\Omega), & \text{se } \alpha \in (0, \frac{1}{4}) \\ H_0^{2\alpha}(\Omega), & \text{se } \alpha \in (\frac{1}{4}, 1). \end{cases}$$

Introduciamo la mappa di Dirichlet $D: L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ che associa ad una funzione v definita sulla frontiera di Ω la sua estensione armonica a tutto Ω , cioè

$$Dv = w \iff \Delta w = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = v.$$

Vediamo ora come porre il problema in forma astratta.

Supponiamo inizialmente che $u \in W^{1,2}(0, T; L^2(\partial\Omega))$ e introduciamo la variabile

$$g(t, x) = f(t, x) - (Du(t, \cdot))(x). \quad (3.3)$$

Otteniamo

$$\begin{cases} g_t(x, t) = \Delta f(t, x) - \frac{\partial Du}{\partial t}(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ g(0, x) = f_0(x) - D(u(0, \cdot))(x), & x \in \Omega, \\ g(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Allora, ponendo $g(t, \cdot) = g(t)$ e $u(t, \cdot) = u(t)$, possiamo scrivere il problema sopra nella seguente forma integrale

$$g(t) = T(t)(f_0 - Du(0)) - \int_0^t T(t-s)Du'(s) ds.$$

Osserviamo che ponendo $Bu = Du'$ abbiamo riportato il vincolo nell'espressione classica. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^t T(t-s)Du'(s) ds &= [T(t-s)Du(s)]_0^t + A \int_0^t T(t-s)Du(s) ds = \\ &= Du(t) - T(t)Du(0) + A \int_0^t T(t-s)Du(s) ds, \end{aligned}$$

allora

$$g(t) = T(t)f_0 - A \int_0^t T(t-s)Du(s) ds - Du(t)$$

e dall'espressione (3.3) si ha

$$f(t) = T(t)f_0 - A \int_0^t T(t-s)Du(s) ds. \quad (3.5)$$

L'ipotesi $u \in W^{1,2}(0, T; L^2(\partial\Omega))$ può essere rimossa, perché $W^{1,2}(0, T; L^2(\partial\Omega))$ è denso in $L^2(0, T; \partial\Omega)$ e si può dunque ottenere una relazione come la (3.5) con $u \in L^2(0, T; \partial\Omega)$ per approssimazione.

Notiamo che l'integrando di (3.5) non risulta ben definito, perché, in generale, Du non appartiene a $D(A)$; gli elementi di $D(A)$ hanno traccia nulla, mentre, se u è un elemento non nullo di $L^2(0, T; \partial\Omega)$, Du non ha evidentemente traccia nulla.

Questo inconveniente viene risolto scomponendo l'operatore A nelle sue potenze frazionarie

$$f(t) = T(t)f_0 + A^{1-\alpha} \int_0^t T(t-s)(-A)^\alpha Du(s) ds.$$

Come osservato precedentemente, se $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ il dominio di $(-A)^\alpha$ coincide con lo spazio $H^{2\alpha}(\Omega)$; poiché $2\alpha < \frac{1}{2}$, $H^{2\alpha}(\Omega)$ contiene $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ e $D \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$, come dimostrato da J. L. Lions ed E. Magenes in [9].

3.2 Problema parabolico

Consideriamo il solito sistema dinamico

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (3.6)$$

dove $A: D(A) \rightarrow H$ è il generatore di un semigruppato analitico $T(t)$ sullo spazio di Hilbert H , $B: U \rightarrow D(A^*)'$ e $u \in L^2(0, T; U)$. Come abbiamo visto nell'esempio 3.1, sarà naturale considerare $B = (\lambda_0 I - A)D$ con $D \in \mathcal{L}(U; H)$ e $\lambda_0 \in \rho(A)$ (nell'esempio 3.1 $\lambda_0 = 0$). Di conseguenza la soluzione mild avrà la forma

$$x(t) = T(t)x + (\lambda_0 I - A) \int_0^t T(t-s)Du(s) ds \in L^2(0, T; H). \quad (3.7)$$

Assumiamo le seguenti ipotesi

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} \text{detto } \omega_0 \text{ il tipo del semigruppato } T(t), \text{ si ha } \lambda_0 > \omega_0; \\ \text{esiste } \alpha \in (0, 1) \text{ tale che } D \in \mathcal{L}(U, D(A^\alpha)), \end{cases}$$

dove $D(A^\alpha) = D([\lambda_0 I - A]^\alpha)$. Queste ipotesi sono equivalenti al fatto che

$$B = (\lambda_0 I - A)D = [\lambda_0 I - A]^{1-\alpha} [\lambda_0 I - A]^\alpha D \in \mathcal{L}(U, D((A^*)^{1-\alpha})')$$

Osservazione 3.2. Osserviamo che, poiché la potenza frazionaria positiva $[\lambda_0 I - A]^\alpha$ è chiusa, per il teorema del grafico chiuso $[\lambda_0 I - A]^\alpha D$ è un operatore continuo da U in H .

Vogliamo portare l'operatore $\lambda_0 I - A$ all'interno dell'integrale nell'espressione (3.7). Il problema è che $A(Du)$ potrebbe non essere definito, cioè l'immagine di D potrebbe non essere inclusa nel dominio di A . Per rimediare a questo

inconveniente scomponiamo A con le sue potenze frazionarie, come fatto in precedenza,

$$(\lambda_0 I - A)T(t-s)Du(s) = [\lambda_0 I - A]^{1-\alpha}T(t-s)[\lambda_0 I - A]^\alpha Du(s);$$

allora per l'osservazione 3.2, per il lemma 2.27 e la seconda ipotesi di (\mathcal{H}) esiste una costante $k_\alpha > 0$ tale che

$$\|(\lambda_0 I - A)T(t-s)Du(s)\| \leq k_\alpha (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_U, \quad s \in [0, t],$$

quindi possiamo scrivere lo stato come

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t (\lambda_0 I - A)T(t-s)Du(s) ds,$$

e vale la seguente stima

$$\|x(t)\| \leq M e^{\omega_0 t} \|x\| + k_\alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_U ds.$$

Osserviamo che, se $\alpha > \frac{1}{2}$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_U ds &\leq \left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(0,T;U)} = \\ &= \frac{1}{2\alpha-1} t^{2\alpha-1} \|u\|_{L^2(0,T;U)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza $x \in L^\infty(0, T; H)$ e vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.3. *Se $\alpha > \frac{1}{2}$ allora la soluzione mild $x(t)$ del problema (3.6) è continua.*

Dimostrazione. Poniamo per semplicità $\lambda_0 = 0$ e siano

$$x_n(t) = T(t)x - A \int_0^t T(t-s) nR(n, A) Du(s) ds.$$

Dimostriamo che le x_n convergono uniformemente a x su $[0, T]$.

Sia $0 < \epsilon < \alpha - \frac{1}{2}$ e osserviamo che

$$\begin{cases} \|A^{1-\epsilon} nR(n, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|AnR(n, A)\|_{\mathcal{L}(H)}^{1-\epsilon} \|R(n, A)\|_{\mathcal{L}(H)}^\epsilon \leq \frac{c}{n^\epsilon} \\ \|A^{1-\alpha+\epsilon} T(t-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq (t-s)^{\alpha-(1+\epsilon)}. \end{cases}$$

Ricordando l'osservazione 3.2 e utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha, per ogni $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x(t)\| &= \left\| \int_0^t A^{1-\alpha} T(t-s) (nR(n, A) - I) A^\alpha Du(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|A^\alpha D\|_{\mathcal{L}(U, H)} \frac{c}{n^\epsilon} \int_0^T \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha+\epsilon}} \|u(s)\|_U ds \leq \\ &\leq \|A^\alpha D\|_{\mathcal{L}(U, H)} \frac{c}{n^\epsilon} \int_0^T \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha+2\epsilon}} ds \|u\|_{L^2(0,T;U)}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.4. Nel caso $\alpha \leq \frac{1}{2}$ non è in generale vero che $x(t)$ sia continua e le ipotesi (\mathcal{H}) non saranno sufficienti a garantire l'esistenza e unicità della coppia ottima.

Seguendo [3] osserviamo che un'ipotesi aggiuntiva sufficiente è la seguente ($\hat{\mathcal{H}}$): esiste $\beta \in \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{(1-\alpha)}{2}\right]$ tale che, per ogni $x \in D([\lambda_0 I - A]^\beta)$, valga

$$\begin{cases} P_0[\lambda_0 I - A]^\beta x \in D([\lambda_0 I - A^*]^\beta), \\ [\lambda_0 I - A^*]^\beta P_0[\lambda_0 I - A]^\beta \text{ è limitato.} \end{cases}$$

Osserviamo che questa ipotesi serve per dare senso al termine

$$(P_0 x(T), x(T)) = (\overline{P_0}[\lambda_0 I - A]^{-\beta} x(T), [\lambda_0 I - A]^{-\beta} x(T)),$$

infatti, se $\beta > \frac{1}{2} - \alpha$, allora

$$[\lambda_0 I - A]^{-\beta} x \in C([0, T]; H)$$

quindi acquista senso anche trattare puntualmente questa funzione.

Nel seguito ci limiteremo a mostrare la teoria completa solo per il caso $\alpha > \frac{1}{2}$. Consideriamo il problema di minimizzazione del funzionale

$$J(u) = \int_0^T \{ \|Cx(t)\|^2 + \|u(t)\|_U^2 \} dt + (P_0 x(T), x(T)) \quad (3.8)$$

sullo spazio $L^2(0, T; H)$, soggetto al vincolo dato dall'equazione (3.7).

Supponiamo che $C \in \mathcal{L}(H)$ e $P_0 \in \Sigma^+(H)$. Le definizioni di controllo ottimo, stato ottimo e coppia ottima sono esattamente le stesse enunciate nel capitolo precedente.

Useremo l'approccio della programmazione dinamica procedendo nel seguente modo:

- Consideriamo l'equazione di Riccati in $[0, T]$

$$\begin{cases} P'(t) = A^* P(t) + P(t)A - P(t)(\lambda_0 I - A)D((\lambda_0 I - A)D)^* P(t) + C^* C \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Poniamo

$$E = [\lambda_0 I - A]^\alpha D, \quad V = [\lambda_0 I - A^*]^{1-\alpha} P;$$

per l'osservazione 3.2 si ha $E \in \mathcal{L}(U, H)$.

Possiamo allora riscrivere l'equazione di Riccati nella forma seguente

$$\begin{cases} P'(t) = A^* P(t) + P(t)A - V(t)^* E E^* V(t) + C^* C, \quad t \in (0, T] \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

e ricerchiamo una soluzione dell'equazione integrale corrispondente, cioè

$$P(t)x = e^{tA} P_0 x + \int_0^t e^{(t-s)A} C^* C x ds + \int_0^t e^{(t-s)A} V^*(s) E E^* V(s) x ds, \quad (3.11)$$

dove $x \in H$, che verifichi inoltre $V(t) \in \mathcal{L}(H)$; per avere quest'ultima condizione introdurremo uno spazio apposito dove cercare le soluzioni.

- Mostriamo la relazione tra il controllo ottimo u^* e lo stato ottimo x^* attraverso la formula di feedback

$$u^*(t) = -D^*(\lambda_0 I - A^*)P(T-t)x^*(t) = -E^*V(T-t)x^*(t); \quad (3.12)$$

- Useremo un teorema di punto fisso per dimostrare che lo stato ottimo è soluzione della closed loop equation

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t [\lambda_0 I - A]^{1-\alpha} T(t-s) E E^* V(T-s) x(s) ds. \quad (3.13)$$

Introduciamo il problema approssimante di (3.10)

$$\begin{cases} P_n'(t) = A^* P_n(t) + P_n(t) A - V_n(t)^* E_n E_n^* V_n(t) + C^* C, & t \in (0, T] \\ P_n(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

dove

$$E_n = nR(n, A)E \in \mathcal{L}(H), \quad V_n = [\lambda_0 I - A^*]^{1-\alpha} P_n.$$

Scritto in forma integrale il problema risulta come segue

$$\begin{aligned} P_n(t)x &= e^{tA} P_0 x + \int_0^t e^{(t-s)A} C^* C x ds + \\ &+ \int_0^t e^{(t-s)A} V_n^*(s) E_n E_n^* V_n(s) x ds, \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove $x \in H$.

Osservazione 3.5. Il problema (3.15), per il teorema 2.25, ha un'unica soluzione $P_n \in C_s([0, T]; \Sigma^+(H))$.

Indichiamo con $T_{\lambda_0}(t)$ il semigruppato generato da $A - \lambda_0 I$. Per comodità introduciamo una costante $L \geq 1$ tale che

$$\begin{cases} \|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad \|(\lambda_0 I - A)^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad \forall \gamma \in (0, 1); \\ \|E_n E_n^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ \|T_{\lambda_0}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad t\|(A - \lambda_0 I)T_{\lambda_0}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad \forall t > 0; \\ t^{-\gamma}\|(\lambda_0 I - A)^\gamma T_{\lambda_0}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L, \quad \forall \gamma \in (0, 1), \forall t > 0. \end{cases}$$

L'esistenza di una tale costante è assicurata dal teorema di Hille-Yosida e dal lemma 2.27.

Da ora in avanti considereremo per semplicità $\lambda_0 = 0$.

Introduciamo un nuovo spazio funzionale.

Denotiamo con $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ l'insieme delle funzioni $P \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ tali che

$$\begin{cases} P(t)x \in D((-A^*)^{1-\alpha}), & \forall x \in H, \forall t \in (0, T], \\ (-A^*)^{1-\alpha}P \in C((0, T]; \mathcal{L}(H)), \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha}P(t)x = 0, & \forall x \in H. \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda condizione implica $V(t) \in \mathcal{L}(H)$ per ogni $0 < t \leq T$. Definiamo

$$\|P\|_1 = \sup_{t \in (0, T]} \|t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha}P(t)\|_{\mathcal{L}(H)}$$

e consideriamo lo spazio $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ dotato della norma seguente

$$\|P\|_\alpha = \|P\| + \|P\|_1$$

che lo rende uno spazio di Banach.

Indichiamo con $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma^+(H))$ il sottospazio di $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ i cui elementi P sono tali che $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in (0, T]$.

Cerchiamo una soluzione P dell'equazione integrale (3.11) che appartenga allo spazio $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma^+(H))$ e la chiamiamo soluzione mild di (3.10). Riscriviamo il problema (3.11) così

$$P = \gamma(P) = F + H - \Phi(P),$$

dove

$$\begin{aligned} F(t) &= T^*(t)P_0T(t), \\ N(t) &= \int_0^t T^*(t-s)C^*CT(t-s)ds, \\ (\Phi(P))(t) &= \int_0^t T^*(t-s)V^*(s)EE^*V(s)T(t-s)ds. \end{aligned}$$

e $V(s) = (-A^*)^{1-\alpha}P(s)$.

Analogamente riscriviamo il problema (3.15)

$$P_n = \gamma_n(P_n) = F + H - \Phi_n(P_n),$$

dove

$$(\Phi_n(P_n))(t) = \int_0^t T^*(t-s)V_n^*(s)E_nE_n^*V_n(s)T(t-s)ds$$

e

$$V_n(s) = [-A^*]^{1-\alpha}P_n(s).$$

Ancora una volta abbiamo bisogno di una generalizzazione del principio delle contrazioni, stavolta sullo spazio $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 2.19.

Teorema 3.6. *Sia $T > 0$ e $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di applicazioni da $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ in sé, tale che*

$$\|\gamma_n(P) - \gamma_n(Q)\|_\alpha \leq a\|P - Q\|_\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per qualche $a \in [0, 1)$ e $P, Q \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$. Inoltre, supponiamo che esista un'applicazione γ da $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ in sé, tale che, per ogni $P \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$, $m \in \mathbb{N}$ e $x \in H$,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^m(P)x = \gamma^m(P)x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} \gamma_n^m(P)x = t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} \gamma^m(P)x, \end{cases} \quad (3.16)$$

dove le convergenze sono da intendersi nello spazio $C([0, T]; H)$.

Allora esistono uniche P_n e P in $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ tali che

$$\gamma_n(P_n) = P_n, \quad \gamma(P) = P.$$

Inoltre, per ogni $x \in H$ e $T > 0$ vale e vale, per ogni $x \in H$ e $T > 0$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\cdot)x = P(\cdot)x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} P_n(\cdot) = t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} P(\cdot)x, \end{cases} \quad (3.17)$$

dove le convergenze sono da intendersi nello spazio $C([0, T]; H)$.

Teorema 3.7. *Il problema (3.10) ha una e una sola soluzione mild P appartenente allo spazio $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$. Inoltre, la soluzione P_n del problema (3.14) appartiene a $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in sei passi.

Passo 1: dimostriamo che $F, N \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$.

Osserviamo che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T^*(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L$$

quindi

$$\|F\|_s \leq L^2 \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Inoltre

$$\|t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} F(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} T^*(t) P_0 T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L^2 \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$$

quindi

$$\|F\|_1 \leq L^2 \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$$

da cui si ha che

$$\|F\|_\alpha \leq 2L^2 \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Stimiamo la norma di N . Facilmente si vede che $\|N\| \leq L^2 \|C\|^2 T$, inoltre, poiché

$$\|(-A^*)^{1-\alpha} T(t-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L(t-s)^{1-\alpha}, \quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

si ha che

$$\begin{aligned} |t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} N(t)| &= \left| t^{1-\alpha}(-A^*)^{1-\alpha} \int_0^t T^*(t-s) C^* C T(t-s) ds \right| \leq \\ &\leq L^2 \|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2 t^{1-\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \leq \frac{1}{\alpha} L^2 \|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2 T. \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato le seguenti stime

$$\|F\|_\alpha \leq 2L^2\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}, \quad \|N\|_\alpha \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) L^2\|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2 T.$$

Passo 2: dimostriamo che le applicazioni Φ e Φ_n trasformano $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ in sé. Più precisamente dimostriamo che esiste una costante $C_{1,T} > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $P \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$,

$$\|\Phi(P)\|_\alpha + \|\Phi_n(P)\|_\alpha \leq C_{1,T}\|P\|_\alpha^2.$$

Vediamo solo la stima sulla norma di $\Phi(P)$, quella su $\Phi_n(P)$ è analoga. Osserviamo che

$$\|T^*(t-s)V^*(s)V(s)T(t-s)\| \leq \left(\frac{\|P\|_1}{(t-s)^{1-\alpha}}\right)^2.$$

Se $P \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ allora $\Phi(P) \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ e vale

$$\|\Phi(P)\|_s \leq L^2\|P\|_1^2 \int_0^t s^{2\alpha-2} ds \leq \frac{1}{2\alpha-1} L^2\|P\|_1^2 T^{2\alpha-1}$$

da cui otteniamo

$$\|\Phi(P)\| \leq \frac{1}{2\alpha-1} L^2\|P\|_1^2 T^{2\alpha-1}.$$

Consideriamo $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$. Analogamente alle stime ottenute precedentemente si può provare che

$$\|\Phi(P)\|_1 \leq T^{2\alpha-1} L^2 \beta(2\alpha-1, \alpha) \|P\|_1^2.$$

Abbiamo così ottenuto l'esistenza della costante che volevamo e inoltre

$$C_{1,T} = 2 \left[\frac{1}{2\alpha-1} + \beta(2\alpha-1, \alpha) \right] T^{2\alpha-1} L^2.$$

Passo 3: vediamo che esiste una costante $C_{2,T} > 0$ tale che, per ogni $P, Q \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$, si ha

$$\|\Phi(P) - \Phi(Q)\|_\alpha + \|\Phi_n(P) - \Phi_n(Q)\|_\alpha \leq C_{2,T}(\|P\|_\alpha + \|Q\|_\alpha)\|P - Q\|_\alpha.$$

Sia $Z = [-A^*]^{1-\alpha} Q$, $P, Q \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ e $x \in H$. Abbiamo

$$\begin{aligned} & |t^{1-\alpha}(\Phi(P))(t) - t^{1-\alpha}(\Phi(Q))(t)| \leq \\ & \leq \left| t^{1-\alpha} \int_0^t e^{(t-s)A} [(V(s) - Z(s))^* E E^* V(s)] ds \right| + \\ & + \left| t^{1-\alpha} \int_0^t e^{(t-s)A} [Z^*(s) E E^* (V(s) - Z(s))] ds \right| \end{aligned}$$

e usando il passo 2 si conclude.

Passo 4: Denotiamo con $B(r, t)$ la palla

$$B(r, t) = \{P \in C_{s,\alpha}([0, t]; \Sigma(H)) : \|P\|_\alpha \leq r\}.$$

Per ogni $p > 0$ esistono $\tau > 0$ e $r > 0$, dipendenti da p , tali che se $\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} \leq p$, allora

$$\gamma(B(r, \tau)) \cup \gamma_n(B(r, \tau)) \subset B(r, \tau) \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} \|\gamma(P) - \gamma(Q)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|P - Q\|_\alpha, \\ \|\gamma_n(P) - \gamma_n(Q)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|P - Q\|_\alpha, \end{cases} \quad (3.19)$$

per ogni $P, Q \in B(r, \tau)$.

Ciò segue dalle disuguaglianze dimostrate nei primi tre passi.

Passo 5: dimostriamo che localmente esistono delle soluzioni.

Fissiamo $p > \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$ e τ associato a p come nel passo precedente. Dalle disuguaglianze (3.19) e dal teorema delle contrazioni generalizzato 3.6, si ha che esistono unici P e P_n appartenenti a $C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$ tali che

$$\gamma(P) = P, \quad \gamma_n(P_n) = P_n.$$

Quindi i problemi (3.10) e (3.14) hanno soluzione nell'intervallo $[0, \tau]$.

La dimostrazione del fatto che le soluzioni trovate sono anche positive su $[0, \tau]$ è analoga a quella del lemma 2.24. Faremo uso di questo fatto nel passo successivo.

Passo 6: concludiamo dimostrando l'esistenza globale e l'unicità delle soluzioni. Dato che l'intervallo di esistenza $[0, \tau]$ dipende solo da p , e quindi dalla norma di P_0 , ci basterà stimare la norma di $P(t)$ su $[0, \tau]$. Nel seguito dimostriamo i fatti solo per la soluzione del problema (3.10); la dimostrazione per la soluzione di (3.14) è analoga.

Sia $P \in C_{s,\alpha}([0, \tau], \Sigma(H))$ la soluzione del problema (3.10). Poiché $P(t) \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} (P(t)x, x) &\leq (P_0T(t)x, T(t)x) + \int_0^t \|CT(t-s)x\|^2 ds \leq \\ &\leq L^2[\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + T\|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2]\|x\|^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\|P(t)\| \leq L^2[\|P_0\| + T\|C\|^2], \quad t \in [0, \tau].$$

Poniamo $p_1 = L^2[\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + T\|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2]$ e scegliamo τ_1 tale che valgano (3.18) e (3.19). Osserviamo che, poiché $L \geq 1$, $p_1 \geq \|P_0\|_{\mathcal{L}(H)}$. Indichiamo allora con $P \in C_{s,\alpha}([0, \tau_1], \Sigma(H))$ l'unica soluzione dell'equazione di Riccati nella palla $B(r_1, \tau_1)$.

Procedendo come prima, possiamo considerare la soluzione $Q \in C_{s,\alpha}([\tau_1 - \epsilon, 2\tau_1 - \epsilon]; \Sigma(H))$ dell'equazione di Riccati

$$Q(t) = e^{tA}P(\tau_1 - \epsilon) + \int_{\tau_1 - \epsilon}^t e^{(t-s)A}C^*C ds - \int_{\tau_1 - \epsilon}^t e^{(t-s)A}V_Q^*(s)E^*EV_Q(s) ds$$

su $[\tau_1 - \epsilon, 2\tau_1 - \epsilon]$, dove ϵ è una quantità che verrà scelta alla fine e $V_Q(t) = [-A^*]^{1-\alpha}Q(t)$.

Tale soluzione verifica ancora

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L^2[\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + T\|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2], \quad t \in [\tau_1 - \epsilon, 2\tau_1 - \epsilon].$$

Grazie all'unicità delle soluzioni possiamo definire

$$\bar{P}(t) = \begin{cases} P(t), & t \in [0, \tau_1], \\ Q(t), & t \in [\tau_1, 2\tau_1 - \epsilon]. \end{cases}$$

Tale funzione è soluzione sull'intervallo $[0, 2\tau_1 - \epsilon]$ del problema (3.10). Inoltre è positiva e vale ancora la disuguaglianza

$$\|\bar{P}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L^2[\|P_0\|_{\mathcal{L}(H)} + T\|C\|_{\mathcal{L}(H)}^2], \quad t \in [0, 2\tau_1 - \epsilon].$$

Ripetendo lo stesso ragionamento arriviamo in N passi a coprire l'intervallo $[0, T]$, scegliendo come N e ϵ quantità tali che

$$\begin{cases} N > \frac{T}{\tau_1}, \\ \epsilon \leq \frac{N\tau_1 - T}{N-1}. \end{cases}$$

□

3.2.1 Sintesi del controllo ottimale

Come per il problema di controllo interno, studiato nel caso analitico, dimostriamo l'identità fondamentale e l'esistenza e unicità della soluzione della closed loop equation. Questi due elementi ci porteranno a risolvere il problema di minimizzazione del funzionale (3.8).

Proposizione 3.8. *Sia $u \in L^2(0, T; U)$ e sia x la soluzione del problema (3.7). Allora vale la seguente identità:*

$$(P(t)x, x) + \int_0^t \|u(s) + E^*V(t-s)x(s)\|_U^2 ds = \quad (3.20)$$

$$= (P_0x(t), x(t)) + \int_0^t \{|Cx(s)|^2 + |u(s)|^2\} ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.21)$$

Dimostrazione. Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi in $W^{1,2}(0, T; H)$ convergente a u in $L^2(0, T; H)$. Denotiamo con x_n la soluzione al problema (3.7) con $u = u_n$.

Se consideriamo P_n soluzione dell'equazione (3.14) possiamo ricalcare esattamente la stessa dimostrazione della proposizione 2.32. □

Consideriamo la closed loop equation, in forma integrale,

$$x(t) = T(t)x - \int_0^t (-A)^{1-\alpha}T(t-s)EE^*V(T-s)x(s) ds. \quad (3.22)$$

Osserviamo che l'integrale in (3.22) è ben definito perché

$$\|(-A)^{1-\alpha}T(t-s)EE^*V(T-s)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq L^2\|P\|_{\alpha}[(T-s)(t-s)]^{\alpha-1}.$$

Proposizione 3.9. *Esiste una e una sola soluzione della closed loop equation $x \in C([0, T]; H)$.*

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale lineare Ψ definito su $C([0, T]; H)$ nel seguente modo

$$\Psi(f)(t) = \int_0^t (-A)^{1-\alpha} T(t-s) E E^* V(T-s) f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Dimostriamo che Ψ trasforma $C([0, T]; H)$ in sé e che tale operatore è continuo. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo che

$$\begin{aligned} |\Psi(f)(t)| &\leq L^2 \|P\|_\alpha \|f\|_{C([0, T]; H)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (T-s)^{\alpha-1} ds \leq \\ &\leq L^2 \|P\|_\alpha \|f\|_{C([0, T]; H)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (T-s)^{2\alpha-2} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} L^2 \|P\|_\alpha \|f\|_{C([0, T]; H)}. \end{aligned}$$

quindi $\Psi \in \mathcal{L}(C[0, t]; H)$ per ogni $t \in (0, T]$ e

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}(C[0, t]; H)} \leq \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} L^2 \|P\|_\alpha.$$

Se t è sufficientemente piccolo Ψ è una contrazione, quindi c'è un'unica soluzione della closed loop equation su $[0, t]$. Il fatto che Ψ sia una contrazione dipende solo da t , allora si può ripetere lo stesso ragionamento per $[t, 2t]$, e così via, ricoprendo l'intervallo $[0, T]$. \square

Vediamo ora che la soluzione della closed loop equation è proprio lo stato ottimo. Osserviamo che, avendo ottenuto tale funzione attraverso una ricerca di punto fisso, non è possibile dare in generale un'espressione esplicita di tale funzione.

Teorema 3.10. *Esiste una e una sola coppia ottima (x^*, u^*) . Inoltre*

1. $x^* \in C([0, T]; H)$ è la soluzione della closed loop equation;
2. $u^* \in C([0, T]; H)$ è data dalla feedback formula:

$$u^*(t) = -E^* V(T-t) x^*(t);$$

3. il minimo valore assunto dalla funzione costo è

$$J(u^*) = (P(T)x, x).$$

Dimostrazione. Se x è soluzione di (3.7) dall'identità fondamentale (3.20) con $t = T$ si ha

$$J(u) = (P(T)x, x) + \int_0^T \|u(s) + E^* V(T-s)x(s)\|^2 ds, \quad (3.23)$$

quindi

$$(P(T)x, x) \leq J(u), \quad \forall u \in L^2(0, T; H).$$

Sia $u^*(t) = -E^*V(T-t)x^*(t)$ e $x^*(t)$ la soluzione della closed loop equation. Poniamo in (3.23) $u = u^*$ e $x = x^*$, si ottiene

$$J(u^*) = (P(T)x, x),$$

da cui si ha che u^* e x^* sono ottimi. Dalla stretta convessità di J si ha l'unicità dell'ottimo.

Poiché $P \in C_{s,\alpha}([0, T]; H)$ l'operatore V risulta continuo. Di conseguenza si ha che $u^* \in C([0, T]; H)$. \square

3.3 Problema iperbolico

Consideriamo il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x \end{cases} \quad (3.24)$$

dove H è uno spazio di Hilbert reale, $u \in L^2(0, T; H)$, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ è il generatore di un semigruppoo $T(t)$ fortemente continuo, $B \in \mathcal{L}(H, D(A^*))$ o, equivalentemente, $B = (\lambda_0 I - A)D$ con $D \in \mathcal{L}(U, H)$ e $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Per il problema che andiamo ad affrontare supponiamo le seguenti ipotesi

$$\overline{\mathcal{H}}: \begin{cases} \text{detto } \omega_0 \text{ il tipo del semigruppoo } T(t), \text{ si ha } \lambda_0 > \omega_0, \\ \text{esiste una costante } K > 0 \text{ tale che, per ogni } x \in D(A^*), \\ \int_0^T \|D^* A^* T^*(s)x\|^2 ds \leq K^2 \|x\|^2. \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda parte dell'ipotesi ($\overline{\mathcal{H}}$) è equivalente a richiedere la continuità dell'operatore da $L^2(0, T; H)$ in $L^2(0, T; U)$ definito da

$$x \mapsto D^* A^* T^* x.$$

Mostriamo ora un esempio in cui viene verificata l'ipotesi ($\overline{\mathcal{H}}$).

Esempio 3.11. Sia $T \geq 2\pi$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} f_t(t, x) = f_x(t, x), & t \in [0, T], x \in [0, 2\pi] \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in [0, 2\pi] \\ f(t, 2\pi) = f(t, 0) + u(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.25)$$

Sia $H = L_p^2(\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni 2π -periodiche $L^2(0, 2\pi; \mathbb{R})$, e $U = \mathbb{R}$. Consideriamo l'operatore lineare A su H definito da

$$\begin{cases} Af = f_x, & \forall f \in D(A) \\ D(A) = W_p^{1,2}(\mathbb{R}) = \{f \in L_p^2(\mathbb{R}) : f_x \in L_p^2(\mathbb{R}), f(0) = f(2\pi)\} \end{cases} \quad (3.26)$$

A è il generatore del semigruppoo $T(t)$ di traslazioni

$$T(t)[f](x) = f(t+x), \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo che u sia differenziabile e consideriamo il seguente cambio di variabile

$$g(t, x) = f(t, x) - \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} u(t);$$

il sistema di stato (3.25) diventa

$$\begin{cases} g_t(t, x) = g_x(t, x) + \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} (u(t) - u'(t)), & t \in [0, T], x \in [0, 2\pi] \\ g(0, x) = f_0(x) - \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} u(0) = g_0(x), & x \in [0, 2\pi] \\ g(t, 2\pi) = g(t, 0), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.27)$$

Da questa forma possiamo passare a considerare il problema integrale associato

$$g(t, x) = T(t)[g_0](x) + \int_0^t T(t-s) \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} (u(s) - u'(s)) ds.$$

Integrando per parti otteniamo un'altra forma equivalente al problema di stato

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + (I - A)Du(t) \\ x(0) = x \end{cases} \quad (3.28)$$

dove $D \in \mathcal{L}(U, H)$ è definito da

$$D(a) = \phi(x) = a \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} (u(s) - u'(s)), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Se poniamo

$$z(x) = \frac{e^x}{e^{2\pi} - 1} (u(s) - u'(s))$$

allora $D^* \in \mathcal{L}(H, U)$ è definito da

$$D^*x = (x, z), \quad \forall x \in H.$$

Osserviamo inoltre che, se $f, g \in W_p^{1,2}(\mathbb{R})$

$$(Af, g) = \int_0^{2\pi} f'(x)g(x) dx = [f(2\pi)g(2\pi) - f(0)g(0)] - \int_0^{2\pi} f(x)g'(x) dx = -(f, A^*g)$$

quindi $A = -A^*$ su $D(A) = D(A^*)$.

Vediamo ora che vale per questo problema l'ipotesi sulla stima di $D^*A^*T^*(s)f$.

Siano $t, s \in [0, 2\pi]$ e $f \in D(A^*)$, allora si ha

$$\begin{aligned} D^*A^*T^*(s)f &= (A^*T^*(s)f, z) = (T^*(s)A^*f, z) = \\ &= (A^*f, T(s)z) = f(2\pi - s) - (f, T(s)z). \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} \int_0^t |D^*A^*T^*(s)f|^2 ds &\leq 2 \int_0^t |f(2\pi - s)|^2 ds + \\ &+ 2t \int_0^t |(f, T(s)z)|^2 ds \leq 2(1 + t^2|z|^2)|f|^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.12. *Sia $T(t)$ un semigruppoo fortemente continuo in un Banach X , generato da A . Allora*

$$A \int_0^t T(s)x ds = -x + T(t)x, \quad \forall x \in X.$$

In particolare, se $K = \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\|$, vale

$$\left\| A \int_0^t T(s)x ds \right\| \leq (1 + K)\|x\|.$$

Lemma 3.13. *Sia $u \in L^2(0, T; H)$ e*

$$z(t) = \int_0^t T(t-s)Du(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

allora $z(t) \in D(A)$ per ogni $t \in [0, T]$, $Az \in C([0, T]; H)$ e vale la disuguaglianza seguente

$$\|Az(t)\| \leq K\|u\|_{L^2(0, T; H)}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.29)$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(A^*)$ e fissiamo $t \in [0, T]$; abbiamo

$$(z(t), A^*x) = \int_0^t (T(t-s)Du(s), A^*x) ds = \int_0^t (u(s), D^*A^*T^*(t-s)x) ds,$$

allora si ha

$$\begin{aligned} |(z(t), A^*x)|^2 &\leq \|u\|_{L^2(0, T; H)}^2 \int_0^t \|D^*A^*T^*(t-s)x\|^2 ds \leq \\ &\leq K^2\|u\|_{L^2(0, T; H)}^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che l'operatore lineare da $D(A^*)$ in \mathbb{R} definito da $x \mapsto (z(t), A^*x)$ è limitato rispetto alla norma di H , dunque è estendibile per densità ad un elemento di H' . Per il teorema di Riesz esiste $y \in H$ tale che

$$(y, x) = (z(t), A^*x), \quad \forall x \in H$$

quindi $z(t) \in D(A)$.

Vediamo la seconda parte del lemma.

Poiché $C_0^1([0, T]; U)$ è denso in $L^2(0, T; U)$ esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni C^1 a supporto compatto convergente a u in L^2 .

Poniamo

$$z_n = \int_0^t T(t-s)D u_n(s) ds.$$

Osserviamo che z_n è la soluzione mild, e unica soluzione esistente, del problema

$$\begin{cases} z_n'(t) = Az_n(t) + Du_n(t), & t \in (0, T] \\ z_n(0) = 0 \in D(A). \end{cases} \quad (3.30)$$

Poiché $Du_n \in C^1([0, T]; H)$, per la proposizione 1.14, $z_n \in C([0, T]; D(A))$. Consideriamo $Az_n(t) \in C([0, T]; H)$. Per il lemma 3.13 esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\|Az(t) - Az_n(t)\|^2 \leq K \|u_n - u\|_{L^2(0, T; H)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

Si ha quindi che Az_n converge uniformemente su $[0, T]$ a Az , da cui la tesi. \square

Come nei capitoli precedenti, vogliamo minimizzare il funzionale quadratico

$$J(u) = \int_0^T \{\|Cx(t)\|^2 + \|u(t)\|_U^2\} dt + (P_0x(T), x(T)),$$

sullo spazio $L^2(0, T; H)$, soggetto al vincolo

$$x(t) = T(t)x + G(u)(t) = T(t)x + (\lambda_0 I - A) \int_0^t T(t-s) Du(s) ds. \quad (3.31)$$

L'operatore $C \in \mathcal{L}(H)$ e $P_0 \in \Sigma^+(H)$. Osserviamo che, per il lemma 3.13, $G \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H), C([0, T]; H))$.

Anche stavolta utilizziamo l'approccio della programmazione dinamica, però, a differenza delle altre volte, non potremo trovare una soluzione dell'equazione di Riccati se non considerandola come limite di soluzioni di problemi approssimanti.

L'equazione di Riccati in questo caso è data dal seguente sistema

$$\begin{cases} P'(t) = A^*P(t) + P(t)A^* - P(t)(D^*A^*)^*D^*A^*P(t) + C^*C, & t \in (0, T] \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Chiamiamo equazione di Riccati approssimante

$$\begin{cases} P'_n(t) = A_n^*P_n(t) + P_n(t)A_n - P_n(t)(D^*A_n^*)^*D^*A_n^*P_n(t) + C^*C, & t \in (0, T] \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (3.33)$$

dove $A_n = nAR(n, A)$ è l'approssimante di Yosida di A , e problema approssimante

$$\min_{u \in L^2(0, T; H)} J_n(u) = \min_{u \in L^2(0, T; H)} \int_0^T \{\|Cx_n(t)\|^2 + \|u(t)\|_U^2\} dt + (P_0x_n(T), x_n(T)), \quad (3.34)$$

soggetto al vincolo

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + A_n Du(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x. \end{cases} \quad (3.35)$$

L'idea è di dimostrare che $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in $C_s([0, T]; \Sigma(H))$ a un elemento P , che avrà l'usuale ruolo della soluzione mild dell'equazione di Riccati.

Per quanto riguarda la coppia ottima del problema, questa sarà ottenuta come limite, rispettivamente in $C([0, T]; H)$ e in $L^2([0, T; H])$, delle successioni

(x_n^*, u_n^*) .

Supponiamo per semplicità che P_0 sia invertibile e $\lambda_0 = 0$.

Consideriamo le seguenti equazioni di Riccati:

$$\begin{cases} Q' = -AQ - QA^* - QC^*CQ + (D^*A^*)^*D^*A^*, \\ Q(0) = P_0^{-1} \end{cases} \quad (3.36)$$

e

$$\begin{cases} Q'_n = -AQ_n - Q_nA^* - Q_nC^*CQ_n + (D^*A_n^*)^*D^*A_n^*, \\ Q_n(0) = P_0^{-1}, \end{cases} \quad (3.37)$$

Dato che $D^*A_n^* \in \mathcal{L}(H, U)$ possiamo applicare il teorema 2.25, il quale ci assicura che il problema (3.36) ha un'unica soluzione mild $Q \in C_s([0, T]; \Sigma(H))$ e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q \quad \text{in } C_s([0, T]; \Sigma(H))$$

e

$$Q_n(t) = P_n^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Quest'ultima affermazione si dimostra semplicemente osservando che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_n^{-1}(t) &= -P_n^{-1}(t)P'_n(t)P_n^{-1}(t) = \\ &= -P_n^{-1}(t)[A_n^*P_n(t) + P_n(t)A_n - P_n(t)(D^*A_n^*)^*D^*A_n^*P_n(t) + C^*C]P_n^{-1}(t) = \\ &= -P_n^{-1}(t)A_n^* - A_nP_n(t) + (D^*A_n^*)^*D^*A_n^* - P_n^{-1}(t)C^*CP_n(t). \end{aligned}$$

Teorema 3.14. *Sia P_n la soluzione mild del problema (3.33) e Q la soluzione mild di (3.36). Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad \text{in } C_s([0, T]; \Sigma(H)),$$

dove $P(t) = Q(t)^{-1}$ in $[0, T]$. Chiameremo P soluzione mild dell'equazione di Riccati (3.32).

Dimostrazione. Ricordiamo che la soluzione mild del problema (3.33) è espressa in forma implicita da

$$P_n(t) = e^{tA}P_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}C^*C ds - \int_0^t e^{(t-s)A}[V_n(s)E_nE_n^*V_n(s)] ds.$$

Osserviamo che per ogni $x \in H$

$$\begin{aligned} &\int_0^t (T^*(t-s)V_n(s)E_nE_n^*V_n(s)T(t-s)x, x) ds = \\ &= \int_0^t (E_n^*V_n(s)T(t-s)x, E_n^*V_n^*(s)T(t-s)x) ds \geq 0, \end{aligned}$$

essendo $P_n \in C_{s,\alpha}([0, T]; \Sigma(H))$. Quindi

$$P_n(t) \leq e^{tA}P_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}C^*C ds, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui si deduce che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|Q_n^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P_n(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema dell'applicazione aperta Q è invertibile e la sua inversa è un elemento di $\mathcal{L}(H)$. Osserviamo che vale la seguente identità

$$Q^{-1}(t) - P_n(t) = P_n(t)[Q_n(t) - Q(t)]Q^{-1}(t),$$

quindi

$$\begin{aligned} \|Q^{-1}(t) - P_n(t)\|_{\mathcal{L}(H)} &= \|P_n(t)[Q_n(t) - Q(t)]Q^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \\ &\leq C\|Q^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\|Q_n(t) - Q(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Teorema 3.15. *Sia (x_n^*, u_n^*) la coppia ottima per il problema approssimante (3.34), allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = x^* \text{ in } C([0, T]; H), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^* = u^* \text{ in } L^2(0, T; H)$$

Dimostrazione. Sia $u \in L^2(0, T; H)$, x data dall'espressione (3.31) e x_n soluzione mild di (3.35), cioè

$$x_n(t) = T(t)x + nR(n, A)G(u)(t) = T(t)x - AnR(n, A) \int_0^t T(t-s)Du(s) ds.$$

La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x in $C([0, T]; H)$ per la proposizione 3.3; Dall'identità fondamentale (3.20) si ha

$$\begin{aligned} (P_n(t)x, x) + \int_0^t \|u(s) + D^*A_n^*P_n(T-s)x_n(s)\|_U^2 ds &= \\ = (P_0x_n(T), x_n(T)) + \int_0^T \{\|Cx_n(s)\|^2 + \|u(s)\|_U^2\} ds &= J_n(u). \end{aligned}$$

Se nell'espressione sopra poniamo $u = u_n^*$, otteniamo, grazie alla formula di feedback,

$$(P_n(T)x, x) = (P_0x_n^*(T), x_n^*(T)) + \int_0^T \{|Cx_n^*(s)|^2 + |u_n^*(s)|^2\} ds \leq J_n(u) \quad (3.38)$$

per ogni $u \in L^2(0, T; U)$. Ricordiamo che

$$x_n^*(t) = T(t)x - A_n \int_0^t T(t-s)Du_n^*(s) ds.$$

Passando al limite e considerando che

$$(P_n(T)x, x) \rightarrow (P(T)x, x)$$

poiché $P_n(\cdot)x \rightarrow P(\cdot)x$ in $C([0, T]; H)$, si ottiene

$$(P(T)x, x) \leq J(u), \quad \forall u \in L^2(0, T; H).$$

Dall'espressione (3.38) si ha che $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(0, T; H)$, quindi esiste una sottosuccessione $(u_{n_k}^*)$ debolmente convergente a un elemento $\bar{u} \in L^2(0, T; H)$. Poiché G è limitato $G(u_{n_k}^*) \rightharpoonup G(\bar{u})$ in $L^2(0, T; H)$. Se

$$\bar{x}(t) = T(t)x + G(\bar{u}(t))$$

allora

$$x_{n_k}^* - \bar{x} = G(u_{n_k}^*) - G(\bar{u})$$

quindi $x_{n_k}^* \rightharpoonup \bar{x}$ in $L^2(0, T; H)$.

Proviamo che $(P_0 x_{n_k}^*(T), x_{n_k}^*(T)) \rightharpoonup (P_0 \bar{x}(T), \bar{x}(T))$. In particolare proviamo che $x_{n_k}^*(T) \rightharpoonup \bar{x}(T)$.

Siano

$$y = \int_0^T T(T-s)Du^*(s)ds \in H, \quad y_{n_k} = \int_0^T T(T-s)Du_{n_k}^*(s)ds \in H.$$

Dalla convergenza debole delle $u_{n_k}^*$ si ha che y_{n_k} converge debolmente a y in H , infatti, se $h \in H$

$$\begin{aligned} (y_{n_k} - y, h) &= \left(\int_0^T T(T-s)D(u_{n_k}^* - u^*)(s)ds, h \right) = \\ &= \int_0^T ((u_{n_k}^* - u^*)(s), D^*T^*(T-s)h)ds = ((u_{n_k}^* - u^*)(s), D^*T^*(T-s)h)_{L^2(0, T; U)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $A_{n_k}y_{n_k} - Ay = x_{n_k}^*(T) - \bar{x}(T)$.

Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|A_{n_k}y_{n_k}\| \leq \int_0^T \sup_{n \in \mathbb{N}} \|nR(n, A)\|_{\mathcal{L}(H)}(t-s)^{\alpha-1} \|A^\alpha Du_n^*(s)\| ds < C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $h \in H$ e fissiamo $\epsilon > 0$. Sia $h_\epsilon \in D(A^*)$ tale che $\|h - h_\epsilon\| < \epsilon$.

$$|(A_{n_k}y_{n_k} - Ay, h)| \leq |(A_{n_k}y_{n_k} - Ay, h - h_\epsilon)| + |(nR(n, A)y_{n_k} - y, A^*h_\epsilon)| = (1) + (2).$$

Vediamo come stimare questi addendi.

$$(1) \leq |(A_{n_k}y_{n_k}, h - h_\epsilon)| + |(Ay, h - h_\epsilon)| \leq C\epsilon + \|Ay\|\epsilon.$$

Per stimare (2) sarà sufficiente dimostrare che se $y_n \rightharpoonup y$, allora $nR(n, A)y_n \rightharpoonup y$. Sia $x \in H$ e $\epsilon > 0$ fissato. Per densità esiste $x_\epsilon \in D(A^*)$ tale che $\|x - x_\epsilon\| < \epsilon$. Sia ν tale che per ogni $n \geq \nu$ $|(y_n - y, x)| < \epsilon$, allora

$$\begin{aligned} |(nR(n, A)y_n - y, x)| &\leq |(y_n - y, x)| + |(AR(n, A)y_n, x - x_\epsilon)| + \\ &+ |R(n, A)y_n, A^*x_\epsilon| \leq \epsilon + \frac{C\epsilon}{n} + \frac{\|A^*x_\epsilon\|}{n}, \quad n \geq \nu. \end{aligned}$$

Per la semicontinuità inferiore nella topologia debole delle norme di $L^2(0, T; H)$, $L^2(0, T; U)$ e per la convergenza debole di $(P_0 x_{n_k}^*(T), x_{n_k}^*(T))$ si ha, passando al limite in (3.38),

$$(P(T)x, x) \geq J(\bar{u}),$$

quindi $\bar{u} = u^*$ e $\bar{x} = x^*$.

Resta da provare che u_n^* converge forte in $L^2(0, T; U)$ a $\bar{u} = u^*$.

Consideriamo lo spazio prodotto

$$Z = L^2(0, T; U) \times L^2(0, T; H) \times H$$

dotato della norma

$$\|(u, v, w)\|_Z^2 = \|u\|_{L^2(0, T; U)}^2 + \|v\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|\sqrt{P_0}w\|,$$

dove $\sqrt{P_0}$ è la potenza frazionaria $P_0^{\frac{1}{2}}$. Osserviamo che P_0 è invertibile e positivo, $P_0^{-\frac{1}{2}}$ è l'inversa di $P_0^{\frac{1}{2}}$ e la radice di un operatore positivo è ancora positiva. Essendo P_0 coercivo è facile vedere che la norma definita da $(P_0 x, x) = \|\sqrt{P_0}x\|^2$ è equivalente a quella di H .

Per la semicontinuità debole della norma di Z si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_n^*, x_n^*, x_n^*(T))\|_Z &\leq \\ &\leq J(u^*) = \|(u^*, x^*, \sqrt{P_0}x^*(T))\|_Z \end{aligned}$$

e, poiché u^* è punto di minimo, vale l'uguaglianza. Allora le successioni delle norme convergono, quindi si ha convergenza forte in Z .

Dimostriamo che la successione $x_{n_k}^*$ converge in $C([0, T]; H)$ a \bar{x} .

$$\begin{aligned} \|x_{n_k}^*(t) - \bar{x}(t)\| &= \|A_{n_k} \int_0^t T(t-s) D u_{n_k}^*(s) ds - A \int_0^t T(t-s) D \bar{u}(s) ds\| \leq \\ &\leq \|A_{n_k}\| \left\| \int_0^t T(t-s) D [u_{n_k}^*(s) - \bar{u}(s)] ds \right\| + \|(A - A_{n_k}) \int_0^t T(t-s) D \bar{u}(s) ds\| \leq \\ &\leq C \left\| \int_0^t T(t-s) D [u_{n_k}^*(s) - \bar{u}(s)] ds \right\| + \|(A - A_{n_k}) \int_0^t T(t-s) D \bar{u}(s) ds\| \leq \\ &\leq CM \|D\|_{\mathcal{L}(U, H)} \|e^{\omega(t-\cdot)}\|_{\infty} \|u_{n_k}^* - \bar{u}\|_{L^2(0, T; U)} + \|(A - A_{n_k}) \int_0^t T(t-s) D \bar{u}(s) ds\|. \end{aligned}$$

Usando gli stessi argomenti della dimostrazione della proposizione 3.3 e dalla convergenza forte in $L^2(0, T; U)$ delle $u_{n_k}^*$ possiamo concludere. \square

3.4 Un controesempio

In conclusione, mostriamo un problema parabolico in cui, anche se l'operatore $P_0 \in \Sigma^+(H)$, non esiste un controllo ottimo. Lo facciamo seguendo un esempio riportato da I. Lasiecka e R. Triggiani nel libro [7] e definito nei dettagli da F. Flandoli nell'articolo [6].

In questa tesi abbiamo fornito solamente alcune condizioni sufficienti per l'esistenza di una coppia ottima nel caso di controlli al bordo, ma, per parlare di un controesempio, dovremo utilizzare una condizione necessaria per l'esistenza di un controllo. Sfrutteremo dunque un risultato per il quale diamo come riferimento pagina 8 di [7] (teorema 2.1).

Diamo prima delle definizioni e un lemma che useremo nello svolgimento dell'esempio.

Definizione 3.16. Sia X uno spazio di Banach e $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un operatore lineare. Si dice che A ha un'estensione chiusa se esiste un operatore lineare $B: D(B) \subset X \rightarrow X$ tale che

1. $D(A) \subset D(B)$ e B coincide con A su $D(A)$;
2. $\overline{G(A)} = G(B)$.

Ovviamente gli operatori chiusi hanno un'estensione chiusa. Osserviamo che A ha un'estensione chiusa se e solo se per ogni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_n \rightarrow 0$ e $Ax_n \rightarrow y$ si verifica che $y = 0$.

Esistono operatori che non la possiedono come mostrato nel seguente lemma.

Lemma 3.17. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach reale e $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un operatore lineare illimitato con immagine finito dimensionale, cioè $\dim R(A) < \infty$. Allora A non ha un'estensione chiusa.

Dimostrazione. Supponiamo per comodità che $\dim R(A) = 1$ e $R(A) = \{z\}$ per qualche $z \in X$ tale che $\|z\| = 1$. Poiché A è illimitato esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\|x_n\| \leq \frac{1}{n}$ e $\|Ax_n\| > 1$. Sia $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ e proviamo che y non può essere zero.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $Ax_n = a_n z$ per qualche $a_n \in \mathbb{R}$ e $y = az$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Dato che $\|Ax_n\| \rightarrow \|y\|$ si ha $|a_n| \rightarrow |a|$. Per l'illimitatezza di A e per il fatto che $\|z\| = 1$ abbiamo che $|a_n| > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $|a| > 1$ e $\|y\| > 1$. \square

Esempio 3.18. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con frontiera $\partial\Omega$ regolare.

Consideriamo il seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{u \in L^2([0, T] \times \partial\Omega)} J(u),$$

dove

$$J(u) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(t, \sigma)|^2 d\sigma dt + (P_0 f(T, \cdot), f(T, \cdot)),$$

e $P_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ è definito da

$$P_0 z = (z, \phi)_{L^2(\Omega)} \phi$$

con $\phi \in L^2(\Omega)$, che selezioneremo, soggetto al vincolo

$$\begin{cases} f_t(x, t) = \Delta f(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ f(0, x) = 0, & x \in \Omega, \\ f(t, x) = u(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.39)$$

dove $f_0 \in L^2(\Omega)$ e

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

è l'operatore di Laplace.

Osserviamo che il vincolo del problema è lo stesso presente nell'esempio 3.1. Come già abbiamo visto, possiamo riportare il problema nella formulazione astratta considerando la realizzazione del laplaciano A , B l'operatore $[-A]^{1-\alpha}[A]^\alpha D$ per qualche $\alpha \in (0, 1)$ e D la mappa di Dirichlet definita nell'esempio 3.1.

Poniamo $H = L^2(\Omega)$ e $U = L^2(\partial\Omega)$.

In questo esempio l'operatore C è nullo e P_0 è simmetrico, coercivo e vale

$$P_0 = P_0^2,$$

da cui si deduce che $\sqrt{P_0} = P_0$.

Prima di dimostrare che questo problema non ammette un controllo ottimo nello spazio $L^2(0, T; U)$, verifichiamo che esso, a seconda della scelta della funzione ϕ , non rientra sotto le ipotesi $(\mathcal{H}) - (\hat{\mathcal{H}})$.

Come osservato nell'esempio 3.1 l'ipotesi (\mathcal{H}) , riguardante l'operatore D , viene soddisfatta per $\alpha \leq \frac{1}{4}$; quindi ci troviamo nel caso $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Verifichiamo allora che non vale l'ipotesi aggiuntiva $(\hat{\mathcal{H}})$ che ci garantirebbe l'esistenza di una coppia ottima.

Osserviamo che $A^* = A$ e il fattore β dell'ipotesi $(\hat{\mathcal{H}})$ dovrebbe appartenere all'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Sia $x \in D([-A]^\beta)$, allora

$$P_0([-A]^\beta x) = ([-A]^\beta x, \phi)_{L^2(\Omega)} \phi.$$

e poiché $\beta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,

$$D([-A]^\beta) = H_0^{2\beta}(\Omega).$$

Quindi scegliendo ad esempio $\phi \in L^2(\Omega)$ con traccia non nulla già avremmo che $P_0([-A]^\beta x) \notin D([-A]^\beta) = D([-A^*]^\beta)$, quindi usciremo dalle ipotesi del problema.

Sia $L_T: U \rightarrow H$ indichiamo il funzionale definito da

$$L_T(u) = \int_0^T T(T-s)Bu(s) ds.$$

I. Lasiecka e R. Triggiani dimostrano in [7] che, sotto le ipotesi (\mathcal{H}) , se l'operatore $\sqrt{P_0}L_T$ ammette un'estensione chiusa, allora esiste una e una sola coppia ottima per il problema parabolico.

Dimostriamo nel seguente lemma che l'ipotesi di estensione chiusa dell'operatore $\sqrt{P_0}L_T$ è più debole delle ipotesi $(\mathcal{H}) - (\hat{\mathcal{H}})$.

Lemma 3.19. *Se valgono $(\mathcal{H}) - (\hat{\mathcal{H}})$ allora l'operatore*

$$\sqrt{P_0}L_T: D(\sqrt{P_0}L_T) \subset L^2(0, T; U) \rightarrow H$$

ha un'estensione chiusa.

Dimostrazione. Fissiamo $\beta \in \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{(1-\alpha)}{2}\right]$, per ipotesi l'applicazione da $D(-A^\beta)$ in H definita da

$$x \mapsto (-[A^*]^\beta)P_0(-A^\beta)x$$

è continua. Allora risulta continua l'applicazione $\sqrt{P_0}(-A^\beta)$ da $D(\sqrt{P_0}(-A^\beta))$ in H definita da

$$x \mapsto (P_0(-A^\beta)x, (-A^\beta)x).$$

Consideriamo l'operatore

$$\sqrt{P_0}L_T: D(\sqrt{P_0}L_T) \subset L^2(0, T; U) \rightarrow H.$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$\sqrt{P_0}L_T(u) = \sqrt{P_0}(-A^\beta)(-[A]^{(1-\alpha)-\beta}) \int_0^T T(T-s)A^\alpha Du(s) ds,$$

allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\|\sqrt{P_0}L_T(u)\| \leq \|\sqrt{P_0}(-A^\beta)\| \|A^\alpha D\|_{\mathcal{L}(U, H)} M \left(\int_0^T (t-s)^{2[\beta-(1-\alpha)]} ds \right) \|u\|_{L^2(0, T; U)}.$$

Poiché $2[\beta - (1 - \alpha)] + 1 > 0$, la funzione $s \rightarrow (t - s)^{2[\beta - (1 - \alpha)]}$ è integrabile su $[0, T]$ e quindi esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\|\sqrt{P_0}L_T(u)\| \leq K \|u\|_{L^2(0, T; U)}, \quad \forall u \in D(\sqrt{P_0}L_T).$$

Da cui si deduce che $\sqrt{P_0}L_T$ è chiuso sul suo dominio. \square

Osservazione 3.20. Nel nostro caso $B = -[A]^{1-\alpha}A^\alpha D$ e dunque

$$\sqrt{P_0}L_T(u) = \sqrt{P_0}(-A)^{1-\alpha} \int_0^T T(T-s)A^\alpha Du(s) ds.$$

Vediamo che è possibile scegliere una $\phi \in L^2(\Omega)$ tale che l'operatore $\sqrt{P_0}L_T$ non abbia un'estensione chiusa.

J. L. Lions dimostra in [8] che esiste $u \in L^2(0, T; U)$ tale che

$$L_T(u) = A^{1-\alpha} \int_0^T T(T-s)(-A^\alpha)Du(s) ds \notin H.$$

Vediamo che ciò implica l'esistenza di una $\phi \in L^2(\Omega)$, $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 1$ tale che

$$\int_0^T \|B^*T^*(T-t)\phi\|_U^2 dt = \infty. \quad (3.40)$$

Se una tale funzione non esistesse allora sarebbe ben definita e continua l'applicazione da H in $L^2(0, T; U)$ definita da

$$\phi \mapsto B^*T^*(T-t)\phi.$$

Allora per ogni $u \in L^2(0, T; U)$ avremmo che

$$(A^{-1}L_T(u), Ax) \leq \|B^*T^*(T-\cdot)\|_{L^2(0, T; U)} \|u\|_{L^2(0, T; U)},$$

quindi $A^{-1}L_T(u) \in D(A)$, equivalentemente $L_T(u) \in D(A)$, per ogni $u \in L^2(0, T; U)$.

Quindi esiste una $\phi \in L^2(\Omega)$ che verifica (3.40) e ciò implica che $\sqrt{P_0}L_T$ è illimitato. Per il lemma 3.17 $\sqrt{P_0}L_T$ non possiede un'estensione chiusa.

Mostriamo infine che nel problema di controllo del nostro esempio, con ϕ scelta come nell'osservazione 3.20, non esiste un controllo ottimo.

Supponiamo per assurdo che esista $u^* \in L^2(0, T; U)$. Il teorema 2.1 (pag. 8) di [7] ci fornisce facilmente la condizione necessaria per questo caso

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -B^*T^*(T-t)P_0x^*(T) = \\ &= - \left(\int_0^T (u^*(s), B^*T^*(T-s)\phi)_{L^2(\Omega)} ds \right) B^*T^*(T-t)\phi; \end{aligned}$$

a questo punto osserviamo che $B^*T^*(T-t)\phi \notin L^2(0, T; U)$ per (3.40), quindi $u^* \notin L^2(0, T; U)$, il che è assurdo.

Appendice

Potenze frazionarie di operatori lineari

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Definizione .21. Definiamo il tipo di un semigruppoo fortemente continuo $T(t)$ come la quantità

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 \text{ tale che } \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \forall t \geq 0\} \in [-\infty, +\infty)$$

Osservazione .22. Sia A generatore di un semigruppoo fortemente continuo $T(t)$ di tipo ω_0 e sia $\lambda_0 > \omega_0$.

L'operatore $A - \lambda_0 I$ genera il semigruppoo $S(t) = e^{-\lambda_0 t} T(t)$ e anch'esso risulta fortemente continuo. Osserviamo che il tipo di $S(t)$ è negativo, perchè:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda_0 t} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\omega_0 - \lambda_0)t}$$

Introduciamo una classe di operatori per cui sarà semplice definire il concetto di potenza frazionaria.

Definizione .23. Un operatore lineare $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ si dice positivo se $\rho(A)$ contiene il semipiano $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \leq 0\}$ ed esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \geq 0.$$

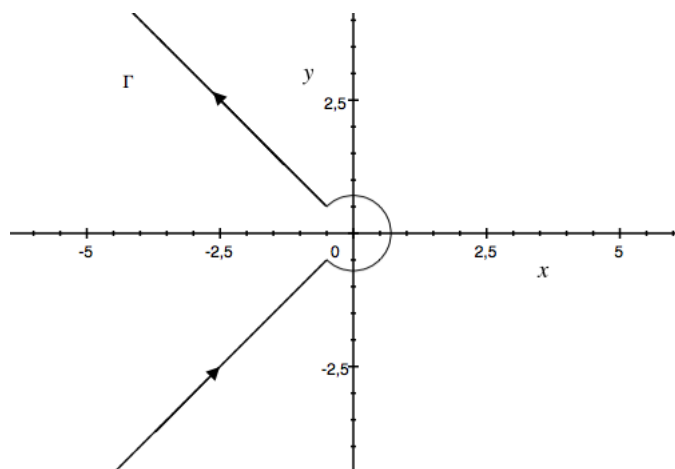
Osserviamo che se A è positivo, essendo $\rho(A)$ aperto, esiste un intorno V di 0 contenuto interamente in $\rho(A)$. Inoltre per il teorema di Hille-Yosida un operatore positivo genera un semigruppoo fortemente continuo.

Osservazione .24. Se A è il generatore di un semigruppoo analitico $T(t)$ di tipo $\omega_0 < 0$ allora $-A$ è positivo, infatti

$$-R(-\lambda, -A) = R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds.$$

Definizione .25. Sia A un operatore positivo e sia $k > 0$. Definiamo la potenza k -esima di A come

$$A^{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-k} R(\lambda, A) d\lambda \quad (41)$$



dove

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \theta, |z| > r\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) < \theta, |z| = r\}$$

per qualche $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $r > 0$ tale che Γ sia contenuto interamente in $\rho(A)$.

Tale cammino si percorre in senso antiorario ed evita il semiasse dei reali negativi e l'origine.

Osserviamo che $\lambda^k = e^{-k \log \lambda}$, quindi bisogna specificare, nel caso l'esponente non sia naturale, l'insieme di definizione scelto per il logaritmo complesso. Scegliamo di escludere la semiretta dei reali negativi e l'origine dal piano complesso. Inoltre notiamo che il cammino Γ può essere scelto in una classe di cammini senza rendere mal definita la potenza frazionaria.

Osservazione .26. Se k è un intero positivo l'integrando di (41) è olomorfo su $\mathbb{C} - \{0\}$; allora si considerano i cammini

$$\gamma_N = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \theta, N > |z| > r\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) < \theta, |z| = r\}$$

e chiudiamo tali cammini con l'arco di circonferenza di centro 0 e raggio $N \in \mathbb{N}$. Questi cammini chiusi sono omotopi a una circonferenza centrata nell'origine e quindi gli integrali su questi cammini chiusi sono tutti uguali. In particolare sono tutti uguali ad A^n , in senso classico.

Passando al limite di N all'infinito si ottiene la coincidenza di potenza n -esima con quella classica.

Proposizione .27. $A^{-k} \in \mathcal{L}(X)$ per ogni $k > 0$, indipendentemente dai valori di r e θ .

Dimostrazione. L'integrando in (41) è olomorfo su $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, inoltre vale

$$\begin{aligned} \|A^{-k}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty \rho^{-k} e^{-i\theta k} R(A, \rho e^{-i\theta}) e^{-i\theta} d\rho \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \\ &+ \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta}^\theta r^{-k} e^{i\eta k} R(A, r e^{i\eta}) r i e^{i\eta} d\eta \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \\ &+ \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_r^\infty \rho^{-k} e^{i\theta k} R(A, \rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_r^\infty \rho^{-k} \frac{M}{1+\rho} d\rho + M \frac{\theta}{\pi} \frac{r^k}{1+r} < \infty \end{aligned}$$

□

Lemma .28. Per ogni $k, s \geq 0$

$$A^{-(k+s)} = A^{-k} A^{-s}$$

Dimostrazione. Usando l'identità del risolvente

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A)$$

e il teorema di Fubini si ha, a meno di moltiplicare per un fattore complesso

$$\begin{aligned} A^{-k} A^{-s} &= \int_{\Gamma_1} \lambda^{-k} R(\lambda, A) \left(\int_{\Gamma_2} w^{-s} R(w, A) dw \right) d\lambda = \\ &= \int_{\Gamma_1} \lambda^{-k} R(\lambda, A) \left(\int_{\Gamma_2} \frac{w^{-s}}{\lambda - w} dw \right) d\lambda - \int_{\Gamma_2} w^{-s} R(w, A) \left(\int_{\Gamma_1} \frac{\lambda^{-k}}{w - \lambda} d\lambda \right) dw \end{aligned}$$

Supponiamo che i cammini Γ_2 e Γ_1 siano come in figura 3.4, allora

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\lambda^{-k}}{w - \lambda} d\lambda = 0$$

mentre

$$\int_{\Gamma_2} \frac{w^{-s}}{\lambda - w} dw = \lambda^{-s},$$

ottenuti chiudendo i cammini e passando al limite come sempre. Allora

$$A^{-k} A^{-s} = \int_{\Gamma_1} \lambda^{-(k+s)} R(\lambda, A) d\lambda = A^{-(k+s)}$$

□

Lemma .29. A^{-k} è iniettiva.

Dimostrazione. A^{-1} è iniettiva poichè $0 \in \rho(A)$, allora A^{-n} è iniettiva per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $A^{-k}x = 0$, poichè $A^{-n} = A^{-n+k}A^{-k}x = 0$ allora $x = 0$. □

Definizione .30. Definiamo per $k > 0$ la potenza frazionaria A^k : $D(A^{-k}) = R(A^{-k}) \rightarrow H$ come l'inverso di A^{-k} e poniamo $A^0 = I$.

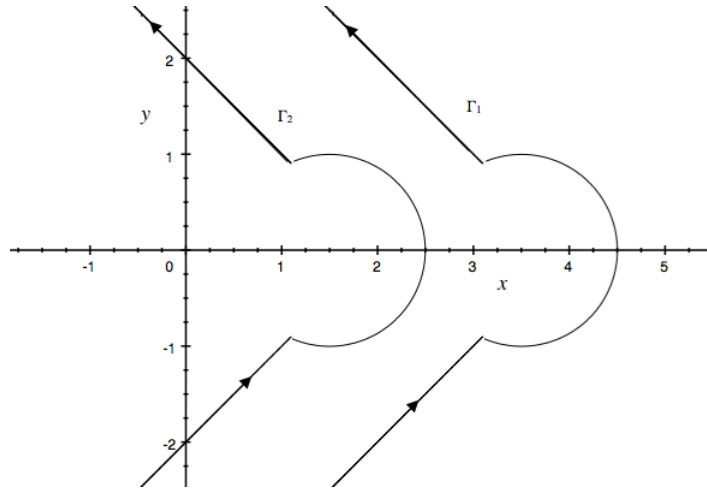


Figura 1: Rappresentazione dei cammini Γ_1 e Γ_2 del lemma .28

Osservazione .31. Osserviamo che se 0 appartiene all'insieme risolvente di un operatore A allora A è chiuso: infatti se $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, essendo A^{-1} continuo, $x_n = A^{-1}Ax_n \rightarrow (A)^{-1}y$, da cui $y = Ax$.

Da questa osservazione si deduce che A^k è chiuso per ogni $k > 0$. Vediamo ora che $D(A^k)$ è denso per ogni $k > 0$. Abbiamo bisogno prima del seguente

Teorema .32. *Se A genera un semigrupp fortemente continuo $T(t)$ su uno spazio di Banach X , allora $D(A^n)$ è denso in H per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Sia ϕ un'arbitraria funzione di classe C^∞ su \mathbb{R} a supporto compatto contenuto in $(0, \infty)$. Poniamo $V = C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Fissiamo $x \in H$ e definiamo

$$x_\phi = \int_0^\infty \phi(s)T(s)x ds.$$

Vediamo che $x_\phi \in D(A)$, infatti

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} x_\phi &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \phi(s)[T(s+h) - T(s)]x ds = \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty [\phi(s-h) - \phi(s)]T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h \phi(s)T(s)x ds = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [\phi(s-h) - \phi(s)]T(s)x ds - \\ &- \frac{1}{h} \int_0^h \phi(s)T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h [\phi(s-h) - \phi(s)]T(s)x ds = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [\phi(s-h) - \phi(s)]T(s)x ds \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che sulla semiretta negativa ϕ è nulla.

Indichiamo con $supp(\phi)$ la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}$. L'integrando converge puntualmente a $-\phi'(s)T(s)x$ ed è dominato dalla funzione integrabile

$$s \rightarrow \max_{s \in supp(\phi)} \|T(s)x\| \|\phi'\|_{\infty} I_{supp(\phi)}(s)$$

quindi, per convergenza dominata, si ha $x_{\phi} \in D(A)$ e

$$Ax_{\phi} = - \int_0^{\infty} \phi'(s)T(s)x ds.$$

Iterando allo stesso modo otteniamo che $x_{\phi} \in D(A^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$A^n x_{\phi} = (-1)^n \int_0^{\infty} \phi^{(n)}(s)T(s)x ds$$

Sia D lo spazio generato dagli elementi dell'insieme

$$\{x_{\phi} : x \in H, \phi \in V\}$$

Supponiamo ora che esista $y \in (\overline{D})^c$; allora per il teorema di Hahn-Banach esiste $L \in X^*$ tale che $Ly \neq 0$ e $Lz = 0$ per ogni $z \in D$.

Consideriamo il funzionale lineare su $C_0^{\infty}((0, \infty))$

$$P_x(\phi) = \int_0^{\infty} \phi(s)L(T(s)x) ds$$

Ora osserviamo che

$$0 = Lx_{\phi} = P_x(\phi), \quad \forall x \in X, \forall \phi \in V;$$

dato che V è denso in $C_0^{\infty}((0, \infty))$, P_x è nullo per ogni x , cioè

$$L(T(s)x) = 0, \quad q.o \quad \forall x \in X,$$

ma la funzione $s \rightarrow L(T(s)x)$ è continua e coincide su un denso (il complementare dell'insieme di misura nulla) con la funzione nulla; quindi è zero su tutto $(0, \infty)$. Infine, sempre per continuità si ha

$$L(x) = L(T(0)x) = 0 \quad \forall x \in X$$

contro l'ipotesi $Ly \neq 0$. □

Corollario .33. $D(A^k)$ è denso in H per ogni $k > 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che se $r > s > 0$ allora $D(A^r) \subset D(A^s)$.

Dal lemma .28 si ha che $A^{-r} = A^{-s}A^{-(r-s)}$, quindi $D(A^r) = R(A^{-r}) \subset R(A^{-s}) = D(A^s)$.

Fissato $k > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > k$ e quindi $D(A^n) \subset D(A^k)$. □

Proposizione .34. Se $r, s > 0$, per ogni $x \in D(A^{r+s})$ si ha

$$A^{r+s}x = A^r A^s x.$$

Dimostrazione. Sia $x \in D(A^r A^s)$, allora $x \in D(A^s)$ e $Ax \in D(A^r)$. Poniamo $y = A^r A^s x$, allora

$$x = A^{-s} A^{-r} y = A^{-(r+s)} y,$$

quindi $x \in D(A^{r+s})$ e

$$A^{r+s} x = y = A^r A^s x.$$

Analogamente se $x \in D(A^{r+s})$ allora $x \in D(A^r A^s)$ e vale $A^{r+s} = A^r A^s$. \square

Osservazione .35. Supponiamo ora che A sia il generatore di un semigruppone analitico $T(t)$ di tipo ω_0 , non necessariamente negativo. Per le osservazioni .24 e .22, se $\lambda_0 > \omega_0$ l'operatore $\lambda_0 I - A$ è positivo.

L'operatore di Laplace

Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di \mathbb{R}^N con frontiera di classe C^1 . Denotiamo con A la realizzazione dell'operatore di Laplace, ovvero

$$\begin{cases} Af = \Delta f \\ D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Per noti risultati sui problemi di Dirichlet con condizione nulla al bordo sappiamo che A è invertibile. Quindi $0 \in \rho(A)$ e per l'osservazione .31 A risulta chiuso. Inoltre $D(A)$ è denso in $L^2(\Omega)$.

Proposizione .36. *L'operatore A è simmetrico e strettamente negativo.*

Dimostrazione. Siano $f \in D(A)$ e $g \in H_0^1(\Omega)$. Allora

$$(Af, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \Delta f g \, dx.$$

Per la formula di Gauss-Green si ha che

$$\int_{\Omega} \Delta f g \, dx = \int_{\partial\Omega} g \left(\frac{\partial}{\partial \nu} f \right) dS - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx.$$

Poiché $g \in H_0^1(\Omega)$, essa si annulla sulla frontiera $\partial\Omega$. Quindi vale

$$\int_{\Omega} \Delta f g \, dx = - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx.$$

Consideriamo l'applicazione lineare $\varphi: D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(f) = (\Delta f, g)_{L^2(\Omega)} = (\nabla f, \nabla g)_{L^2(\Omega)}.$$

Tale applicazione è limitata, infatti, considerando in $H_0^1(\Omega)$ l'equivalenza tra la norma $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ e la norma di $L^2(\Omega)$, esiste una costante C tale che

$$|\varphi(f)| \leq C \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per il teorema di Riesz allora esiste $h \in D(A)$ tale che

$$(\Delta f, g)_{L^2(\Omega)} = (f, h)_{L^2(\Omega)},$$

quindi $D(A) \subset H_0^1(\Omega) \subset D(A^*)$.

Per quanto riguarda la negatività, basta osservare che

$$-(Af, f)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \geq 0, \quad \forall f \in D(A).$$

□

Proposizione .37. *L'operatore A è autoaggiunto in $L^2(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per la proposizione .36 $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^* = A$ su $D(A)$.

Proviamo che $D(A^*) \subset D(A)$.

Sia $f \in D(A^*)$ e sia $h = A^*f \in L^2(\Omega)$. Se $g \in D(A)$, per definizione

$$\int_{\Omega} hg dx = (A^*f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f \Delta g dx, \quad \forall g \in D(A). \quad (42)$$

In particolare, l'espressione (42) vale per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$; allora Δf (inteso come distribuzione) appartiene a $L^2(\Omega)$. Vediamo come questo fatto ci porti a concludere che $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Consideriamo l'unica soluzione $f_0 \in D(A)$ del problema di Dirichlet con condizioni nulle al bordo, cioè

$$\begin{cases} \Delta f = h & \text{in } \Omega \\ f = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $g \in D(A)$,

$$\int_{\Omega} f \Delta g dx = \int_{\Omega} hg dx = \int_{\Omega} \Delta f_0 g dx = \int_{\Omega} f_0 \Delta g dx.$$

Allora

$$\int_{\Omega} (f - f_0)g dx = 0 \quad g \in D(A),$$

ma, poiché $A(D(A)) = L^2(\Omega)$, risulta $f = f_0$. Quindi $f \in D(A)$ e, in particolare,

$$A^*f = h = \Delta f_0 = \Delta f.$$

□

Dal seguente teorema deduciamo che la realizzazione dell'operatore di Laplace genera un semigruppato analitico.

Definizione .38. Un operatore $A: D(A) \subset H \rightarrow H$, dove H è uno spazio di Hilbert, si dice dissipativo se

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in D(A),$$

o equivalentemente se

$$\Re(Ax, x) \leq 0 \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema .39. (Lumer-Phillips) Sia X uno spazio di Banach e $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un operatore chiuso e dissipativo. Allora sono equivalenti

1. A genera un semigruppato di contrazioni;
2. $\overline{R(\lambda I - A)} = X$ per qualche $\lambda > 0$.

Corollario .40. Sia $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineare, densamente definito in uno spazio di Banach X . Se A e A^* sono dissipativi, allora la chiusura di A genera un semigruppato di contrazioni.

Teorema .41. Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ lineare, chiuso, autoaggiunto e tale che esista un $\omega > 0$ per cui

$$((A - \omega I)x, x) \leq \omega \|x\|^2, \quad \forall x \in D(A).$$

Allora A genera un semigruppato analitico.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in passi.

Passo 1: A genera un semigruppato fortemente continuo. Infatti $A - \omega I$ è dissipativo, chiuso e autoaggiunto; la tesi segue allora dal corollario .40. In particolare, possiamo notare che $\rho(A)$ contiene l'insieme

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}, \omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2}\}$$

Passo 2: mostriamo che se $\lambda \in \Sigma_{\pi, \omega}$ e $\Re(\lambda) \leq \omega$, allora $\lambda \in \rho(A)$. Se $x \in D(A)$ e $\lambda x - Ax = y$, si ha

$$\lambda \|x\|^2 - (Ax, x) = (y, x),$$

quindi, poiché $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ per ipotesi,

$$\|x\| \leq \frac{1}{|\Im(\lambda)|} \|\lambda x - Ax\| \quad \forall x \in D(A), \quad (43)$$

da cui $\lambda I - A$ è iniettivo. Vediamo che $\overline{R(\lambda I - A)} = X$.

Se $z \in X$ è tale che

$$(z, \lambda x - Ax) = 0 \quad \forall x \in D(A)$$

allora $z \in D(A^*)$ e

$$(\bar{\lambda}z - A^*z, x) = 0 \quad \forall x \in D(A),$$

da cui $\bar{\lambda}z - A^*z = \bar{\lambda}z - Az = 0$. Osserviamo che anche $\bar{\lambda} \in \Sigma_{\pi, \omega}$ e $\Re(\bar{\lambda}) = \Re(\lambda)$, quindi $\bar{\lambda}I - A$ è iniettivo. Dunque $z = 0$ e $R(\lambda I - A) \in \{0\}^\perp$, cioè $\overline{R(\lambda I - A)} = X$.

Resta da dimostrare che $R(\lambda I - A)$ è chiusa. Sia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $y_n = (\lambda I - A)x_n$, dove $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in X , e supponiamo che $y_n \rightarrow y$. Per la stima (43) x_n è di Cauchy, quindi converge ad un certo x . Poiché $\lambda I - A$ è chiuso, $(\lambda I - A)x = y$.

Passo 3: dimostriamo che $\Sigma_{\pi, \omega}$ è incluso nel risolvente di A .

Se $\lambda \in \Sigma_{\pi-\epsilon, \omega}$ e $\arg(\lambda - \omega) = \theta$, vale

$$\|R(\lambda, A)y\| \leq \frac{1}{|\Im(\lambda)|} \|y\| \leq \begin{cases} \frac{1}{|\lambda| \sin \epsilon} \|y\| & \text{se } \epsilon \leq |\theta| \leq \pi - \epsilon \\ \frac{1}{|\lambda| \cos \epsilon} \|y\| & \text{se } |\theta| < \epsilon \end{cases}$$

□

Semigruppato relativo alle equazioni con ritardo

Proposizione .42. *Il semigruppato $T(t)$ definito nell'esempio 2.35 è fortemente continuo ed è generato dall'operatore A definito da (2.47).*

Dimostrazione. Sia $h = (h_0, h_1) \in H$. Osserviamo che

$$(z_t - h_1)(\theta) = \begin{cases} h_1(t + \theta) - h_1(\theta) & \theta \in (-r, -t) \\ e^{(t+\theta)C} h_0 + \int_0^{t+\theta} e^{t+\theta-s} CD h_1(s-r) ds - h_1(\theta) & t \in [-t, T]. \end{cases}$$

Allora è facile verificare che

$$S(t)h - h = (z(t) - h_0, z_t - h_1) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi il semigruppato $T(t)$ è fortemente continuo.

Sia ora B il generatore di $T(t)$. Dimostriamo prima che $A \subset B$, cioè che B estende A .

Sia $h_1 \in W^{1,2}(-r, 0; \mathbb{C}^n)$, $h_1(0) = h_0 = z(0)$.

La funzione

$$w(t) = \begin{cases} z(t) & t \in [0, T] \\ h_1(t) & t \in [-r, 0] \end{cases}$$

appartiene a $W^{1,2}(-r, T; \mathbb{C}^n)$. Poniamo, per ogni $t \in [0, T]$,

$$w_t(\theta) = w(t + \theta) \quad \theta \in [-r, 0].$$

Sia $h \in D(A)$, allora

$$\frac{T(t)h - h}{t} = \frac{(w(t), w_t) - (h_0, h_1)}{t} = \left(\frac{w(t) - w(0)}{t}, \frac{w_t - w_0}{t} \right).$$

Passando al limite in $\mathbb{C}^n \times L^2(-r, 0; \mathbb{C}^n)$ per $t \rightarrow 0^+$ otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)h - h}{t} = (w'(0), W'_0) = (Ch_0 + Dh_1(-r), h'_1).$$

Quindi $D(A) \subset D(B)$. Vediamo l'inclusione inversa. Supponiamo che esiste $x \neq 0$ appartenente a $D(B) \cap D(A)^c$. Poiché B genera un semigruppato fortemente continuo, esiste $\omega > 0$ tale che $[\omega, \infty) \subset \rho(B)$. Scegliendo $\lambda > \omega$ si ha che $\lambda I - A$ e $\lambda I - B$ sono bigettivi; inoltre sappiamo che coincidono su $D(A)$ perché B estende A .

Poniamo $y = (\lambda I - B)x$ e $z = R(\lambda, A)y$. Poiché $z \in D(A)$ si ha che $z \neq x$. Ma

$$(\lambda I - B)x = y = (\lambda I - A)z = (\lambda I - B)z$$

quindi $\lambda I - B$ non è iniettivo. Ciò è assurdo, di conseguenza $D(A) = D(B)$. □

Bibliografia

- [1] P. ACQUISTAPACE, *Appunti di Analisi Convessa*, <http://www.dm.unipi.it/acquistp/anacon.pdf>.
- [2] P. ACQUISTAPACE, *Appunti di Analisi Funzionale*, <http://www.dm.unipi.it/acquistp/anafun.pdf>.
- [3] A. BENSOUSSAN, G. DA PRATO, M. C. DELFOUR, S. K. MITTER, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, 2nd Edition (2007).
- [4] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer; 1st Edition. edition (November 10, 2010).
- [5] K. J. ENGEL, R. NAGEL, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag, New York (2000).
- [6] F. FLANDOLI, *A Counterexample in the Boundary Control of Parabolic Systems*, Pergamon Press, Università di Torino (1990).
- [7] I. LASCIESKA, R. TRIGGIANI, *Differential and Algebraic Riccati Equations with Application to Boundary/Point Control Problems: Continuous Theory and Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1991).
- [8] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, vol. 1 e 2, Masson (1990).
- [9] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1 e 2 (1968); vol. 3, Dunod, Paris (1969).
- [10] A. LUNARDI, *Interpolation theory*, Springer, 2nd Edition.
- [11] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1983).

Ringraziamenti

Ringrazio la mia famiglia per la vicinanza e il sostegno che mi hanno fornito per giungere a questo traguardo.

In particolare, ringrazio i miei genitori per la fiducia che mi hanno sempre dato e per avermi permesso di studiare con assoluta serenità. Una parte, *ad honorem*, di questa laurea in Matematica la considero loro.

Ringrazio il prof. Acquistapace per la pazienza e la disponibilità che mi ha concesso per completare questo lavoro.

Sarebbe giusto ringraZiare i miei amici per gli aiuti tecnici che mi hanno dato per la scrittura di questa tesi (soprattutto dopo aver fatto ad alcuni precise promesse di citaZioni nei ringraZiamenti), ma preferisco ringraZiarli per tutti quei momenti passati insieme lontani da qualsiasi cosa riguardasse questa laurea. GraZie.

Ringrazio Mariù per aver ascoltato, con pazienza e interesse, sia gli sfoghi che le farneticazioni matematiche su questa tesi. Per il resto, ora che sono Dottore in Matematica, posso darti solo dei numeri: 0, 1, 2. Lascio a te l'interpretazione.