Università degli Studi di Pisa

1343

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Spazi di Sobolev in spazi metrici

30 settembre 2011

Tesi di Laurea Triennale

Candidato
Francesco Geraci
geraci@mail.dm.unipi.it

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace
Università di Pisa

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Introduzione

Gli spazi di Sobolev, come è noto, sono senza dubbio il principale strumento per lo studio delle equazioni alle derivate parziali in aperti di $\mathbb{R}^n$. I teoremi di esistenza e regolarità non possono prescindere dall'uso di questi spazi, che si prestano ottimamente anche per descrivere teoremi di traccia e quindi per studiare problemi al contorno di tutti i tipi con dati non omogenei. Tutto ciò, però, a patto che l'aperto in cui si formulano i problemi ai limiti abbia un minimo di regolarità.

Negli ultimi due decenni, sotto l'impulso dei progressi nel calcolo delle variazioni, nella teoria geometrica della misura e nella geometria frattale, si sono avuti importanti sviluppi nello studio di equazioni alle derivate parziali e problemi al contorno in aperti di $\mathbb{R}^n$ del tutto irregolari ed anche, ancor più generalmente, in spazi metrici. In questo nuovo ambito è stata introdotta la nozione di spazio di Sobolev metrico, adattato a questi contesti che generalizzano la situazione classica.

Lo scopo di questa tesi è quello di analizzare tale generalizzazione, descrivendo gli spazi di Sobolev metrici e le loro principali proprietà, e confrontando la situazione metrica con quella classica, senza naturalmente avere pretese di esaustività e restando necessariamente nei limiti di una tesi triennale.

Veniamo ad una descrizione dettagliata della tesi. Il primo capitolo contiene una serie di nozioni e di risultati di analisi funzionale, alcuni dei quali non dimostrati per mancanza di spazio, che sono preliminari al nostro studio.

Nel secondo capitolo, si introducono le misure doubling e si provano alcune proprietà di cui godono gli spazi L^p relativi a queste misure; successivamente, dopo aver definito gli spazi di Sobolev metrici, si dimostra l'equivalenza tra questi e gli spazi di Sobolev classici, nel caso in cui lo spazio metrico si riduca ad uno spazio euclideo.

Nel terzo capitolo, infine, si mostra che sotto opportune ipotesi gli spazi di Sobolev metrici a valori in $\mathbb{R}$ sono spazi di Banach; quindi si prova la validità di tre proprietà classiche, opportunamente riformulate nel contesto metrico: la disuguaglianza di Poincaré, il teorema di immersione di Sobolev ed il teorema di compattezza di Rellich.

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo presenteremo alcune definizioni e alcuni teoremi utili per il seguito. Cominceremo introducendo la definizione di spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ con Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Poi enunceremo, a volte senza dimostarazione, alcuni teoremi di analisi funzionale che saranno utilizzati nei capitoli successivi.

1.1 Spazi di Sobolev classici

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $p \in [1, \infty]$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ per cui

$$\exists v_1, v_2, \dots, v_n \in L^p(\Omega) \ : \ \int_\Omega u \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx = - \int_\Omega v_i \ \varphi \ dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo le derivate parziali distribuzionali $\frac{\partial u}{\partial x_i} := v_i$ (questa è una buona definizione, si dimostra infatti che le v_i sono uniche), e indichiamo con $\nabla u = grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Dotiamo $W^{1,p}(\Omega)$ della seguente norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \sum_{i=0}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}. \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1.2. *Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ con la norma (1.1) è uno spazio di Banach.*

1.2 Alcune nozioni di analisi funzionale

Definizione 1.2.1 (Stretta convessità)**.** Sia E uno spazio vettoriale normato. Diciamo che la norma $\|\cdot\|$ è strettamente convessa (o lo spazio è strettamente convesso) se

$$\|tx + (1-t)y\| < 1 \qquad \forall t \in (0,1) \tag{1.2}$$

per ogni $x, y \in E$ distinti tale che $\|x\| = \|y\| = 1$.

Definizione 1.2.2 (Dominio di estensione)**.** Un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$ è detto un *dominio di estensione* se per ogni $p \in [1, \infty]$ esiste una mappa continua $T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che $Tu_{|\Omega} \equiv u$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$. (Per esempio ogni aperto limitato con bordo Lipschitziano, [2])

Definizione 1.2.3 (Convergenza debole)**.** Sia X uno spazio topologico lineare. Una successione (x_n) in X converge debolmente se esiste un $x \in X$ per cui $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, per ogni $\varphi \in X^*$. Il punto x è detto limite debole della successione, e la successione (x_n) è detta convergere debolmente a x. Un insieme $A \subseteq X$ è detto debolmente compatto per successioni se per ogni successione (x_n) in A ha una sottosuccessione che converge debolmente ad un punto di X.

1.3 Alcuni risultati di analisi funzionale

Di seguito enunceremo dei risultati classici di analisi funzionale che saranno largamente utilizzati nel resto della trattazione.

Teorema 1.3.1 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $1 < p < \infty$ e T un funzionale lineare in $L^p(\Omega)$. Allora esiste un'unica funzione $u \in L^{p'}(\Omega)$ tale che*

$$T(f) = \int_\Omega u\ f\ dx \qquad \forall f \in L^p.$$

Teorema 1.3.2 (di rappresentazione di Riesz II)**.** *Sia T un funzionale lineare su $C_0(\bar\Omega)$. Allora esiste un'unica misura di borel con segno λ su $\bar\Omega$ tale che*

$$T(f) = \int_{\bar\Omega} f\ d\lambda \qquad \forall f \in C_0(\bar\Omega).$$

Teorema 1.3.3 (di Radon-Nikodym)**.** *Siano μ, ν misure σ-finite e supponiamo che si abbia $\nu << \mu$: allora esiste una densità f tale che si abbia*

$$\nu(A) = \int_A f(x)\ d\mu(x)$$

Teorema 1.3.4 (Lemma di Mazur)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Se una successione (x_n) converge debolmente a x in X, allora esiste una successione di combinazioni convesse (y_n) degli (x_n), la quale converge a x in norma.*

Proposizione 1.3.5 (Ascoli-Arzelà)**.** *Siano E ed F due spazi metrici con E compatto e sia (u_n) una successione di funzioni continue da E in F tale che:*

1. *(u_n) è equicontinua,*

2. *esiste un compatto $C \subset F$ tale che per ogni δ-intorno C_δ di C si ha $u_n(E) \subset C_\delta$ per n sufficientemente grande.*

Allora esiste una funzione $u : E \to C$ e una sottosuccessione di indici (n_k) tale che (u_{n_k}) converge uniformemente a u su E.

Teorema 1.3.6 (di Lusin)**.** *Sia μ una misura di Borel su E (spazio metrico), con $\mu(E) < \infty$. Se f è una funzione misurabile su E allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso F_ε tale che f è continua su F_ε e $\mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Il teorema si estende facilmente al caso in cui μ è una misura σ-finita.*

Teorema 1.3.7 (di estensione di Tietze)**.** *Sia A un sottoinsieme chiuso di uno spazio normale E e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una funzione continua $f^* : E \to \mathbb{R}$ tale che $f^*_{|A} \equiv f$.*

Teorema 1.3.8 (di estensione di McShane)**.** *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrico E, e sia $f \in Lip(A, \mathbb{R})$. Allora esiste una funzione $\tilde{f} \in Lip(E, \mathbb{R})$ con stessa costante di Lipschitz di f, tale che $\tilde{f}_{|A} \equiv f$.*

Teorema 1.3.9. *Un insieme A in uno spazio riflessivo è debolmente compatto per successioni se e solo se è limitato.*

Teorema 1.3.10 (Disuguaglianza di Hölder: caso $0 < p < 1$)**.** *Siano f, g due funzioni definite su uno spazio metrico E a valori reali, sia $p \in (0, 1)$ e sia $q = \frac{p}{p-1}$ il suo esponente coniugato. Se $f, g : E \to \bar{\mathbb{R}}$ verificano,*

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty \quad e \quad \|g\|_q := \left(\int_E |g|^q \, d\mu \right)^{1/q} < \infty,$$

allora:

$$\|f \cdot g\|_1 \geq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzi tutto una proprietà delle funzioni convesse.

Lemma 1.3.11. *Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, allora per ogni $\lambda < 0$ o $\lambda > 1$ vale:*

$$u\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda\ u(x) + (1-\lambda)\ u(y).$$

Dimostrazione. A meno di scambiare λ con $(1-\lambda)$ basta mostrare la tesi per $\lambda < 0$. Dividendo per $1-\lambda$ (notare che $\frac{1}{1-\lambda} \in (0,1)$), abbiamo

$$\begin{aligned} & u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) \\ \iff\ & \frac{1}{1-\lambda}\ u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}\ u(x) + u(y) \\ \iff\ & u(y) \leq \frac{1}{1-\lambda}\ u(\lambda x + (1-\lambda)y) - \frac{\lambda}{1-\lambda}\ u(x). \end{aligned}$$

Questa proprietà equivale alla convessità di u, infatti: $\frac{1}{1-\lambda}$, $-\frac{\lambda}{1-\lambda} \in (0,1)$ e

$$\frac{1}{1-\lambda}(\lambda x + (1-\lambda)y) - \frac{\lambda x}{1-\lambda} = y, \qquad \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda} = 1.$$

□

Dimostriamo ora la disuguaglianza di Hölder per $0 < p < 1$. Dal lemma appena dimostrato, per la convessità dell'esponenziale, abbiamo

$$|f \cdot g| = e^{1/p\ \log|f|^p + 1/q\ \log|g|^q} \geq \frac{1}{p}\ |f|^p + \frac{1}{q}\ |g|^q.$$

Supponiamo che $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, allora

$$\begin{aligned} & \int_E |f \cdot g|\ d\mu \geq \frac{1}{p} \int_E |f|^p\ d\mu + \frac{1}{q} \int_E |g|^q\ d\mu = 1 \\ & \implies \|f \cdot g\|_1 \geq 1. \end{aligned}$$

Passando al caso generale troviamo che

$$\int_E \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} \right|\ d\mu \geq 1 \implies \|f \cdot g\|_1 \geq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Teorema 1.3.12 (disuguaglianza di Minkowski: caso $0 < p < 1$)**.** *Siano f, g due funzioni definite su uno spazio metrico E a valori reali positivi, sia $p \in (0,1)$ e sia $q = \frac{p}{p-1}$ il suo esponente coniugato. Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ soddisfano $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$, allora*

$$\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dimostrazione. Poiché f e g sono funzioni positive abbiamo

$$\|f+g\|_p^p := \int_E |f+g|^p \; d\mu = \int_E (f+g)^{p-1} \; f \; d\mu + \int_E (f+g)^{p-1} \; g \; d\mu$$

applicando la disuguaglianza di Hölder appena dimostrata troviamo

$$\|f+g\|_p^p \geq \|(f+g)^{p-1}\|_q \; \|f\|_p + \|(f+g)^{p-1}\|_q \; \|g\|_p.$$

Ricordando che $q := \frac{p}{p-1}$ osserviamo che:

$$\begin{aligned} \|(f+g)^{p-1}\|_q &= \left(\int_E (f+g)^{q(p-1)} \; d\mu \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_E (f+g)^p \; d\mu \right)^{(p-1)/p} = \|(f+g)\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\|f+g\|_p \geq \|f\|_p \|g\|_p.$$

$\square$

Teorema 1.3.13 (Disuguaglianza di Clarkson)**.** *Siano $f, g \in L^p(E)$, e $p \in (1, \infty)$. Allora:*

(i) Se $p \geq 2$, $\qquad \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1} \left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right]$

(ii) Se $1 < p \leq 2$ e $q = \frac{p}{p-1}$, $\qquad \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2 \left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right]^{q-1}$

Prima di cominciare servono dei lemmi.

Lemma 1.3.14. *Se $p \geq 2$ e $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\left[|a+b|^p + |a-b|^p \right]^{1/p} \leq \left[|a+b|^2 + |a-b|^2 \right]^{1/2}$$

Dimostrazione. Dividendo primo e secondo membro per $\max\{|a+b|, |a-b|\}$ la tesi equivale a

$$(1+t^p)^{1/p} \leq (1+t^2)^{1/2} \qquad \forall t \in (0,1], \quad \forall p \geq 2;$$

ponendo $t^2 = s$ e $p/2 = r$, per la crescenza della funzione $x \mapsto x^2$, la tesi equivale a

$$(1+s^r)^{1/r} \leq (1+s) \qquad \forall s \in (0,1], \quad \forall r \geq 1.$$

Ma questa relazione è vera poiché essendo $1/r \in (0,1]$, la funzione $x \mapsto x^{1/r}$ è subadditiva:

$$(1+s^r)^{1/r} \leq 1^{1/r} + \left(s^r\right)^{1/r} = 1 + s.$$

$\square$

Lemma 1.3.15. *Se $p \geq 2$ e $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\left[\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}\right]^{1/2} \leq \left[\frac{|a|^p + |b|^p}{2}\right]^{1/p}$$

Dimostrazione. Dividendo primo e secondo membro per $\max\{|a|, |b|\}$ la tesi equivale a

$$\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1+t^p}{2}\right)^{1/p} \qquad \forall t \in (0,1], \quad \forall p \geq 2,$$

ponendo nuovamente $s = t^2$ e $r = \frac{p}{2}$ la tesi equivale a

$$\frac{1+s}{2} \leq \left(\frac{1+s^r}{2}\right)^{1/r} \qquad \forall s \in (0,1], \quad \forall r \geq 1,$$

il che equivale a

$$\left(\frac{1+s}{2}\right)^r \leq \frac{1+s^r}{2}.$$

Questa relazione è vera per la convessità della funzione $x \mapsto x^r$. $\square$

Lemma 1.3.16. *Se $1 < p \leq 2$ e $q = \frac{p}{p-1}$, allora per ogni $x \in [0,1]$ si ha*

$$(1+x)^q + (1-x)^q \leq 2\ (1+x^p)^{q-1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione di due variabili

$$f(\alpha, x) = (1 + \alpha^{1-q}\ x)(1+\alpha x)^{q-1} + (1 - \alpha^{1-q}\ x)(1-\alpha x)^{q-1}$$

con $\alpha \in]0,1]$, $x \in [0,1]$.
Essendo $(p-1)(q-1) = 1$, la tesi equivale a

$$f(1, x) \leq f(x^{p-1}, x)$$

come è facile da verificare. Dato che $x^{p-1} \leq 1$ è sufficiente provare che $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \leq 0$.
In effetti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha} = &\quad (1-q)\alpha^{-q}x(1+\alpha x)^{q-1} + (1+\alpha^{1-q}\ x)(1+\alpha x)^{q-2}(q-1)x \\
&- (1-q)\alpha^{-q}x(1-\alpha x)^{q-1} - (1-\alpha^{1-q}\ x)(1-\alpha x)^{q-2}(q-1)x \\
= &\quad (q-1)x[-\alpha^{-q}(1+\alpha x) + 1 + \alpha^{1-q}x](1+\alpha x)^{q-2} \\
&- (q-1)x[-\alpha^{-q}(1-\alpha x) + 1 - \alpha^{1-q}x](1-\alpha x)^{q-2} \\
= &\quad (q-1)x[1-\alpha^{-q}][(1+\alpha x)^{q-2} - (1-\alpha x)^{q-2}],
\end{aligned}$$

ma poiché $q > 1$, $x \in [0,1]$ e $\alpha \in]0,1]$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \leq 0 \Longleftrightarrow (1+\alpha x)^{q-2} \geq (1-\alpha x)^{q-2}$$

il che è vero perché $q \geq 2$ essendo $p \leq 2$. $\square$

Dimostriamo adesso il teorema 1.3.13.

Dimostrazione.

(i) Dai lemmi (1.3.14) e (1.3.15) segue che per $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\Big[|a+b|^p + |a-b|^p\Big]^{1/p} &\leq \Big[|a+b|^2 + |a-b|^2\Big]^{1/2} = 2^{1/2}\,\Big[|a|^2 + |b|^2\Big]^{1/2} \\ &= 2\,\left[\frac{|a|^2+|b|^2}{2}\right]^{1/2} \leq 2\,\left[\frac{|a|^p+|b|^p}{2}\right]^{1/p} \\ &= 2^{1-1/p}\,\Big[|a|^p + |b|^p\Big]^{1/p}.\end{aligned}$$

Elevando alla potenza p-esima otteniamo

$$\Big[|a+b|^p + |a-b|^p\Big] \leq 2^{p-1}\,\Big[|a|^p + |b|^p\Big],$$

e integrando su E si ha la tesi.

(ii) Dal lemma 1.3.16, ponendo $b = ax$ e moltiplicando per a^q otteniamo

$$(a+b)^q + (a-b)^q \leq 2\,(a^p + b^p)^{q-1} \qquad \forall a \geq b \geq 0,$$

ovvero

$$|a+b|^q + |a-b|^q \leq 2\,\big[|a^p| + |b^p|\big]^{q-1} \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$|f(x)+g(x)|^q + |f(x)-g(x)|^q \leq 2\,\big[|f(x)^p| + |g(x)^p|\big]^{q-1}. \tag{1.3}$$

Premesso ciò, ricordando che $p(q-1) = q$,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q &= \|f+g\|_{q(p-1)}^q + \|f-g\|_{q(p-1)}^q \\ &= \Big(\int_E |f+g|^{q(p-1)}\,d\mu\Big)^{1/(p-1)} + \Big(\int_E |f-g|^{q(p-1)}\,d\mu\Big)^{1/(p-1)}.\end{aligned}$$

Poiché $0 < p-1 \leq 1$, vale il teorema di Minkowski 1.3.12:

$$\left(\int_E [|f+g|^q + |f-g|^q]^{p-1} \, d\mu \right)^{1/(p-1)}$$
$$\geq \left(\int_E |f+g|^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/(p-1)} + \left(\int_E |f-g|^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/(p-1)}$$

e quindi per la (1.3)

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q &\leq \left(\int_E [|f+g|^q + |f-g|^q]^{p-1} \, d\mu \right)^{1/(p-1)} \\ &\leq \left(\int_E 2^{p-1} \, [|f|^p + |g|^p]^{q-1)(p-1} \, d\mu \right)^{1/(p-1)} \\ &= 2 \left(\int_E [|f|^p + |g|^p] \, d\mu \right)^{1/(p-1)} \\ &= 2 \, [\|f\|_p^p + \|g\|_p^p]^{1/(p-1)} = 2 \, [\|f\|_p^p + \|g\|_p^p]^{q-1}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.3.17 (Disuguaglianza di Markov)**.** *Sia $u \in L^p(E,\mu)$ per qualche $p \geq 1$. Allora per ogni $t > 0$ vale:*

$$\mu\big(\{|u| \geq t\}\big) \ \leq \ t^{-p} \|u\|_{L^p(E,\mu)}.$$

Dimostrazione. Per ogni $t > 0$ abbiamo

$$t^p \ \mu\big(\{|u| \geq t\}\big) \ \leq \ \int_{\{|u|>t\}} |u|^p \, d\mu \ \leq \ \|u\|_{L^p(E,\mu)}$$

e quindi la tesi. □

Lemma 1.3.18. *Se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$, $g_n \rightharpoonup g$ in $L^p(E)$, allora la successione $(x,y) \mapsto f_n(x) + g_n(y)$ converge debolmente a $f(x) + g(y)$ in $L^p(E \times E)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in L^p(E \times E)^* = L^q(E \times E)$, (su $E \times E$ consideriamo la distanza: $d_{E\times E}\big((x,x'),(y,y')\big) = d_E(x,y) + d_E(x',y')$). Consideriamo

$$\int_{ExE} \varphi(x,y) \ [f_n(x) + g_n(y) - f(x) - g(y)] \ dx \ dy$$
$$= \int_E \left[\int_E \varphi(x,y) \ [f_n(x) - f(x)] dx \right] dy + \int_E \left[\int_E \varphi(x,y) \ [g_n(y) - g(y)] dy \right] dx.$$

Poiché $x \mapsto \varphi(x,y) \in L^q(E)$ per quasi ogni $y \in E$, infatti $\int_E |\varphi(x,y)|^q \; dx < \infty$ quasi ovunque, allora

$$x \mapsto \varphi(x,y) \in L^p(E)^*.$$

Quindi $\left[\int_E \varphi(x,y) \; [f_n(x) - f(x)] \; dx\right]$ tende a zero per definizione di convergenza debole; ricordando che $\|f_n\|_{L^p(E)} \leq C$, tale integrando è dominato:

$$\left|\int_E \varphi(x,y) \; [f_n(x) - f(x)] \; dx\right| \leq 2 \; C \; \|\varphi(\cdot,y)\|_{L^q(E)}.$$

Segue che il primo addendo tende a zero per il teorema di convergenza dominata. In maniera analoga si dimostra che anche il secondo addendo tende a zero e questo implica la tesi. □

Lemma 1.3.19. *Sia $p \in (1,\infty)$, data una successione $(f_n)_n \subset L^p(E,\mu)$ tale che*

$$\int_A f_n \; d\mu \to \int_A f \; d\mu \qquad \forall A \text{ misurabile}, \; \mu(A) < \infty,$$

si ha

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

per q.o. $x \in E$.

Dimostrazione. Basta provare che posto $m(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, si ha $f(x) \leq m(x)$ q.o. (per avere l'altra disuguaglianza, basta considerare $(-f_n)$. Basta provare la tesi per A insieme misurabile di misura finita. Sia dunque A un sottoinsieme di E di misura finita, proviamo che $f \leq p$ q.o. in A. Se $m(x) = \infty$ non c'è nulla da dimostrare, quindi possiamo suppore $p < \infty$ su A. Siano

$$N = \{x \in A \mid m(x) < 0\}, \; P = \{x \in A \mid m(x) \geq 0\}.$$

Si ha, posto $g_n = \sup_{k\geq n}\{f_k\}$ e $N_k = \{x \in N \mid g_n < 0\}$,

$$N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n.$$

Se $F \subseteq N_n$, per il teorema di B. Levi

$$-\int_F g_k \; d\mu \nearrow -\int_F p \; d\mu;$$

d'altra parte

$$\int_F f\ d\mu \longleftarrow \int_F f_k\ d\mu \leq \int_F g_k\ d\mu \longrightarrow \int_F p\ d\mu,$$

e quindi

$$\int_F f\ d\mu \geq \int_F p\ d\mu \qquad \forall F \subset N_n,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi la tesi vale per ogni $F \subset N$. Si ha poi, posto $P_n = \{x \in A \mid 0 \leq m(x) \leq n\}$, e $P_{nm} = \{x \in p_n \mid 0 \leq g_m(x) \leq 1 + m(x)\}$,

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n, \qquad P_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} P_{nm}.$$

Se $F \subseteq P_{nm}$, si ha $0 \leq m(x) \leq g_k(x) \leq g_m(x) \leq 1 + m(x) \leq n + 1$ per ogni $k \geq m$, quindi per il teorema di convergenza dominata

$$\int_F g_n\ d\mu \to \int_F p\ d\mu,$$

da cui come prima:

$$\int_F f\ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_F f_k\ d\mu \leq lim_{k\to\infty} \int_F g_k\ d\mu = \int_F p\ d\mu,$$

quindi

$$\int_F f\ d\mu \leq \int_F p\ d\mu, \qquad \forall F \subseteq P_{nm},\ \ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque la tesi vale per ogni $F \subseteq P$. Ne segue che

$$\int_F f\ d\mu \leq \int_F p\ d\mu, \qquad \forall F \subset A,$$

e pertanto $f \leq p$ quasi ovunque in A. $\square$

Capitolo 2

Spazi di Sobolev metrici

In questo capitolo introdurremo la nozione di spazio di Sobolev in un contesto più generale, quello degli spazi metrici.

2.1 Spazi di Sobolev metrici e loro proprietà

Definizione 2.1.1. Siano (E, d_E) e (F, d_F) spazi metrici, e sia μ una misura di Borel non negativa, finita sugli insiemi limitati.

Per $p \in [1, +\infty]$, definiamo $W^{1,p}_m(E, \mu, F)$ come lo spazio di tutte le funzioni $u : E \to F$ tali che esistono $g \in L^p(E)$, $g \geq 0$ e $N \subset E$ (dipendenti da u) con $\mu(N) = 0$ e

$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_E\big(x, y\big)\big(g(x) + g(y)\big) \qquad \forall x, y \in E \setminus N. \tag{2.1}$$

Tale g (in generale) non è unica; definiamo allora $M(u)$ come l'insieme dei $g \in L^p(E)$ per cui vale la definizione, a meno di un insieme N di misura nulla dipendente da g. Come di consueto identifichiamo due funzioni $u, v \in W^{1,p}_m(E, \mu, F)$ se $u = v$ su E a meno di un insieme di misura nulla rispetto a μ.

Questa definizione ha delle inaspettate proprietà; nelle seguenti osservazioni mostreremo che l'insieme $M(u)$ è chiuso e convesso in $L^p(E)$ e che se $p \in (1, \infty)$ allora $M(u)$ ha un elemento di norma minimale in $L^p(E)$.

Osservazione 2.1.2. L'insieme $M(u)$ è convesso e chiuso in $L^p(E)$.
Siano f e $g \in M(u)$ allora da (2.1) abbiamo

$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_E\big(x, y\big)\big(f(x) + f(y)\big) \qquad \forall x, y \in E \setminus N$$
$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_E\big(x, y\big)\big(g(x) + g(y)\big) \qquad \forall x, y \in E \setminus N'$$

con $\mu(N) = \mu(N') = 0$. Moltiplicando la prima disuguaglianza per $t \in [0,1]$, la seconda per $1-t$, e sommando membro a membro otteniamo per ogni $x, y \in E \setminus (N \cup N')$:

$$\begin{aligned} &d_F\big(u(x), u(y)\big) \\ &\qquad \leq d_E\big(x,y\big)\Big(\big(tf(x) + (1-t)g(x)\big) + \big(tf(y) + (1-t)g(y)\big)\Big), \end{aligned}$$

con $\mu(N \cup N') = 0$. Allora $tf + (1-t)g \in M(u)$ e quindi $M(u)$ è convesso.

Sia ora $\big(g_n\big) \subset M(u)$ che converge a $g \in L^p(E)$, vogliamo mostrare che $g \in M(u)$. Poiché $\big(g_n\big) \subset M(u)$ converge in $L^p(E)$ esiste una sottosuccessione $\big(g_{n_k}\big)$ che converge a g quasi ovunque rispetto a μ e allora vale

$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_E\big(x,y\big)\big(g(x) + g(y)\big) \qquad \forall x, y \in E \setminus N''$$

dove $N'' = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ con g_i e N_i che soddisfano 2.1, e quindi $\mu(N'') = 0$. Allora $g \in M(u)$ e abbiamo dimostrato che $M(u)$ è chiuso in L^p.

Osservazione 2.1.3 (g minimale)*.* Se $p \in (1, +\infty)$ esiste un unico elemento il $M(u)$ con norma minimale.

Dimostrazione. Mostreremo che se $\lambda = \inf\{\|g\|_p \mid g \in M(u)\}$ e $p \in (1, \infty)$, allora esiste un'unica $\bar{g} \in M(u)$ tale che $\|\bar{g}\|_p = \lambda$. Se $p \geq 2$ e se $(g_n) \subset M(u)$ è una successione minimizzante, ossia $\|g_n\|_p \searrow \lambda$, allora dalla *disuguaglianza di Clarkson* (teorema (1.3.13)) abbiamo

$$\begin{aligned} \left\|\frac{g_n - g_m}{2}\right\|_p^p &\leq -\left\|\frac{g_n + g_m}{2}\right\|_p^p + \frac{1}{2}\Big[\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p\Big] \\ &\leq -\lambda^p + \frac{1}{2}\Big[\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p\Big] \end{aligned}$$

Se $n, m \geq \nu_\varepsilon$ (tale che, per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$, $\|g_n\|_p \leq \lambda + \varepsilon$) si ha dunque

$$2^{-p}\|g_n - g_m\|_p^p \leq -\lambda^p + \frac{1}{2}\ 2(\lambda+\varepsilon)^p \leq -\lambda^p + \frac{1}{2}\ 2(\lambda^p + c\varepsilon) \leq c\varepsilon$$

Allora la successione $(g_n) \subset M(u)$ è di Cauchy e per la completezza di $L^p(E)$ esiste un elemento $\bar{g} \in L^p(E)$ di norma λ, ma poiché $M(u)$ è chiuso allora $\bar{g} \in M(u)$.
Se $1 < p \leq 2$, analogamente vale

$$\|g_n - g_m\|_p^q \leq 2\ \big[\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p\big]^{q-1} - \|g_n + g_m\|_p^q.$$

Dividendo per 2^q, se $n, m \geq \nu_\varepsilon$ si ha

$$2^{-q} \, \|g_n + g_m\|_p^q \leq 2^{1-q}(2(\lambda+\varepsilon)^p)^{q-1} - \lambda^q = 2^{(1-q)(q-1)}(\lambda+\varepsilon)^q - \lambda^q \leq c\varepsilon$$

e si conclude come nel punto precedente. Ultimo dettaglio della dimostrazione è dimostrare che $(\lambda+\varepsilon)^p \leq \lambda^p + c\varepsilon$ con $p > 1$. Se $\lambda = 0$ la tesi è ovvia, supponiamo $\lambda > 0$ e notiamo che

$$\begin{aligned}(\lambda+\varepsilon)^p \leq \lambda^p + c\varepsilon \;&\Leftrightarrow\; \big(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\big)^p \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \\ &\Leftrightarrow\; \big(1+\frac{c\varepsilon}{\lambda}\big)^p - 1 \leq \frac{c\varepsilon}{\lambda^p}\end{aligned}$$

ma per il teorema di Lagrange applicato alla funzione $x \mapsto (1+x)^p$ abbiamo

$$\big(1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\big)^p - 1 = p(1+\xi)^{p-1}\frac{\varepsilon}{\lambda} \leq \lambda^{p-1}\big(1+\frac{1}{\lambda}\big)^{p-1}\frac{\varepsilon}{\lambda^p}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\xi \in [0, \varepsilon/\lambda]$ e il fatto che la funzione $x \mapsto x^{p-1}$ è crescente. Questo prova l'esistenza.
Per provare l'unicità sfrutteremo la stretta convessità di $L^p(E)$. Supponiamo per assurdo che esistano $g_1, g_2 \in M(u)$ tali che $\|g_1\|_p = \|g_2\|_p = \lambda$. Se $\lambda = 0$ allora $g_1 = g_2 = 0$ μ-q.o. se invece $\lambda > 0$ avremo che $\|g_1/\lambda\|_p = \|g_2/\lambda\|_p = 1$. Poiché $M(u)$ è convesso $\frac{g_1+g_2}{2} \in M(u)$ e per la stretta convessità di $L^p(E)$ abbiamo

$$\|\frac{g_1+g_2}{2\,\lambda}\|_p < 1 \quad \Longrightarrow \|\frac{g_1+g_2}{2}\|_p < \lambda$$

il che è assurdo e prova anche l'unicità. □

Proveremo ora dei risultati che mettono in relazione le funzioni in $W^{1,p}_m$ e le funzioni Lipschitziane. Cominceremo mostrando che la composizione di funzioni Lipschitziane con funzioni in $W^{1,p}_m$ è ancora in $W^{1,p}_m$. Viceversa si può affermare che $u \in W^{1,p}(E,\mu,F)$ se per ogni $\varphi \in Lip(F,\mathbb{R})$ si ha $\varphi \circ u \in W^{1,p}_m(E,\mu)$. Mostreremo che per funzioni in $W^{1,p}_m$ vale un teorema di approssimazione di tipo Lusin con funzioni Lipschitziane e infine proveremo che, come nel caso reale, $W^{1,\infty}_m(E,\mu,F) = Lip(E,F)$.

Osservazione 2.1.4 (Composizione). Se $u \in W^{1,p}_m(E,\mu,F)$ e $\varphi \in Lip(F,G)$ dove (G,d_G) è uno spazio metrico, allora $\varphi \circ g \in W^{1,p}_m(E,\mu,G)$. Infatti abbiamo per ogni $g \in M(u)$:

$$\begin{aligned}u \in W^{1,p}(E,\mu,F) \Longrightarrow & d_F\big(u(x),u(y)\big) \leq d_E\big(x,y\big)\big(g(x)+g(y)\big)\ \forall x,y \in E\setminus N \\ \varphi \in Lip(F,G) \Longrightarrow & d_G\big(\varphi(x),\varphi(y)\big) \leq L d_F\big(x,y\big)\end{aligned}$$

allora

$$d_G\big(\varphi(u(x)),\varphi(u(y))\big) \leq L d_F\big(u(x),u(y)\big) \leq d_E\big(x,y\big)\big(Lg(x)+Lg(y)\big)$$

per ogni $x, y \in E \setminus N$. Questo mostra quanto volevamo e in particolare ci dice che se L è la costante di Lipschitz di φ e $g \in M(u)$ allora $Lg \in M(\varphi \circ u)$.

Proposizione 2.1.5 (Spazi di Sobolev a valori in F e in $\mathbb{R}$)**.** *Siano E e F spazi metrici con F separabile e sia $\mathfrak{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $1-$Lipschitziane da F in $\mathbb{R}$. Allora una funzione $u : E \to F$ appartiene a $W^{1,p}_m(E, \mu, F)$ se solo se*

1. *$\varphi \circ u \in W^{1,p}_m(E, \mu)$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{F}$;*

2. *esiste $g \in L^p(E, \mu)$ tale che $g \in M(\varphi \circ u)$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{F}$.*

Inoltre, se $W^{1,p}_m(E, \mu, F)$ la g in (2) appartiene a $M(u)$.

Dimostrazione.
($\Longrightarrow$) Segue dall'osservazione precedente con $L = 1$.
($\Longleftarrow$) Fissiamo un $x \in E$ e consideriamo $u(x) \in F$. Definiamo allora la funzione $\varphi_{u(x)}(z) := d_F\big(u(x), z\big)$. La $\varphi_{u(x)}$ è 1-Lipschitziana a valori reali, infatti per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|\varphi_{u(x)}(z) - \varphi_{u(x)}(w)| = |d_F(u(x), z) - d_F(u(x), w)| \leq |d_F(z, w)|.$$

Ora osserviamo che per le ipotesi 1 e 2 si ha

$$d_F(u(x), u(y)) = |\varphi_{u(x)}(u(x)) - \varphi_{u(x)}(u(y))| \leq d_E(x, y)(g(x) + g(y))$$

per ogni $y \in E \setminus N$ con N come in (2.1). Per l'arbitrarietà di $x \in E$ abbiamo la tesi. $\square$

Osservazione 2.1.6.

- Supponiamo $u \in W^{1,p}_m(E, \mu, F)$, $g \in M(u)$ e sia N come in (2.1). Sia $G_\lambda := \big\{x \in E \setminus N \mid g(x) \leq \lambda\big\}$, allora u ristretta all'insieme G_λ è Lipschitziana di costante 2λ. Infatti per ogni $x, y \in G_\lambda$

$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_E\big(x, y\big)\big(g(x) + g(y)\big) \leq 2\lambda d_E\big(x, y\big)$$

  e dunque u è Lipschitziana di costante 2λ su G_λ.

- Poiché $g \in L^p$ la misura $\mu(E \setminus G_\lambda)$ può essere resa arbitrariamente piccola al crescere di λ. Infatti vale la seguente

$$\begin{aligned} g \in L^p \Longrightarrow \int_E |g|^p \, d\mu \geq \int_{E \setminus G_\lambda} |g|^p \, d\mu > |\lambda|^p \, \mu(E \setminus G_\lambda) \\ \Longrightarrow \mu(E \setminus G_\lambda) < |\lambda|^{-p} \, \|g\|^p_{L^p}. \end{aligned}$$

Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\lambda \geq 0$ tale che u coincide con una funzione 2λ-Lipschitziana a meno di un insieme di misura minore di ε. Abbiamo così dimostrato un teorema di approssimazione con funzioni Lipschitziane di tipo Lusin.

- In particolare se $p = +\infty$ allora posto $\lambda >\| g \|_\infty$ vediamo che $u\mid_{G_\lambda}$ è Lipschitziana e $\mu(E \backslash G_\lambda) = 0$ (per definizione di $\|\cdot\|_\infty$). Se F è completo e $\mu(B) > 0$ per ogni aperto $B \subset E$ possiamo modificare u su un insieme di misura nulla $(E \setminus G_\lambda)$ e ottenere una funzione Lipschitziana su E.

  Dimostrazione. Se F è completo e $\mu(B) > 0 \quad \forall B \subset E$ aperto, allora G_λ è denso in E; infatti se esistesse un aperto $A \subset E$ tale che $A \cap G_\lambda = \emptyset$, poiché $\mu(A) > 0$ avremmo $\mu(G_\lambda \cup A) \geq \mu(E)$. Assurdo ↯. Vogliamo mostrare che per ogni $y \in E \setminus G_\lambda$ esiste $(y_n) \subset G_\lambda$ tale che $(y_n) \to y$. Poiché G_λ è denso in E allora $G_\lambda \cap B(y, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$, allora esiste $y_n \in G_\lambda \cap B(y, \frac{1}{n})$. Mostriamo allora che $(u(y_n)) \subset F$ è di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d_F(u(y_m), u(y_n)) < \varepsilon$ per ogni $m, n > \nu$ infatti, ricordando che $(y_n) \subset E$ è di Cauchy (in quanto convergente), segue:

$$\begin{aligned} d_F\big(u(y_m), u(y_n)\big) &\leq d_E(y_m, y_n)\big(g(x) + g(y)\big) \\ &\leq 2\lambda d_E(y_m, y_n) < 2\lambda\varepsilon' := \varepsilon. \end{aligned}$$

  Allora basta scegliere ν tale che $d_E(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \quad \forall m, n > \nu$. Poiché F è completo $(u(y_n)) \to w \in F$. Modifichiamo u in modo che $u(y) = w$ e mostriamo che u così modificata è Lipschitziana su $G_\lambda \cup \{y\}$.

$$\begin{aligned} d_F\big(u(x), u(y)\big) &\leq d_F\big(u(x), u(y_n)\big) + d_F\big(u(y_n), u(y)\big) \\ &\leq 2\lambda d_E(x, y_n) + \varepsilon \leq 2\lambda d_E(x, y) + 2\lambda d_E(y_n, y) + \varepsilon \\ &\leq 2\lambda d_E(x, y) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

  per l'arbitrarietà di ε abbiamo la tesi.
  Viceversa se $u \in Lip(E, F)$ la definizione (2.1) è soddisfatta da $g = \frac{L}{2}$ con L la costante di Lipschitz di u. □

Abbiamo così provato la seguente la seguente:

Proposizione 2.1.7. *$W^{1,\infty}_m(E, \mu, F)$ coincide con $Lip(E, F)$ purché F sia completo e $\mu(B) > 0$ per ogni aperto $B \subset E$.*

Se F non è completo o esiste un aperto B di misura nulla rispetto a μ allora la precedente proposizione non vale. Si forniscono qui di seguito due controesempi.

Esempio 2.1.8.

- Sia $E = [0,1]$, e definiamo u come segue:

$$u(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Sia (q_n) una numerazione dei razionali in E, e definiamo μ come

$$\mu(A) := \sum_{n:\, q_n \in A} 2^{-n} \qquad \forall A \subset E.$$

  Sia $F := \mathbb{Q} \cap [0,1]$, allora $u \in W^{1,\infty}_m(E,\mu,F)$ (basta prendere $g \equiv 1$ e $N = E \setminus \mathbb{Q}$); per la densità dei razionali in $[0,1]$ abbiamo che per ogni aperto B, $B \subset E$ vale $\mu(B) > 0$. Allora non esiste una funzione nella classe di equivalenza di u in $W^{1,\infty}_m(E,\mu,F)$ che appartenga a $Lip(E,F)$. Infatti, sia $v \cong u$ in $W^{1,\infty}_m(E,\mu,F)$ allora per ogni $z \in E \setminus \mathbb{Q}$ $v(z) = q$ con $q \in \mathbb{Q}$. Fissata $L > 0$ v non è L-Lipschitziana. Sia $M = \max\{2, 2L\}$ preso $x \in E \cap B(z, \frac{1}{M}) \cap \mathbb{Q}$ avremo che

$$|x - q| > L\,|x - z|.$$

  allora v non è L-Lipschitziana. Poiché ciò vale per ogni $L > 0$ abbiamo la tesi.

- Sia ora $E = [0,1]$, $u := \chi_{\{1\}}$, e sia $\mu := \delta_0 + \delta_1$. Sia $F = \{0,1\}$, allora F è completo, $u \in W^{1,\infty}_m(E,\mu,F)$ (basta prendere $g \equiv 1$ e $N = (0,1)$), ma esiste almeno un aperto B tale che $\mu(B) = 0$ (per esempio $B = N$ o qualunque B che soddisfi $B \cap (0,1) = \emptyset$). Allora non esiste una funzione $v \cong u$ in $W^{1,\infty}_m(E,\mu,F)$. Infatti se v fosse Lipschitziana sarebbe anche continua, e l'immagine di E, connesso per archi, dovrebbe essere connessa per archi in F e quindi costante. Allora $v \ncong u$, perchè in ogni caso: $\|u - v\| = 1$.

Questi esempi dimostrano che le ipotesi della precedente proposizione sono necessarie.

Adesso proviamo un lemma che ci avvicina alla dimostrazione dell'equivalenza tra gli spazi di Sobolev classici e metrici nel caso euclideo.

Lemma 2.1.9. *Siano $E := \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $F := \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$, $u \in W^{1,p}_m(\Omega)$ e sia μ la misura di Lebesgue n-dimensionale allora ∇u, il gradiente distribuzionale di u, appartiene ad $L^p(\Omega)$. In particolare $W^{1,p}_m(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $A \subset \Omega$ un insieme aperto, per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ con $\|h\| = 1$ e per ogni $v \in C^1_c(A)$ definiamo il funzionale T_h come:

$$\begin{aligned} T_h(v) := \int_A u \, \langle \nabla v, h \rangle \, dx &= \int_A \lim_{t\to 0} u(x) \frac{v(x+th) - v(x)}{t} \, dx \\ &= \int_K \lim_{t\to 0} u(x) \frac{v(x+th) - v(x)}{t} \, dx \end{aligned}$$

con $K := \{x + th |\ x \in K',\ t \in [0,1]\}$ compatto e K' il supporto di v (compatto per definizione). Mostriamo che tale integrale ha senso e che per il teorema di convergenza dominata possiamo portare il limite fuori dall'integrale. Poiché u è una funzione a valori reali esiste un $\lambda > 0$ tale che l'insieme $E_\lambda := \{x \in E |\ u(x) \leq \lambda\}$ contiene un punto x_0. Allora

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0)| &\leq |x - x_0|(g(x) + g(x_0)) + \lambda \\ &\leq \operatorname{diam}(K) g(x) + \lambda; \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la definizione di spazio di Sobolev metrico e nell'ultimo passaggio abbiamo supposto $g(x_0) = 0$ (lecito a meno di scambiarla con una funzione nella sua classe di equivalenza in L^p). Fissata una successione $(t_n) \searrow 0$ consideriamo la successione $f_n(x) := u(x)\frac{v(x+t_n h)-v(x)}{t_n}$ che converge a $u(x) \langle \nabla v(x), h \rangle$, proviamo che $|f_n| \leq |F|$ con $F(x)$ sommabile. Il fattore $\frac{v(x+t_n h)-v(x)}{t_n}$ visto come funzione delle due variabili x e t è continuo, meno che in $t = 0$, dove può essere esteso per continuità. Allora in quanto funzione continua assumerà massimo M in K. Sia $F(x) = M \cdot (\operatorname{diam}(K) g(x) + \lambda)$: vale $|f_n(x)| \leq F(x)$ per costruzione; resta da dimostrare che $F(x)$ è sommabile.

$$\begin{aligned} \int_K F(x) \, dx &= M \lambda \mu(K) + M \cdot \operatorname{diam}(K) \int_K g(x) \, dx \\ &\leq M \ \lambda \ \mu(K) + M \ \operatorname{diam}(K) \left(\int_{K \cap \{g \leq 1\}} dx + \int_{K \cap \{g \geq 1\}} g(x)^p \, dx \right) \\ &\leq M \ \mu(K) \ (\lambda + \operatorname{diam}(K)) + M \ \operatorname{diam}(K) \ \|g\|_{L^p} < +\infty. \end{aligned}$$

Allora

$$
\begin{aligned}
T_h(v) &= \lim_{t\to 0}\int_K u(x)\frac{v(x+th)-v(x)}{t}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\int_K u(x)\frac{v(x+th)}{t}\,dx - \int_K u(x)\frac{v(x)}{t}\,dx\right) \\
[y=x+th] &= \lim_{t\to 0}\left(\int_K \frac{u(y-th)v(y)}{t}\,dy - \int_K \frac{u(x)v(x)}{t}\,dx\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\int_K v(x)\frac{u(x-th)-u(x)}{t}\,dx \\
[(2.1),\ d_E(x-th,x)=t] &\le \limsup_{t\to 0}\int_K \big(g(x-th)+g(x)\big)|v(x)|\,dx \\
[H\ddot{o}lder] &\le 2\ \|g\|_{L^p(A)}\|v\|_{L^q(A)},
\end{aligned}
$$

con q esponente coniugato di p. Se $p>1$, prendendo $A=\Omega$ possiamo estendere (in modo unico) il funzionale lineare T_h da $C_c^1(\Omega)$ a $L^q(\Omega)$. Sia $v\in L^q(\Omega)$, allora per densità esiste una successione $(v_n)\subset C_c^1(\Omega)$ tale che $v_n\to v$ in $L^q(\Omega)$. Applichiamo la stima trovata a v_m-v_n:

$$|T_h(v_m)-T_h(v_n)|\le 2\|g\|_{L^p(\Omega)}\|v_m-v_n\|_{L^q(\Omega)}$$

allora poiché v_n è di Cauchy (perché è convergente) anche $(T_h(v_n))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e per la completezza di $\mathbb{R}$ esiste un $w\in\mathbb{R}$ tale che $T_h(v_n)\to w$. Tale w non dipende dalla particolare (v_n) scelta, perché se $(u_n)\subset C_c^1(\Omega)$ è una successione che converge a v in $L^q(\Omega)$ allora

$$u_n-v_n\to 0\,in\ L^q(\Omega)\implies T_h(u_n)-T_h(v_n)\to 0\implies T_h(u_n)\to w.$$

Allora secondo la stima abbiamo $|T_h(v)|\le 2\ \|g\|_{L^p(A)}\|v\|_{L^q(A)}$. Per il *teorema di rappresentazione di Riesz* esiste $u_h\in L^p(\Omega)$ tale che $T_h(v)=\int_\Omega u_h v\ dx$. Allora per l'arbitrarietà di h otteniamo che le derivate parziali deboli di u appartengono a L^p e in questo caso la prova è completata. Se $p=1$ per la densità di $C_c^1(\Omega)$ in $C_0(\Omega)$ con un procedimento analogo al precedente si può estendere T_h a $C_0(\Omega)$. Poiché il duale di $C_0(\Omega)$ è l'insieme delle misure con segno ancora per il *teorema di rappresentazione di Riesz* esiste una misura con segno λ_h tale che $T_h(v)=\int_\Omega v\ d\lambda_h$. Grazie alla stima provata in precedenza abbiamo

$$|\lambda_h|(A)=\sup_{v\in C_0(A),\|v\|_\infty=1}\int_A v\ d\lambda_h\le 2\|g\|_{L^1(A)}\qquad \forall A\subset\Omega$$

questo implica che λ_h è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue n-dimensionale e per il *teorema di Radon-Nikodym* esiste un $u_h \in L^1(\Omega)$ tale che $T_h(v) = \int_\Omega u_h v \, dx$ e $|u_h| \leq 2g$, e la prova è completata anche nel caso $p = 1$. $\square$

Esempio 2.1.10. Abbiamo appena dimostrato che $W^{1,1}_m(\Omega) \cap L^1(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$. Ma esistono funzioni che appartengono a $W^{1,1}_m(\Omega)$ ma non a $L^1(\Omega)$. Un esempio di queste è $u \equiv \lambda \neq 0$: si ha $u \in W^{1,1}_m(\Omega)$ con qualunque g e N ma se Ω ha misura infinita u non è integrabile.

Osservazione 2.1.11. Siano (E, d_E) uno spazio metrico con diametro finito e μ è una misura di Borel positiva finita. Allora

$$W^{1,p}_m(E, \mu) \subset L^p(E).$$

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,p}_m(E, \mu)$. Fissato $y \in E \setminus N$ (con N come nella definizione 2.1), con $g(y) < \infty$, abbiamo

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)| \leq \operatorname{diam}(E)\,(g(x) + g(y)) + |u(y)|,$$

che come funzione di x appartiene ad $L^p(E)$. $\square$

2.2 Misure doubling e operatore massimale

Studieremo delle proprietà di media per funzioni su spazi metrici. Tali risultati dipendono da una proprietà di riscalamento della misura. In particolare risulta utile restringersi ad una particolare classe di misure di Borel dette doubling. Introducendo una naturale generalizzazione dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood per funzioni su spazi metrici, osserveremo che esso possiede delle proprietà funzionali del tutto simili a quelle dell'operatore classico su spazi euclidei nel caso in cui la misura sia doubling (per il caso reale vedi [14]). Questi risultati saranno utili per dimostrare il teorema di equivalenza.

Definizione 2.2.1 (misura doubling)**.** Una misura μ di Borel $\mu : \mathfrak{B}(E) \to [0, \infty]$ è detta *doubling* se è finita sui limitati ed esiste una costante C tale che

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq C\ \mu(B_r(x)) \quad \forall x \in E,\ \forall r > 0. \tag{2.2}$$

La miglior costante C che realizza (2.2) è chiatamata *costante doubling* di μ. Notiamo che tale C è sempre maggiore di 1.

Mostreremo ora una caratterizzazione di queste misure.

Teorema 2.2.2. *Una misura $\mu : \mathfrak{B}(E) \to [0, \infty]$ finita sui limitati è doubling se solo se esistono s, C' tali che*

$$\frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_R(y))} \geq C'\Big(\frac{r}{R}\Big)^s \tag{2.3}$$

per ogni $x, y \in E$ e per ogni $R \geq r > 0$ tali che $x \in B_R(y)$.

Dimostrazione.
($\Longleftarrow$) Da (2.3) prendendo $y = x$ e $R = 2r$ abbiamo

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq \frac{1}{C'}\Big(\frac{1}{2}\Big)^s \mu(B_r(x))$$

che è quanto volevamo.
($\Longrightarrow$) Per $i = 1, 2, \dots$, definiamo $R_i := 2^i r$ e sia $j := \min\{i | B_R(y) \subset B_{R_i}(x)\}$. Iterando (2.2) j volte otteniamo

$$\mu(B_R(y)) \leq \mu(B_{R_j}(x)) \leq C^j \mu(B_r(x)) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_R(y))} \geq C^{-j}$$

D'altra parte $B_R(y) \not\subset B_{R_{j-1}}(x)$ allora poiché $x \in B_R(y)$ abbiamo che $R_{j-1} \leq 2R$.

$$2^{j-1} r \leq 2R \quad \Longrightarrow \quad 2^j \leq \frac{4R}{r} \quad \Longrightarrow \quad j \leq \log_2\Big(\frac{4R}{r}\Big).$$

Vogliamo mostrare che esistono due costanti positive C' e s che soddisfano la relazione (2.3) e per fare ciò esibiremo s e C' tali che $C^{-j} \geq C'\big(\frac{r}{R}\big)^s$. Sia $C' := C^{-2}$, troviamo un $s > 0$ che soddisfi la disuguaglianza sopra:

$$\begin{aligned} & C^{-j+2} \geq \big(\frac{r}{R}\big)^s \\ \Longleftrightarrow \quad & -j + 2 \geq \log_C \Big(\frac{r}{R}\Big)^s = s \log_C \Big(\frac{r}{R}\Big) \\ \Longleftrightarrow \quad & j - 2 \leq -s \log_C \Big(\frac{r}{R}\Big) = s \log_C \Big(\frac{R}{r}\Big). \end{aligned}$$

Ma per quanto visto sopra

$$j \leq \log_2\Big(\frac{4R}{r}\Big) \quad \Longrightarrow \quad j - 2 \leq \log_2\Big(\frac{R}{r}\Big)$$

Allora basta che $s \log_C \left(\frac{R}{r}\right) \geq \log_2 \left(\frac{R}{r}\right)$ per avere la tesi. Quindi basta scegliere

$$s = \frac{\log_2\left(\frac{R}{r}\right)}{\log_C\left(\frac{R}{r}\right)} = \frac{\frac{\ln \frac{R}{r}}{\ln 2}}{\frac{\ln \frac{R}{r}}{\ln C}} = \frac{\ln C}{\ln 2}.$$

$\square$

Definizione 2.2.3 (operatore massimale di Hardy-Littlewood)**.** Date due misure μ e ν non negative su uno spazio metrico E, definiamo l'operatore massimale della misura ν rispetto alla misura μ come

$$M_\nu(x) := \sup_{r>0} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \quad \forall x \in E.$$

Inoltre definiamo $M_f := M_{f\mu}$ per ogni funzione Boreliana $f : \mathfrak{B}(E) \to [0, \infty]$ se la misura μ è chiara dal contesto.

Osservazione 2.2.4. Segue dalla definizione che

$$M_f(x) := M_{f\mu}(x) = \sup_{r>0} \frac{(f\mu)(B_r(x)}{\mu(B_r(x))} = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \ d\mu}{\mu(B_r(x))} = \sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} f \ d\mu.$$

Osservazione 2.2.5. L'operatore massimale M_f è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Sia f una funzione borelaina non negativa, allora la funzione $\fint_{B_r(x)} f \ d\mu$ è continua rispetto alle due variabili x e r. Poiché

$$\sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} f \ d\mu = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \fint_{B_r(x)} f \ d\mu$$

M_f risulta misurabile perché sup su un insieme numerabile di funzioni misurabili. □

Ci proponiamo di studiare per quali classi di funzioni l'operatore massimale ha proprietà rilevanti. Cominciamo mostrando che per una qualunque funzione non nulla $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $M_f \notin L^1(\Omega, m_n)$. Ma nel seguito vedremo che nel caso $p = 1$ abbiamo una stima debole (1-1). Nel caso $p \in (1, \infty)$ abbiamo un teorema dovuto a Hardy e Littlewood che ci dice che se $f \in L^p(E, \mu)$ allora anche M_f vi appartiene.

Proposizione 2.2.6. *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ non nulla allora $M_f \notin L^1(\Omega)$.*

Dimostrazione. Data $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ non nulla esiste un $R > 0$ tale che

$$\int_{B_R(0)} |f| \ dx = C \qquad \text{con } C > 0,$$

(se $0 \notin \Omega$ ci si può riportare in questa situazione con una traslazione, e la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni). Allora per definizione di operatore massimale di f rispetto alla misura di Lebesgue abbiamo:

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \ d\mu}{\mu(B_r(x))} \geq \frac{\int_{B_{R+|x|}(x)} f \ d\mu}{\mu(B_{R+|x|}(x))} \geq \frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))}.$$

Ci basta mostrare che $\frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))} \notin L^1(\Omega)$ per provare la tesi. Notiamo che

$$\frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))} = \frac{C}{\omega_n\ \left[R+|x|^n\right]} = \frac{C}{\omega_n\ |x|^n}\frac{|x|^n}{R+|x|^n}$$

ma la quantità $\frac{|x|^n}{R+|x|^n}$ è limitata e tende crescendo ad 1. Allora abbiamo

$$\int_E M_f\ dx \geq \int_{B_R(0)^c} \frac{C}{\omega_n\ |x|^n}\ \frac{1}{2}\ dx = \infty$$

quindi la tesi. $\square$

Teorema 2.2.7 (Stima debole $(1-1)$)**.** *Siano μ e ν due misure non negative su uno spazio metrico E. Se μ una misura doubling con supp$(\mu) = E$, allora esiste una costante K (dipendente dalla costante doubling di μ) per cui vale la seguente stima:*

$$\mu\Big(\{x \in E|\ M_\nu(x) > \lambda\}\Big) \leq \frac{K}{\lambda}\nu(E) \qquad \forall\lambda > 0. \tag{2.4}$$

Prima di procedere dimostiamo un lemma di ricoprimento.

Lemma 2.2.8. *Sia E uno spazio metrico e sia $\mathfrak{F}$ un'arbitraria famiglia di palle in E tali che* $\sup\{r(B)|B \in \mathfrak{F}\} < +\infty$ *con $r(B)$ raggio di B. Allora esiste una sottofamiglia di elementi disgiunti $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ tale che*

$$\bigcup_{B\in\mathfrak{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathfrak{F}'} \widehat{B}$$

con $\widehat{B(x,r)} := B(x, 5r)$.

Dimostrazione. Partizioniamo la famiglia $\mathfrak{F}$ in sottofamiglie a due a due disgiunte

$$\mathfrak{F}_j := \left\{B \in \mathfrak{F}\ \Big|\ \frac{R}{2^{j+1}} < r(B) \leq \frac{R}{2^j}\right\}$$

con $j \in \mathbb{N}$ e $R := \sup\{r(B) \mid B \in \mathfrak{F}\}$. Sia $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{o}}$ una sottofamiglia di elementi disgiunti massimale in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{o}}$, che esiste per il *lemma di Zorn* (infatti ogni catena ascendente rispetto all'inclusione ha un elemento massimale che è l'unione di tutti). Allora induttivamente scegliamo $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{j}}$ per $j \in \mathbb{N}$ come una famiglia di elementi disgiunti massimale in

$$\left\{B \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{j}}\ \big|\ B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{i=0}^{j-1} \mathfrak{F}'_{\mathfrak{i}}\right\}. \tag{2.5}$$

Posto $\mathfrak{F}' := \cup_{j=0}^{\infty}\mathfrak{F}'_j$, la famiglia $\mathfrak{F}'$ è disgiunta per costruzione. Ora scegliamo $B \in \mathfrak{F}_j$; affermiamo che esiste $B' \in \cup_{i=0}^{j}\mathfrak{F}'_i$ tale che $B \subset \hat{B}'$, il che concluderebbe la dimostrazione. Scegliamo $B' \in \cup_{i=0}^{j}\mathfrak{F}'_i$ tale che $B \cap B' \neq \emptyset$, un tale B' esiste per massimalità di $\mathfrak{F}'_j$; allora per definizione $r(B) \leq R\ 2^{-j}$ e $r(B') > R2^{-j-1}$. ne segue $r(\hat{B}') > 5R2^{-j-1} > R2^{-j+1} = 2\ r(B)$ il che implica $B \subset \hat{B}'$. $\square$

Osservazione 2.2.9. Se l'insieme E ha misura finita e ogni palla ha misura strettamente positiva la famiglia $\mathfrak{F}' := \cup_{j=0}^{\infty}\mathfrak{F}'_j$ ha cardinalità al più numerabile. Infatti gli insiemi $\mathfrak{F}'_i$ sono al più numerabili perché sono costituiti da insiemi disgiunti con misura strettamente positiva la cui unione è contenuta in E. Si conclude per additività della misura μ.

Possiamo ora dimostrare il teorema 2.2.7.

Dimostrazione. Scegliamo $\lambda > 0$, $R > 0$ e definiamo

$$\begin{aligned} M_{\nu,R}(x) &:= \sup_{0<r<R} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \qquad \forall x \in E \\ A_R &:= \big\{x \in E | M_{\nu,R}(x) > \lambda\big\}. \end{aligned}$$

Sia $\mathfrak{F}$ la famiglia di tutte le palle aperte $B_r(x)$ tale che $x \in A_R$, con $0 < r < R$, e $\nu(B_r(x)) > \lambda\mu(B_r(x))$. Dal lemma 2.2.8 esiste una sottofamiglia di elementi disgiunti $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ tale che $A_R \subset \cup_{B\in\mathfrak{F}'}\hat{B}'$ dove $\hat{B}$ è come nel lemma 2.2.8. Poiché μ è doubling e $5 < 2^3$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu(A_R) &\leq \mu\Bigg(\bigcup_{B\in\mathfrak{F}'} \hat{B}\Bigg) \leq \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \mu(\hat{B}) \\ [\mu\ \textit{doubling}]\ &\leq C^3 \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \mu(B) \leq \frac{C^3}{\lambda} \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \nu(B) \\ &\leq \frac{C^3}{\lambda}\nu(E) = \frac{K}{\lambda}\nu(E). \end{aligned}$$

Osserviamo che se $\nu(E) = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare, in caso contrario per l'ossservazione 2.2.9 la famiglia $\mathfrak{F}'$ è al più numerabile. Infine per l'arbitrarietà di R, otteniamo:

$$\mu\Big(\{x \in E|\ M_\nu(x) > \lambda\}\Big) \leq \lim_{R\to\infty} \mu(A_R) \leq \frac{K}{\lambda}\nu(E) \qquad \forall\lambda > 0.$$

$\square$

Utilizziamo la stima appena trovata per dimostrare la versione del teorema di Lebesgue nel caso metrico.

Teorema 2.2.10 (di Lebesgue)**.** *Siano E uno spazio metrico, μ una misura doubling su E e f una funzione in $L^1_{loc}(E,\mu)$. Allora abbiamo:*

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\,d\mu(y)=0 \tag{2.6}$$

per μ-quasi ogni $x\in E$.

Osservazione 2.2.11. Un punto che soddisfa (2.6) è detto *punto di Lebesgue per f*. Il teorema appena enunciato può dunque essere così riformulato: L'insieme l'insieme dei punti di E che non sono di Lebesgue per f ha misura nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di *Lusin* (teorema 1.3.6) e per il teorema di *Tietze* (teorema 1.3.7) per ogni $i\in\mathbb{N}$ possiamo trovare una funzione continua f_i tale che, posta $g_i=f-f_i$, vale $\|g\|_{L_1(E,\mu)}\leq 2^{-i}$. Definiamo

$$N_i=\Big\{x\in E|\ |g_i|>\Big(\frac{2}{3}\Big)^i\Big\}\cup\Big\{x\in E|\ M_{|g_i|}>\Big(\frac{2}{3}\Big)^i\Big\}.$$

Per la disuguaglianza di Markov (teorema 1.3.17) e per la formula (2.4) abbiamo

$$\mu(N_i)\leq\Big(\frac{3}{2}\Big)^i\|g_i\|_{L^1(E)}+K\Big(\frac{3}{2}\Big)^i\|g_i\|_{L^1(E)}\leq\Big(\frac{3}{4}\Big)^i(1+K)$$

con K come in (2.4), il cubo della costante doubling di μ. Definiamo ora

$$N:=\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{i\geq n}N_i.$$

$\mu(N)=0$, infatti

$$\begin{aligned}&\mu(\bigcup_{i\geq n}N_i)\leq(1+K)\Big(\frac{3}{4}\Big)^n\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^i=4\Big(\frac{3}{4}\Big)^n(1+K)\\ \Longrightarrow\quad&\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{i\geq n}N_i\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{i\geq n}N_i\Big)=\lim_{n\to\infty}4\Big(\frac{3}{4}\Big)^n(1+K)=0.\end{aligned}$$

Mostriamo che (2.6) vale per ogni $x\in E\setminus N$. Se $x\in E\setminus N$ allora $x\notin N_i$ per i sufficientemente grande (dipendente da x); allora $|g_i|\leq\big(\frac{2}{3}\big)^i$ e $M_{|g_i|}\leq\big(\frac{2}{3}\big)^i$

per i sufficientemente grande. Quindi per i opportunamente grande abbiamo:

$$\begin{aligned}\limsup_{r\downarrow 0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} &|f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \\ &\leq \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |f_i(y) - f_i(x)| \, d\mu(y) \\ &\qquad + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |g_i(y) - g_i(x)| \, d\mu(y) \\ &\qquad\qquad \leq 0 + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |g_i(y) - g_i(x)| \, d\mu(y)\end{aligned}$$

dove il primo addendo va a zero per la continuità di f_i. Ora per l'osservazione 2.2.4 e per le maggiorazioni fatte abbiamo

$$\begin{aligned}\limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} [|g_i(y)| + |g_i(x)|] \, d\mu(y) &\leq |g_i(x)| + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |g_i(y)| \, d\mu(y) \\ &\leq |g_i|(x) + M_{|g_i|}(x) \leq 2\Big(\frac{2}{3}\Big)^i\end{aligned}$$

che tende a zero quando i tende ad infinito. $\square$

Lemma 2.2.12 (Principio di Cavalieri)**.** *Sia E un insieme, $\mathfrak{M}$ una σ-algebra su E e μ una misura non negativa su $\mathfrak{M}$. Se u è una funzione integrabile e non negativa su E allora*

$$\int_E u \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{u > t\}) \, dt. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Supponiamo che μ sia σ-finita e che u sia sommabile, allora per ogni $x \in E$ abbiamo

$$u(x) = \int_0^{u(x)} dt = \int_0^\infty \chi\{u > t\} \, dt.$$

Per il teorema di *Fubini* (che possiamo utilizzare perché abbiamo supposto u sommabile) abbiamo

$$\int_E u(x) \, d\mu = \int_E \int_0^\infty \chi\{u > t\} \, dt \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{u > t\}) \, dt.$$

Se μ non è σ-finita, sia $A := \{u > 0\}$ e $\widetilde{\mu}$ la restrizione di μ ad A. Osserviamo che

$$\int_E u \, d\mu = \int_A u \, d\widetilde{\mu}$$

e

$$\mu(\{u > t\}) = \widetilde{\mu}(\{u > t\})$$

Allora se $\widetilde{\mu}$ è σ-finita concludiamo per quanto appena visto. In caso contrario per ogni successione di insiemi (X_i) tali che $\cup_i X_i = A$ esiste un indice k per cui $\mu(X_k) = \infty$. Consideriamo gli X_i della forma $X_i := \{u > i^{-1}\}$, allora esisterà un k tale che $\mu(\{u > k^{-1}\}) = \infty$. Allora

$$\int_0^\infty \mu(\{u > t\})\ dt \geq \int_0^{\frac{1}{k}} \mu(\{u > t\})\ dt \geq \frac{1}{k}\mu(\{u > \frac{1}{k}\}) = \infty$$

Ma allo stesso tempo $u \notin L^1(E, \mu)$, infatti

$$\int_E |u|\ d\mu \geq \int_{\{|u|>\frac{1}{k}\}} |u|\ d\mu \geq \frac{1}{k}\mu(\{|u| > \frac{1}{k}\}) \geq \frac{1}{k}\mu(\{u > \frac{1}{k}\}) = \infty$$

Allora poiché u è non negativa segue che $\int_E u\ d\mu = \infty$, e questo completa la dimostrazione. $\square$

Osservazione 2.2.13. Con il principio di Cavalieri abbiamo guadagnato un criterio di sommabilità per funzioni non negative. Una funzione f non negativa è sommabile se solo se il secondo membro di (2.7) è finito.

Corollario 2.2.14. *Sia E un insieme, $\mathfrak{M}$ una σ-algebra su E e μ una misura non negativa su $\mathfrak{M}$. Se u è una funzione integrabile e non negativa su E allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\int_E u^p\ d\mu = p\ \int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{u > t\})\ dt \tag{2.8}$$

per ogni $p > 1$.

Dimostrazione. Utilizzando la (2.7) sulla funzione u^p e con il cambio di variabili $s = t^{\frac{1}{p}}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_E u^p\ d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{u^p > t\})\ dt \\ &= \int_0^\infty \mu(\{u > t^{\frac{1}{p}}\})\ dt \\ &= p\ \int_0^\infty s^{p-1}\mu(\{u > s\})\ dt,\end{aligned}$$

quindi la tesi. $\square$

Il seguente risultato dovuto ad Hardy e Littlewood mostra come l'operatore massimale è una mappa continua da L^p in L^p per ogni $p > 1$.

Teorema 2.2.15 (di Hardy-Littlewood)**.** *Sia* (E, μ) *uno spazio metrico con una misura doubling, e sia* $f \in L^p(E, \mu)$ *con* $p > 1$ *o* $p = \infty$*. Allora*

$$\|M_f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \tag{2.9}$$

per una certa costante $C_p > 0$ *che dipende solo da* p*.*

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ si dimostra utilizzando la definizione di M_f, infatti

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \ d\mu}{\mu(B_r(x))} \leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \|f\|_{L^\infty} \ d\mu}{\mu(B_r(x))} = \|f\|_{L^\infty}$$

e passando al sup abbiamo la tesi.
Caso $p > 1$.
Osserviamo intanto che

$$|M_f| = \sup_{r>0} \frac{|\int_{B_r(x)} f \ d\mu|}{\mu(B_r(x))} \leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} |f| \ d\mu}{\mu(B_r(x))} = M_{|f|}$$

quindi possiamo supporre $f \geq 0$. Se $t \geq 0$ da $f \leq \left(f - \frac{t}{2}\right)^+ + \frac{t}{2}$ otteniamo

$$\begin{aligned} M_f = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \ d\mu}{\mu(B_r(x))} &\leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \left[\left(f - \frac{t}{2}\right)^+ + \frac{t}{2}\right] \ d\mu}{\mu(B_r(x))} \\ &= \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \left(f - \frac{t}{2}\right)^+ \ d\mu}{\mu(B_r(x))} + \frac{t}{2} = M_{\left(f - \frac{t}{2}\right)^+} + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\left\{M_f > t\right\} \subseteq \left\{M_{\left(f-\frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\right\}$$

e

$$\mu\Big(\left\{M_f > t\right\}\Big) \leq \mu\Big(\left\{M_{\left(f-\frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\right\}\Big)$$

Allora per (2.8) abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_E (M_f)^p \, d\mu &= p \int_0^\infty t^{p-1} \, \mu\Big(\big\{M_f > t\big\}\Big) \, dt \\
&\le p \int_0^\infty t^{p-1} \, \mu\Big(\big\{M_{\left(f-\frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\big\}\Big) \, dt \\
[t = 2s] &= p2^p \int_0^\infty s^{p-1} \, \mu\Big(\big\{M_{(f-s)^+} > s\big\}\Big) \, ds \\
(2.4) &\le p2^p \int_0^\infty s^{p-1} \frac{K}{s} \int_{\{f>s\}} (f(x) - s) \, d\mu \, ds \\
&\le Kp2^p \int_0^\infty s^{p-2} \int_E f(x) \chi_{\{f>s\}}(x) \, d\mu \, ds \\
(Tonelli) &\le Kp2^p \int_E f(x) \int_0^\infty s^{p-2} \, \chi_{\{f>s\}}(x) \, d\mu \, ds \\
&\le Kp2^p \int_E f(x) \int_0^{f(x)} s^{p-2} \, ds \, d\mu \\
&\le Kp2^p \int_E f(x) \Big[\frac{s^{p-1}}{p-1}\Big]_0^{f(x)} \, d\mu \\
&= K \, \frac{p}{p-1} \, 2^p \int_E f(x)^p \, d\mu \\
&= {C_p}^p \int_E f(x)^p \, d\mu,
\end{aligned}
$$

dove

$$
C_p = 2 \sqrt[p]{\frac{Kp}{p-1}} = 2 \sqrt[p]{\frac{C^3 p}{p-1}}
$$

dipende da p e C (la costante doubling di μ). Estreaendo la radice p-esima abbiamo la tesi. $\square$

2.3 Equivalenza tra gli spazi di Sobolev classici e metrici

In questo paragrafo utilizzeremo le proprietà dell'operatore massimale per vedere che, nel caso Euclideo, sussiste un'equivalenza tra gli spazi di Sobolev classici e metrici. In particolare dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, proveremo la seguente uguaglianza:

$$
W^{1,p}_m(\Omega) \cap L^p(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \qquad per \quad p \in (1, \infty)
$$

Lemma 2.3.1. *Sia $v \in W^{1,1}(B_r(x))$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Allora, se x è un punto di Lebesgue per v, vale la seguente:*

$$\int_{B_r(x)} |v(z) - v(x)|\ dz \leq\ \omega_n r^{n+1} \int_0^1 \Big(\fint_{B_{tr}(x)} |\nabla(v(z))|\ dz \Big)\ dt. \qquad (2.10)$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $x = 0$ (ci si può ricondurre a questo caso con il cambio di variabili $z' = z - x$). Dapprima supponiamo $v \in C^1(\overline{B_r(0)})$ (d'ora in poi utilizzeremo il simbolo B_r in luogo di $B_r(0)$). Allora, per uno $z \in B_r$ arbitrario e un $\lambda \in (0,1)$ anch'esso arbitrario, per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo

$$|v(z) - v(\lambda z)| = \left| \int_\lambda^1 \langle \nabla v(tz), z \rangle\ dt \right| \leq\ |z|\ \int_\lambda^1 |\nabla v(tz)|\ dt$$

e ponendo $z = \rho y$ con $\rho \geq 0$ e $y \in \partial B_1$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |v(z) - v(\lambda z)|\ dz &\leq \int_{B_r} |z|\ \int_\lambda^1 |\nabla v(tz)|\ dt\ dz \\
&= \int_{\partial B_r} \int_0^r \rho^{n-1} \big(\rho \int_\lambda^1 |\nabla v(t\rho y)|\ dt\big)\ d\rho\ d\sigma \\
[Tonelli] \qquad &= \int_\lambda^1 \int_{\partial B_1} \int_0^r \rho^n\ |\nabla v(t\rho y)|\ d\rho\ d\sigma\ dt \\
&\leq r\ \int_\lambda^1 \int_{\partial B_1} \int_0^r \rho^{n-1}\ |\nabla v(t\rho y)|\ d\rho\ d\sigma\ dt \\
[\rho' = t\rho] \qquad &= r\ \int_\lambda^1 \int_{\partial B_1} \int_0^{tr} (\frac{\rho'}{t})^{n-1}\ |\nabla v(\rho' y)|\ \frac{d\rho'}{t}\ d\sigma\ dt \\
&= r\ \int_\lambda^1 t^{-n} \int_{\partial B_1} \int_0^{tr} (\rho'^{n-1}\ |\nabla v(\rho' y)|\ d\rho'\ d\sigma\ dt \\
[z = \rho'\ y] \qquad &= r\ \int_\lambda^1 t^{-n} \int_{B_{tr}} |\nabla v(z)|\ dz\ dt \\
[\omega_n\ (tr)^n = m_n(B_{tr})] \qquad &= \omega_n\ r^{n+1} \int_\lambda^1 \fint_{B_{tr}} |\nabla v(z)|\ dz\ dt
\end{aligned}$$

La disuguaglianza ottenuta si può estendere ad una arbitraria $v \in W^{1,1}(B_r)$ grazie alla densità di $C^1(B_r)$ in $W^{1,1}(B_r)$. Infatti, sia $v \in W^{1,1}(B_r)$, allora esiste una successione $(v_k) \subset C^1(B_r)$ per cui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ : \|v - v_k\|_{W^{1,1}(B_r)} < \varepsilon\, \forall k \geq \nu.$$

Allora per ogni k vale

$$\int_{B_r} |v_k(z) - v_k(\lambda z)| \; dz \leq \omega_n \; r^{n+1} \int_\lambda^1 \fint_{B_{tr}} |\nabla v_n(z)| \; dz \; dt$$

e per densità abbiamo:

$$\begin{cases} v_k & \longrightarrow v \quad \; in \; L^1(B_r) \\ D^i v_k & \longrightarrow D^i v \quad in \; L^1(B_r) \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} |v(z) - v(\lambda z)| \; dz \\
&\quad \leq \int_{B_r} \big[|v(z) - v_k(z)| + |v_k(z) - v_k(\lambda z)| + |v_k(\lambda z) - v(\lambda z)|\big] \; dz \\
&\quad \leq 2 \; \varepsilon + \omega_n \; r^{n+1} \int_\lambda^1 \fint_{B_{tr}} |\nabla v_k(z)| \; dz \; dt \\
&\quad \leq 2 \; \varepsilon + \omega_n \; r^{n+1} \int_\lambda^1 \fint_{B_{tr}} \big[|\nabla v_n(z) - \nabla v(z)| + |\nabla v(z)|\big] \; dz \; dt \\
&\quad \leq 2 \; \varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon + \omega_n \; r^{n+1} \int_\lambda^1 \fint_{B_{tr}} |\nabla v(z)| \; dz \; dt
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε abbiamo l'estensione della disuguaglianza.
Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |v(z) - v(0)| \; dz &\leq \int_{B_r} |v(z) - v(\lambda z)| \; dz + \int_{B_r} |v(\lambda z) - v(0)| \; dz \\
&= \int_{B_r} |v(z) - v(\lambda z)| \; dz + \omega_n \; (r\lambda)^n \fint_{B_{\lambda r}} |v(x) - v(0)| \; \frac{dx}{\lambda^n} \\
&= \int_{B_r} |v(z) - v(\lambda z)| \; dz + \omega_n \; r^n \fint_{B_{\lambda r}} |v(x) - v(0)| \; dx
\end{aligned}$$

dove nel secondo addendo abbiamo fatto il cambio di variabile $x = \lambda z$. Ora, poiché 0 è punto di Lebesgue, al tendere di λ a 0 il secondo addendo tende a 0. Allora abbiamo

$$\int_{B_r} |v(z) - v(0)| \; dz \leq \omega_n \; r^{n+1} \int_0^1 \fint_{B_{tr}} |\nabla v(tz)| \; dz \; dt$$

e questa è la (2.10) con $x = 0$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio di estensione (vedi definizione 1.2.2) e $p > 1$ allora*

$$W_m^{1,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \qquad per \quad p \in (1, \infty)$$

Dimostrazione. L'inclusione $W_m^{1,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ per $p \in (1, \infty)$ è stata provata nel lemma 2.1.9 nel caso $p \geq 1$. Proviamo l'altra, ma nel caso $p > 1$. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v := Tu$, dove $T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ è una mappa continua di estensione (vedi [2]). Mostreremo che

$$|v(x) - v(y)| \leq C_n |x - y| \big(M_{|\nabla v|}(x) + M_{|\nabla v|}(y) \big)$$

dove $x, y \in \Omega$ sono punti di Lebesgue per v. Infatti poiché $\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\nabla v_{|\Omega} \in L^p(\Omega)$ e ponendo $g = \nabla v_{|\Omega}$ risultano soddisfatte le ipotesi di (2.1). Basta infatti prendere come $N \subset \Omega$ il complementare dei punti di Lebesgue per v, che per il teorema 2.2.10 ha misura nulla. Allora $M_{|\nabla u|}$ soddisfa la definizione 2.1 perché per il teorema 2.2.15 appartiene ad $L^p(E)$. Per provare la disuguaglianza occorre verificare che

$$\int_{B_r(x)} |v(z) - v(x)| \; dz \leq \omega_n r^{n+1} \; M_{|\nabla v|}(x) \tag{2.11}$$

e ciò discende dal lemma 2.3.1. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |v(z) - v(x)| \; dz &\leq \omega_n r^{n+1} \; \int_0^1 \Big(\fint_{B_{tr}(x)} |\nabla(v(z))| \; dz \Big) \; dt \\ &\leq \omega_n r^{n+1} \; M_{|\nabla v|}(x) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta dalla definizione di operatore massimale

$$\begin{aligned} M_{|\nabla v|}(x) := M_{f m_n}(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} |\nabla v(z)| \; dz}{m_n(B_r(x))} \\ \geq \int_0^1 \Big(\fint_{B_{tr}(x)} |\nabla(v(z))| \Big) \; dt \end{aligned}$$

Ora, dati x e y punti di Lebesgue distinti, consideriamo $r := |x - y|$ e $S := B_r(x) \cap B_r(y)$; utilizzando (2.11) otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_S \Big(|v(z) - v(x)| + |v(z) + v(y)| \Big) \; dz \\ &\qquad \leq \int_{B_r(x)} |v(z) - v(x)| \; dz + \int_{B_r(y)} |v(z) - v(y)| \; dz \\ &\qquad\qquad \leq \omega_n r^{n+1} \; \Big(M_{|\nabla v|}(x) + M_{|\nabla v|}(x) \Big). \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio esiste uno $\overline{z} \in S$ tale che

$$\fint_S \Big(|v(z) - v(x)| + |v(z) + v(y)| \Big) \; dz \geq \Big[|v(\overline{z}) - v(x)| + |v(\overline{z}) - v(y)| \Big].$$

Allora segue

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &\leq |v(\overline{z}) - v(x)| + |v(\overline{z}) - v(y)| \\ &\leq \frac{\omega_n r^{n+1}}{m_n(S)} \, \Big(M_{|\nabla v|}(x) + M_{|\nabla v|}(y) \Big) \\ &\leq \omega_n \frac{r^n}{m_n(S)} \; |x - y| \; \Big(M_{|\nabla v|}(x) + M_{|\nabla v|}(y) \Big) \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che $\frac{r^n}{m_n(S)}$ non dipende da r, come verificheremo tra poco. □

Osservazione 2.3.3. Sia S come sopra, allora $m_n(S) = H_n \; r^n$, con H_n una costante indipendente da r.

Dimostrazione. Calcoliamo il volume n-dimensionale di S. Per l'evidente simmetria del problema e per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, $m_n(S) = 2 \; m_n(B_r \cap \{x_n \geq \frac{r}{2}\})$; ora integriamo per fette. Fissato un valore $a \in [\frac{r}{2}, r]$ di x_n (vale in generale per ogni $a \in [-r, r]$), l'intersezione $B_r \cap \{x_n = a\}$ è una palla $(n-1)$-dimensionale di raggio $\sqrt{r^2 - a^2}$, infatti la palla n-dimensionale soddisfa la seguente relazione $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$. Allora

$$\begin{aligned} m_n(S) &= 2 \; m_n(B_r \cap \{x_n \geq \frac{r}{2}\}) \\ &= 2 \; \int_{\frac{r}{2}}^{r} \omega_{n-1} \, \Big(\sqrt{r^2 - x^2} \Big)^{n-1} \; dx \\ [x = r \cos t] &= 2 \; \omega_{n-1} \; \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^n \; \sin t \Big(\sqrt{1 - \cos^2 t} \Big)^{n-1} \; dt \\ &= 2 \; \omega_{n-1} \; r^n \; \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n t \; dt. \end{aligned}$$

Allora $\frac{m_n(S)}{r^n} = 2 \; \omega_{n-1} \; \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n t \; dt$ non dipende da r. □

Osservazione 2.3.4. Osserviamo che la tesi del teorema 2.3.2 non è verificata nel caso $p = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo $u(x) := -\frac{x}{|x| \log|x|}$ con $x \in \Omega := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avendola prolungata per continuità a 0 con valore nullo. Osserviamo intanto che la funzione u è dispari, nonché crescente e positiva su $(0, 1)$. Mostriamo che $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u(x)|\ dx = 2\ \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{\log(x)}\ dx \leq -\frac{2}{2\ \log\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\log 2} < \infty,$$

quindi $u \in L^1(\Omega)$. Verifichiamo che anche il gradiente distribuzionale di u appartiene a $L^1(\Omega)$. La derivata classica di u è

$$u'(x) = \frac{1}{|x|\ \log^2|x|}$$

Mostriamo che u' coincide q.o. con la derivata debole di u; vogliamo cioè che soddisfi la definizione 1.1.1 cioè che per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ valga

$$\int_\Omega u\ v'\ dx = -\int_\Omega u'\ v\ dx$$

Poiché u' ha una singolarità in 0 scriviamo:

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} u\ v'\ dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_\varepsilon^{1/2} u\ v'\ dx + \int_{-1/2}^{-\varepsilon} u\ v'\ dx\Big] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ [u\ v]_\varepsilon^{1/2} - \int_\varepsilon^{1/2} u'\ v\ dx + [u\ v]_{-1/2}^{-\varepsilon} - \int_{-1/2}^{-\varepsilon} u'\ v\ dx\Big]\end{aligned}$$

.

e notiamo che la valutazione al bordo tende a zero per ε che tende a 0 perché $u \in C^0(\Omega)$ e $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Noto il gradiente distribuzionale di u mostriamo che esso appartiene ad $L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u'(x)|\ dx &= 2\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ \log^2 x}\ dx = [y = \log x] = 2\ \int_{-\infty}^{\log\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2}\ dy \\ &= 2\ \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{y^2}\ dy = 2\ \Big[-\frac{1}{y}\Big]_{\log 2}^{\infty} = \frac{2}{\log 2} < \infty.\end{aligned}$$

Dunque $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Supponiamo ora per assurdo che $u \in W_m^{1,1}(\Omega)$ e che quindi esista una $g \in L^1(\Omega)$ e un $N \subset \Omega$ di misura nulla per cui vale

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|\big(g(x) + g(y)\big) \qquad x, y \in \Omega \setminus N$$

Allora dopo aver scelto $y = -x$ (posso supporre N simmetrico rispetto all'origine) per $x \in (0, \frac{1}{2}) \cap N$ abbiamo

$$|u(x) - u(-x)| = -\frac{2}{\log x} \leq 2x\big(g(x) + g(-x)\big)$$

ma d'altra parte

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) + g(-x))\ dx \geq \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{x\ \log x} \\
[y = \log x] \quad &= \int_{-\infty}^{\log \frac{1}{2}} -\frac{1}{y}\ dy = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{y}\ dy = +\infty.
\end{aligned}$$

Questo è un assurdo e prova la nostra asserzione. $\square$

Capitolo 3

Estensione dei teoremi classici

In questo capitolo dimostreremo estensioni, a spazi metrici, di alcuni teoremi classici della teoria degli spazi di Sobolev, osservando come, passando al caso di spazi euclidei, l'enunciato si riconduca alla forma classica.

3.1 $W_m^{1,p}(E, \mu)$ è uno spazio di Banach

Consideriamo uno spazio metrico (E, d_E) e una misura di Borel positiva tali che $\mathrm{diam}(E) < \infty$ e $\mu(E) < \infty$. Per $p > 1$ dotiamo $W_m^{1,p}(E, \mu)$ della seguente norma

$$\|u\|_{W_m^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \inf_{g \in M(u)} \|g\|_{L^p}. \tag{3.1}$$

Osservazione 3.1.1. Verifichiamo che $\|u\|_{W_m^{1,p}}$ è effettivamente una norma.

Dimostrazione. Sappiamo già che $\|u\|_{L^p}$ è una norma (ed è ben definita per l'osservazione 2.1.11), quindi ci basta mostrare che $\inf_{g \in M(u)} \|g\|_{L^p}$ è una seminorma. L'omegeneità discende direttamente dalle proprietà dell'estremo inferiore; non ci resta che dimostrare la disuguaglianza triangolare, ossia:

$$\inf_{g \in M(u+v)} \|g\|_{L^p} \leq \inf_{g \in M(u)} \|g\|_{L^p} + \inf_{g \in M(v)} \|g\|_{L^p}.$$

Osserviamo che se $g_u \in M(u)$ e $g_v \in M(v)$ si ha

$$\begin{aligned} |(u+v)(x) - (u+v)(y)| &\leq |u(x) - v(y)| + |v(x) - v(y)| \\ &\leq d_E(x, y) \left[(g_u(x) + g_u(y)) + (g_v(x) + g_v(y)) \right], \end{aligned}$$

a meno di un insieme di misura nulla N. Questo implica che $g_u + g_v \in M(u+v)$, quindi

$$\inf_{g \in M(u+v)} \|g\|_{L^p} \leq \|g_u + g_v\|_{L^p} \leq \|g_u\|_{L^p} + \|g_v\|_{L^p};$$

allora passando all'estremo inferiore sulle $g \in M(u)$ e sulle $g \in M(v)$ abbiamo quanto cercato.
Notiamo che $\inf_{g\in M(u)} \|g\|_{L^p}$ non è una norma: infatti è zero se u è una costante. $\square$

Questa è una generalizzazione della norma classica (vedi (1.1)) degli spazi di Sobolev; nel nostro caso, mancando una struttura differenziale, la norma del gradiente è rimpiazzata da un opportuno estremo inferiore.

Adesso mostriamo che, come nel caso classico (vedi la proposizione 1.1.2), lo spazio $\left(W^{1,p}_m(E,\mu), \|\cdot\|_{W^{1,p}_m}\right)$ è di Banach.

Teorema 3.1.2. *Se $p > 1$ lo spazio $\left(W^{1,p}_m(E,\mu), \|\cdot\|_{W^{1,p}_m}\right)$ è di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}_m(E,\mu)$. Dalla definizione di $\|\cdot\|_{W^{1,p}_m}$ esiste una $f \in L^p$ tale che $(f_n)_n$ converge in L^p. Proviamo che $f \in W^{1,p}_m$ e che la convergenza è in $W^{1,p}_m$. Sia $(f_{n_i})_i$ una sottosuccessione che converge puntualmente a f tale che $\|f_{n_i} - f_n\|_{W^{1,p}_m} < 2^{-i}$, allora per ogni i esiste una $g_i \in L^p$ per cui vale

$$\left|\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)(x) - \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)(y)\right| \le d_E(x,y)\left(g_i(x) + g_i(y)\right),$$

e $\|g_i\|_{L^p} < 2^{-i}$. Se $h := \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ abbiamo $\|h\|_{L^p} < 1$.
Segue che se $j > i$ abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\left(f_{n_j} - f_{n_i}\right)(x) - \left(f_{n_j} - f_{n_i}\right)(y)\right| &\le d_E(x,y)\left(\sum_{n=1}^{j} g_n(x) + \sum_{n=1}^{j} g_n(y)\right)\\ &\le d_E(x,y)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)\right).\end{aligned}$$

Passando al limite per j che tende ad infinito segue che

$$\left|\left(f - f_{n_i}\right)(x) - \left(f - f_{n_i}\right)(y)\right| \le d_E(x,y)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)\right),$$

da cui

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le \left|\left(f - f_{n_i}\right)(x) - \left(f - f_{n_i}\right)(y)\right| + |f_{n_i}(x) - f_{n_j}|\\ &\le d_E(x,y)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) + \bar{g}_i(x) + \bar{g}_i(y)\right)\end{aligned}$$

ove $\bar{g}_i \in M(f_{n_i})$. Dunque $f \in W^{1,p}_m(E,\mu)$. Resta da dimostrare che $(f_n)_n$ converge ad f in $W^{1,p}_m$ (e non solo in L^p). Per ipotesi $\|f_n - f_m\|_{W^{1,p}_m} < \varepsilon$ se $n, m > \nu$; allora esiste una successione $(g_{n,m}) \in M(f_n - f_m)$, tale che

$$\|f_n - f_m\|_{L^p} + \|g_{n,m}\|_{L^p} < \varepsilon.$$

In particolare

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| \leq d_E(x,y)\left[g_{n,m}(x) - g_{n,m}(y)\right]. \tag{3.2}$$

Fissato n, esiste una sottosuccessione $(g_{n,m_k})_k \subseteq (g_{n,m})_m$ tale che

$$g_{n,m_k} \rightharpoonup g_n \qquad in \ \ L^p(E),$$

e vale $\|g_n\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Per il lemma 1.3.18,

$$g_{n,m_k}(x) + g_{n,m_k}(y) \rightharpoonup g_n(x) + g_n(y) \qquad in \ \ L^p(E \times E),$$

e per il lemma 1.3.19 segue che

$$\liminf_{k\to\infty}\{g_{n,m_k}(x) + g_{n,m_k}(x)\} \leq g_n(x) + g_n(y).$$

Passando al limite nella relazione (3.2) scritta per $m = m_k$, abbiamo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x) - f_n(y) + f(y)| &\leq d_E(x,y)\left[\liminf_{k\to\infty}\left(g_{n,m_k}(x) + g_{n,m_k}(y)\right)\right] \\ &\leq d_E(x,y)\left[g_n(x) + g_n(x)\right], \end{aligned}$$

da cui $g_n \in M(f_n - f)$ e $\|g_n\|_{L^p} \leq \varepsilon$.

Segue allora che, per un opportuno indice ν_ε,

$$\|f_n - f\|_{W^{1,p}_m} \leq \|f_n - f\|_{L^p} + \|g_n\|_p < 2\,\varepsilon, \quad se \ \ n \geq \nu_\varepsilon,$$

e con ciò la tesi è dimostrata. □

3.2 Disuguaglianza di Poincaré

Teorema 3.2.1 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Sia $u \in W^{1,p}_m(E,\mu,F)$ con $p \geq 1$ e $g \in M(u)$, allora vale*

$$\inf_{z\in F}\int_{B_r(x)}\left(d_F(u(y),z)\right)^p \, d\mu \leq 4^p\ r^p \int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu \tag{3.3}$$

per ogni $x \in E$ e per ogni $r > 0$.

Dimostrazione. Scegliamo $w \in B_r(x)$ per cui vale

$$g^p(w)\ \mu(B_r(x)) \le \int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu. \tag{3.4}$$

Un tale w esiste; infatti supponendo per assurdo che un tale w non esista avremmo

$$g^p(w) > \fint_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu \qquad \forall w \in B_r(x)$$

allora integrando su $B_r(x)$ avremmo

$$\int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu > \int_{B_r(x)} \fint_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu = \int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu,$$

il che è assurdo. Prendiamo ora $\overline{z} := u(w)$, allora

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in F} \int_{B_r(x)} \big(d_F(u(y), z)\big)^p\ d\mu &\le \int_{B_r(x)} \big(d_F(u(y), \overline{z})\big)^p\ d\mu \\
(2.1) \qquad &\le \int_{B_r(x)} \big(d_E(y, w)\big)^p\ \big(g(y) + g(w)\big)^p\ d\mu \\
&\le (2r)^p \int_{B_r(x)} \big(g(y) + g(w)\big)^p\ d\mu \\
&\le (4r)^p \int_{B_r(x)} \Big(\frac{g(y)}{2} + \frac{g(w)}{2}\Big)^p\ d\mu \\
[\mathit{convessità}] \qquad &\le 2\ 4^{p-1}\ r^p \int_{B_r(x)} \big(g^p(y) + g^p(w)\big)\ d\mu \\
(3.4) \qquad &\le 4^p\ r^p \int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu
\end{aligned}$$

cioè la tesi. □

Ora mostreremo un corollario che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema di immersione di Sobolev.

Corollario 3.2.2. *Sia $u \in W^{1,p}_m(E, \mu)$ con $p > 1$. Allora vale*

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - \overline{u}_r|^p\ d\mu \le 2^p \inf_{z\in\mathbb{R}} \int_{B_r(x)} |u(y) - z|^p\ d\mu \le 8^p\ r^p \int_{B_r(x)} g^p(y)\ d\mu, \tag{3.5}$$

dove $\overline{u}_r := \fint_{B_r(x)} u(y)\ d\mu$.

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{R}$; per convessità abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} |u(y) - \overline{u}_r|^p \, d\mu &\leq \int_{B_r(x)} \big[|u(y) - z| + |z - \overline{u}_r|\big]^p \, d\mu \\ &\leq \; 2^{p-1} \bigg[\int_{B_r(x)} |u(y) - z|^p \, d\mu + \int_{B_r(x)} |z - \overline{u}_r|^p \, d\mu \bigg].\end{aligned}$$

Ora stimiamo la quantità $\int_{B_r(x)} |z - \overline{u}_r|^p \, d\mu$

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} |z - \overline{u}_r|^p \, d\mu &= \int_{B_r(x)} \left| \fint_{B_r(x)} u(y) \, d\mu - z \right|^p d\mu \\ &= \int_{B_r(x)} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \bigg(\int_{B_r(x)} \big(u(y) - z\big) \, d\mu \bigg) \right|^p d\mu \\ [H\ddot{o}lder] &\leq \int_{B_r(x)} \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \bigg(\int_{B_r(x)} \big|u(y) - z\big|^p d\mu \bigg)^{\frac{1}{p}} \Big(\mu(B_r(x)) \Big)^{\frac{1}{q}} \right|^p d\mu \\ &= \mu(B_r(x)) \, \frac{1}{\big(\mu(B_r(x))\big)^p} \, \big(\mu(B_r(x))\big)^{\frac{p}{q}} \int_{B_r(x)} \big|u(y) - z\big|^p \, d\mu \\ &= \int_{B_r(x)} \big|u(y) - z\big|^p \, d\mu,\end{aligned}$$

dove q è l'esponente coniugato di p. Allora

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - \overline{u}_r|^p \, d\mu \leq 2^p \int_{B_r(x)} |u(y) - z|^p \, d\mu.$$

Passando all'estremo inferiore e dal teorema 3.2.1 abbiamo la tesi:

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - \overline{u}_r|^p \, d\mu \leq 2^p \inf_{z \in \mathbb{R}} \int_{B_r(x)} |u(y) - z|^p \, d\mu \leq 8^p \, r^p \int_{B_r(x)} g^p(y) \, d\mu.$$

□

Osservazione 3.2.3. Restringendo la disuguaglianza appena dimostrata al caso euclideo ritroviamo la disuguaglianza di Poincaré classica [14]:

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - \bar{u}_r|^p \, dy \leq C \, r^p \int_{B_r(x)} |\nabla u(y)|^p \, dy.$$

dove la costante C dipende dalla dimensione n, mentre nel nostro caso la costante è 8^p. Di nuovo $\inf_{M(u)} \|g\|_{L^p}$ gioca il ruolo della norma del gradiente di u.

3.3 Teorema di immersione di Sobolev

È giunta l'ora di dimostrare il teorema di immersione di Sobolev.

Teorema 3.3.1 (Teorema di immersione di Sobolev). *Sia $u \in W^{1,p}_m(E,\mu)$, con $p \geq 1$ e siano $d := diam(E) < \infty$ e $\mu := \mu(E) < \infty$. Supponiamo che esistano $b, s > 0$ tali che $\mu(B_r) > br^s$ per ogni palla di raggio $r > 0$. Allora posto $\tilde{u} := \fint_E u \, d\mu$ abbiamo:*

1. *Se $p < s$*
$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \,\Big(\frac{1}{d}\|u\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\Big),$$
dove $p^* := \frac{sp}{s-p}$.

2. *Se $p = s$, esistono due costanti C_1 e C_2 tale che*
$$\fint_E \exp\Big(\frac{C_1 \ \mu^{\frac{1}{s}}}{d} \ \frac{u - \tilde{u}}{\|g\|_{L^p}}\Big) \ d\mu \leq C_2.$$

3. *Se $p > s$, esiste una costante C dipendente da p, s e b per cui vale:*
$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty} \leq C \ \mu^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \ \|g\|_{L^p}.$$

Osservazione 3.3.2. Il teorema nei suoi tre punti ci garantisce, proprio perché lo spazio è di misura finita, le seguenti immersioni:

1. se $p < s$, $W^{1,p}_m$ si immerge in L^q per ogni $q \in [1, p^*]$,
2. se $p = s$, $W^{1,p}_m$ si immerge in L^q per ogni $q \in [1, \infty)$,
3. se $p > s$, $W^{1,p}_m$ si immerge in L^∞ e quindi in ogni L^q con $q < \infty$.

Notiamo che s per sua definizione gioca un ruolo analogo a quello della dimensione dello spazio. Nel caso classico ritroviamo le stesse immersioni a meno di sostituire s con la dimensione n. Inoltre la disuguaglianza del punto 1 ricorda la disuguaglianza di Sobolev-Nirenberg-Gagliardo nel caso classico (vedi [14], [15]).

Dimostrazione. Sappiamo che esiste $N \subset E$ con $\mu(N) = 0$ tale che
$$|u(x) - u(y)| \leq d_E(x, y) \ \Big(g(x) + g(y)\Big) \forall x, y \in \ E \setminus N$$

Tralasciamo il caso $\|g\|_{L^p(E)} = 0$, dove $g = 0$ q.o. da cui u è costante q.o. In questo caso particolare la tesi è banalmente verificata (anche se il secondo punto perde di significato). Possiamo supporre allora $\|g\|_{L^p(E)} > 0$. Sostituendo eventualmente $g(x)$ con $g(x)+\lambda$, con λ sufficientemente grande, possiamo supporre

$$g(x) \geq \frac{1}{2\mu^{\frac{1}{p}}} \, \|g\|_{L^p(E)}. \tag{3.6}$$

Infatti per λ grande la condizione

$$g(x) + \lambda \geq \frac{1}{2\mu^{\frac{1}{p}}} \, \lambda \left\| 1 + \frac{g}{\lambda} \right\|_{L^p(E)},$$

è verificata perché a secondo membro il coefficiente di λ è limitato e tende al valore $\frac{1}{2}$ per λ che tende a ∞. Notiamo che se $g \in M(u)$ allora anche $g + \lambda \in M(u)$. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$E_k := \left\{ g \leq 2^k \right\} \quad e \quad a_k := \sup_{E_k} |u|.$$

Osserviamo che per la condizione (3.6) se 2^{k+1} è sufficientemente piccolo, e ciò dipende da g, allora $E_k = \emptyset$. Da $E_k \subset E_{k+1}$ abbiamo $a_k \leq a_{k+1}$, in più u è 2^k-Lipschitziana su E_k. Scegliamo $x \in E_k$ e consideriamo gli r per cui vale:

$$r > \left(\frac{\mu(E \setminus E_{k-1})}{b} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Allora $B_r(x) \cap E_{k-1} \neq \emptyset$; altrimenti avremmo $B_r(x) \subset E \setminus E_{k-1}$, ma allora avremmo, per la scelta di r,

$$\mu(E \setminus E_{k-1}) < b \, r^s < \mu(B_r(x)) \leq \mu(E \setminus E_{k-1}). \quad \text{Assurdo.}$$

Allora esiste $y \in E_{k-1}$ tale che $d_E(x,y) \leq r$, quindi

$$|u(x)| \leq |u(y)| + |u(x) - u(y)| \leq |u(y)| + 2^{k+1} \, r \leq a_{k-1} + 2^{k+1} \, r.$$

Passando all'estremo suoeriore sugli $x \in E_k$ abbiamo

$$a_k \leq a_{k-1} + 2^{k+1} \, r.$$

Infine facendo il limite per $r \to \left(\frac{\mu(E \setminus E_{k-1})}{b} \right)^{\frac{1}{s}}$ abbiamo

$$a_k \leq a_{k-1} + 2^{k+1} \left(\frac{\mu(E \setminus E_{k-1})}{b} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Ricordando che $g \geq 2^{k-1}$ su $E \setminus E_{k-1}$, esiste C tale che

$$a_k \leq a_{k-1} + C\ 2^{k(1-\frac{p}{s})}\ \|g\|_{L^p}^{\frac{p}{s}} : \tag{3.7}$$

Infatti

$$\|g\|_{L^p}^{\frac{p}{s}} = \left(\int_E g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\int_{E\setminus E_{k-1}} g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \geq 2^{(k-1)\ \frac{p}{s}}\mu(E \setminus E_{k-1})^{\frac{1}{s}},$$

dunque la (3.7) vale con $C = 2^{1+p/s}\ b^{-1/s}$. Iterando (3.7) per ogni $k_0 < k$ abbiamo

$$a_k \leq a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s}\ \sum_{i=k_0}^{k} 2^{i(1-p/s)}. \tag{3.8}$$

Ora definiamo

$$k_0 = \min\left\{i \mid \mu(E_{i-1}) < \frac{\mu}{2} \leq \mu(E_i)\right\}.$$

Tale minimo esiste perché $\mu(E_k) = 0$ se 2^k è sufficientemente piccolo e $\lim_{k\to+\infty} \mu(E_k) = \mu$. Con questa scelta di k_0 abbiamo

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^p}^{p} &= \int_E g^p\ d\mu \geq \int_{E\setminus E_{k_0-1}} g^p\ d\mu \\ &\geq 2^{p(k_0-1)}\ \Big(\mu - \mu(E_{k_0-1})\Big) \geq 2^{p(k_0-1)}\ \frac{\mu}{2}.\end{aligned}$$

Allora

$$\frac{\|g\|_{L^p(E)}}{\mu^{\frac{1}{p}}} \geq 2^{k_0-1}\ 2^{-1/p} = 2^{k_0}\ 2^{-1-1/p} \Longrightarrow \frac{C'\ \|g\|_{L^p(E)}}{\mu^{1/p}} \geq 2^{k_0},$$

con $C' = 2^{1+1/p}$. Ricordando che $g(x) \geq \frac{1}{2\mu^{1/p}}\ \|g\|_{L^p(E)}$ otteniamo

$$\frac{C'\ \|g\|_{L^p(E)}}{\mu^{1/p}} \geq 2^{k_0} \geq \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{2\ \mu^{\frac{1}{p}}} \tag{3.9}$$

dove la seconda disuguaglianza è valida perché per $x \in E_{k_0}$ abbiamo $2^{k_0} \geq g(x) \geq \frac{\|g\|_{L^p(E)}}{2\ \mu^{1/p}}$. Ora stimiamo a_{k_0}:

$$\begin{aligned}a_{k_0} &:= \sup_{x\in E_{k_0}} |u(x)| \leq \sup_{x\in E_{k_0}} |u(x) - u(y)| + |u(y)| \\ &\leq \sup_{x\in E_{k_0}} [d_E(x-y)\ (g(x) + g(y))] + |u(y)| \leq d\ (2^{k_0} + 2^{k_0}) + |u(y)|.\end{aligned}$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $y \in E_{k_0}$, quindi possiamo passare all'estremo inferiore e ottenere

$$\begin{aligned} a_{k_0} &\le \inf_{E_{k_0}} |u| + d\ 2^{k_0+1} \\ &\le \frac{\|u\|_{L^p}}{\mu(E_{k_0})^{1/p}} + 2\ d\ C'\ \frac{\|g\|_{L^p}}{\mu^{1/p}} \\ &\le \frac{\|u\|_{L^p}}{\big(\mu/2\big)^{1/p}} + 2\ d\ C'\ \frac{\|g\|_{L^p}}{\mu^{1/p}} \\ &\le \frac{2\ C'}{\mu^{1/p}}\bigg(\|u\|_{L^p} + d\ \|g\|_{L^p}\bigg). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tutto cio premesso, consideriamo ora separatamente i tre punti del teorema.

1. Se $p < s$ da (3.8) per $k > k_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} a_k &\le a_{k_0} + C\|g\|_{L^p}^{p/s} \sum_{i=-\infty}^{k} 2^{i(1-p/s)} \\ &\le a_{k_0} + C\|g\|_{L^p}^{p/s}\ 2^{k(1-p/s)} \sum_{i=-\infty}^{k} 2^{(i-k)(1-p/s)}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} \sum_{i\le k} 2^{(i-k)(1-p/s)} &= \sum_{i\le k} \left[2^{(1-p/s)}\right]^{(i-k)} = \sum_{i\le 0} \left[2^{(1-p/s)}\right]^{i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{1-p/s}}\right]^{i} = \frac{1}{1-(1/2)^{1-p/s}} := \sigma > 1 \end{aligned}$$

abbiamo

$$a_k \le a_{k_0} + C\ \sigma\|g\|_{L^p}^{p/s}\ 2^{k(1-p/s)}$$

Inoltre per convessità abbiamo

$$\begin{aligned} a_k^{p^*} &\le \Big(a_{k_0} + C\ \sigma\|g\|_{L^p}^{p/s}\ 2^{k(1-p/s)}\Big)^{p^*} \\ &\le \gamma\Big(a_{k_0}^{p^*} + \|g\|_{L^p}^{p^*p/s}\ 2^{p^*\ k(1-p/s)}\Big) \\ &= \gamma\Big(a_{k_0}^{p^*} + \|g\|_{L^p}^{p^*p/s}\ 2^{pk}\Big) \qquad \forall k \ge k_0 \end{aligned}$$

dove $\gamma := \max\{2^{p^*-1}\ C^{p^*}\ \sigma^{p^*}, 1\}$.

Ponendo $\mu_k := \mu(E_k \setminus E_{k-1})$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int_E |u|^{p^*}\ d\mu &\le \sum_{k<k_0} a_k^{p^*}\ \mu_k + \sum_{k\ge k_0} a_k^{p^*}\ \mu_k \\ &\le a_{k_0}^{p^*} \sum_{k<k_0} \mu_k + \sum_{k\ge k_0} \gamma\Big(a_{k_0}^{p^*} + \|g\|_{L^p}^{p^*p/s}\ 2^{pk}\Big)\mu_k \\ &\le \gamma a_{k_0}^{p^*}\ \mu + \gamma\ \|g\|_{L^p}^{p^*p/s} \sum_{k\ge k_0} 2^{pk}\ \mu_k \\ &\le \gamma a_{k_0}^{p^*}\ \mu + \gamma\ \|g\|_{L^p}^{p^*p/s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{pk}\ \mu_k\end{aligned}$$

ma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{pk}\ \mu_k = 2^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{p(k-1)}\ \mu_k \le 2^p\ \|g\|_{L^p}^p.$$

Allora, continuando la catena di disuguaglianze precedenti otteniamo

$$\int_E |u|^{p^*}\ d\mu \le \gamma a_{k_0}^{p^*}\ \mu + 2^p\ \gamma\ \|g\|_{L^p}^{p^*p/s+p} \le 2^p\ \gamma\Big(a_{k_0}^{p^*}\ \mu + \|g\|_{L^p}^{p^*}\Big).$$

Infine estraendo la radice p-esima abbiamo grazie alla subadditività della funzione $x \to x^\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p^*}} &\le \Big[2^p\ \gamma\Big(a_{k_0}^{p^*}\ \mu + \|g\|_{L^p}^{p^*}\Big)\Big]^{1/p^*} \\ &\le 2^{p/p^*}\ \gamma^{1/p^*}\Big(a_{k_0}\ \mu^{1/p^*} + \|g\|_{L^p}\Big) \\ &\le 2^{p/p^*}\ \gamma^{1/p^*}\Big[2\ C'\Big(\|u\|_{L^p} + d\ \|g\|_{L^p}\Big)\ \mu^{1/p^*-1/p} + \|g\|_{L^p}\Big] \\ &\le \delta\Big(\frac{\|u\|_{L^p}}{d} + \|g\|_{L^p}\Big)\end{aligned}$$

con $\delta := 2^{p/p^*}\ \gamma^{1/p^*}\Big[1 + 2\ d\ C'\ \mu^{1/p^*-1/p}\Big]$. E quindi la tesi.

2. Se $p = s$ è sufficiente mostrare la tesi per $\|g\|_{L^p} = d = \mu = 1$ e $\tilde{u} = 0$, infatti chiamando $K := (\frac{C_1\ \mu^{1/s}}{d\ \|g\|_{L^p}})$ abbiamo

$$⨍_E \exp\Big(\frac{C_1\ \mu^{\frac{1}{s}}}{d}\ \frac{u-\tilde{u}}{\|g\|_{L^p}}\Big)\ d\mu \le C_2 \iff ⨍_E \exp(K\ u)\ d\mu \le C_2\ \exp(K\ \tilde{u}).$$

In particolare basta mostrare che

$$⨍_E \exp(C_1\ |u|)\ d\mu \le C_2$$

perché $\fint_E \exp(C_1\ u)\ d\mu \leq \fint_E \exp(C_1\ |u|)\ d\mu$.
Sotto le ipotesi fatte, iterando (3.7) otteniamo

$$a_k \leq k\ C\ + a_0 \qquad \forall k \geq 1.$$

Scegliendo C_1 tale che $\exp(C\ C_1) = 2^s$ abbiamo (essendo $\mu = 1$):

$$\begin{aligned}
\fint_E e^{C_1\ |u|}\ d\mu &\leq \sum_{k\leq 0} e^{C_1\ a_k}\ \mu_k + \sum_{k\geq 1} e^{C_1\ a_k}\ \mu_k \\
&\leq e^{C_1 a_0}\ \mu + \sum_{k\geq 1} e^{C_1\ C_2\ k + C_1\ a_0}\ \mu_k \\
&\leq e^{C_1 a_0}\ + e^{C_1 a_0} \sum_{k\geq 1} 2^{ks}\ \mu_k \\
&= e^{C_1 a_0}\ \left(1 + \sum_{k\geq 1} 2^{ks}\ \mu_k\right) \\
&= e^{C_1 a_0}\ \left(1 + 2^p \sum_{k\geq 1} 2^{(k-1)p}\ \mu_k\right) \\
&\leq e^{C_1 a_0}\ \Big(1 + 2^p\ \|g\|_{L^p}^p\Big) \\
&= e^{C_1 a_0}\ \Big(1 + 2^p\Big).
\end{aligned}$$

Ora stimiamo a_0.
Se $k_0 \geq 0$ allora $a_0 \leq a_{k_0}$ e per (3.10)

$$a_{k_0} \leq \frac{2\ C'}{\mu^{1/p}}\Big(\|u\|_{L^p} + d\ \|g\|_{L^p}\Big) = 2\ C'\Big(\|u\|_{L^p} + 1\Big).$$

Se invece $k_0 \leq 0$ sempre da (3.10)

$$a_{k_0} \leq \inf_{E_0} |u| + 2 \leq \frac{\|u\|_{L^p}}{\mu(E_0)^{1/s}} + 2.$$

Dunque bisogna stimare le quantità $\mu(E_0)^{-1/s}$ e $\|u\|_{L^p}$ nel caso $k_0 < 0$ e $\|u\|_{L^p}$. Per la prima stima abbiamo, per definizione di k_0 e poiché $k_0 < 0$,

$$\mu(E_0) \geq \mu(E_{k_0}) \geq \frac{1}{2} \implies \mu(E_0)^{-1/s} \leq 2^{1/s}.$$

Per la seconda utilizzando il corollario della disuguaglianza di Poincaré, ossia la stima (3.5). Abbiamo:

$$\|u\|_{L^p} \leq 8\ d\ \|g\|_{L^p} = 8.$$

Ciò prova la tesi.

3. Se $p > s$ allora, essendo $2^{1-p/s} < 1$, da (3.8) abbiamo

$$\begin{aligned}
a_k &\leq a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s} \sum_{i=k_0}^{k} 2^{i(1-p/s)} \\
&\leq a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s} \sum_{i=k_0}^{\infty} 2^{i(1-p/s)} \\
&= a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s}\ 2^{k_0(1-p/s)} \sum_{i=k_0}^{\infty} 2^{(i-k_0)(1-p/s)} \\
&= a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s}\ 2^{k_0(1-p/s)}\ \frac{1}{1-2^{1-p/s}} \\
&= a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p}^{p/s}\ \frac{2^{k_0(1-p/s)}}{1-2^{1-p/s}}.
\end{aligned}$$

Da (3.9) abbiamo

$$2^{k_0(1-p/s)} \leq \frac{\|g\|_{L^p(E)}^{1-p/s}}{2^{1-p/s}\ \mu^{1/p-1/s}};$$

allora

$$\begin{aligned}
a_k &\leq a_{k_0} + C\ \|g\|_{L^p(E)}^{p/s}\ \frac{\|g\|_{L^p(E)}^{1-p/s}}{2^{1-p/s}\ \mu^{1/p-1/s}}\ \frac{1}{1-2^{1-p/s}} \\
&\leq a_{k_0} + \frac{C\ \|g\|_{L^p(E)}}{2^{1-p/s}(1-2^{1-p/s})}\ \mu^{1/s-1/p}.
\end{aligned}$$

Supponendo che $\tilde{u} = 0$ (lecito perché $v := u - \tilde{u}$ soddisfa $\tilde{v} = 0$), e usando (3.10),

$$a_k \leq \frac{2\ C'}{\mu^{1/p}}\Big(\|u\|_{L^p} + d\ \|g\|_{L^p}\Big) + \frac{C\ \|g\|_{L^p}}{2^{1-p/s}\ (1-2^{1-p/s})}\ \mu^{1/s-1/p}$$

e utilizzando la disuguaglianza di Poincaré come nel punto 2 otteniamo;

$$\begin{aligned}
a_k &\leq \frac{2\ C'}{\mu^{1/p}}\Big(9d\ \|g\|_{L^p}\Big) + \frac{C\ \|g\|_{L^p}}{2^{1-p/s}(1-2^{1-p/s})}\ \mu^{1/s-1/p} \\
&= \Big[\frac{2\ C'}{\mu^{1/s}}\ 9d\ + \frac{C}{2^{1-p/s}(1-2^{1-p/s})}\Big]\ \|g\|_{L^p}\ \mu^{1/s-1/p}.
\end{aligned}$$

Poiché k è arbitario, si ottiene

$$\|u\|_\infty \leq \Big[\frac{2\ C'}{\mu^{1/s}}\ 9d\ + \frac{C}{2^{1-p/s}(1-2^{1-p/s})}\Big]\ \|g\|_{L^p}\ \mu^{1/s-1/p},$$

cioè la tesi dato che $\tilde{u} = 0$.

□

3.4 Teorema di Rellich

Proveremo ora il teorema di Rellich. Iniziamo con un lemma.

Lemma 3.4.1. *Sia μ una misura finita su Ω. Supponiamo che una successione (u_i) sia limitata in $L^r(\Omega)$ per qualche $r > 1$, e $\lim_{i\to\infty} u_i(x) = u(x)$ μ-q.o. su Ω. Allora (u_i) converge in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, r)$*

Dimostrazione. Dimostreremo che la successione (u_i) è di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Sia

$$u_{i,t} := u_i(x)\ \chi_{\{|u_i \le t|\}}(x), \qquad t > 0,\ x \in \Omega.$$

Allora per ogni $t > 0$ abbiamo

$$\|u_i - u_j\|_{L^p} \le \|u_i - u_{i,t}\|_{L^p} + \|u_{i,t} - u_{j,t}\|_{L^p} + \|u_{j,t} - u_j\|_{L^p}.$$

Facendo il limite per $i, j \to \infty$ il secondo addendo tende a zero per convergenza dominata: infatti per ogni i e j si ha $|u_{i,t} - u_{j,t}| \le 2t$, e $2t$, per ogni $t > 0$, è sommabile perché Ω ha misura finita. Allora applicando la definizione di $u_{i,t}$, la disuguaglianza di Hölder e la disuguaglianza di Markov abbiamo

$$\begin{aligned}
\|u_i - u_{i,t}\|^p_{L^p} &= \int_\Omega |u_i - u_{i,t}|^p\ d\mu\ = \int_{\{|u_i > t|\}} |u_i|^p\ d\mu \\
&\le \left(\int_{\{|u_i|>t\}} |u_i|^r\ d\mu \right)^{p/r} \mu(\{|u_i| > t\})^{1-p/r} \\
&= \|u_i\|^p_{L^r(\{|u_i|>t\})}\ \mu(\{|u_i| > t\})^{1-p/r} \\
&\le \|u_i\|^p_{L^r}\ t^{-r(1-p/r)}\ \|u_i\|^{r(1-p/r)}_{L^r} \\
&= \|u_i\|^r_{L^r}\ t^{p-r}.
\end{aligned}$$

Ricordando che $t > 0$ e $r > p$, per $t \to \infty$ abbiamo la tesi. □

Teorema 3.4.2 (di Rellich)**.** *Siano E uno spazio metrico compatto, μ una misura finita di Borel su E e $p > 1$. Supponiamo che esistano delle costanti $b, s > 0$ tali che $\mu(B_r) > br^s$ per ogni palla $B_r \subset E$ di raggio r. Se $(u_n) \subset W^{1,p}_m(E, \mu)$ è una successione per cui vale la seguente proprietà:*

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \int_E \Big[|u_h(x) - z_0|^p\ +\ g_h(x)^p \Big]\ d\mu \le C < \infty \tag{3.11}$$

dove $z_0 \in \mathbb{R}$ e $g_h \in M(u_h)$, allora esistono una sottosuccessione (u_{h_k}) e un elemento $u \in W^{1,p}_m(E, \mu)$ a cui (u_{h_k}) converge $\mu -$ q.o. su E, e vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |u_{h_k}(x) - u(x)|^q\ d\mu = 0 \qquad \forall q < p^* \tag{3.12}$$

dove

$$p^* := \begin{cases} \frac{sp}{s-p} & \textit{se } p < s \\ +\infty & \textit{se } p \geq s. \end{cases}$$

Inoltre esiste una $g \in M(u)$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} g_{h_k} = g \qquad \textit{debolmente in } L^p. \tag{3.13}$$

Osservazione 3.4.3. Anche questo risultato trova il suo analogo nel caso classico: vedi [15].

Dimostrazione. Definiamo per $j \in \mathbb{N}$ l'insieme:

$$E_{j,h} := \Big\{ x \in E \setminus N_h \;\Big|\; g_h(x) \leq \frac{j}{2} \Big\},$$

dove N_h e g_h sono come in (2.1) relativamente a $u_h \in W^{1,p}_m(E,\mu)$. Notiamo che per definizione $u_{h|E_{j,h}}$ è j-Lipschitziana. Costruiamo $u_{j,h}$ tale che coincida con u_h su $E_{j,h}$ e sia estesa in modo j-Lipschitziano sul resto (possiamo farlo per il teorema 1.3.8)[1]. Dalle nostre ipotesi e facile vedere che esistono delle costanti C_1, C_2 tali che

$$\|u_{j,h}\|_{L^\infty} \leq C_1 + C_2\; j \;\; :$$

infatti

$$\|u_{j,h}\|_{L^\infty} \leq \sup_{x\in E} |u_{j,h}(x)| \leq \sup_{x\in E} |u_{j,h}(x) - u_{j,h}(y)| + |u_{j,h}(y)| \leq d\; j + C$$

ove d è il diametro di E. Come conseguenza di ciò la successione $(u_{j,h})$ è equilimitata e poiché le funzioni sono tutte Lipschitziane sono anche equicontinue, quindi fissato $j > 0$ la famiglia $(u_{j,h})_h$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Quindi esiste una sottosuccessione $(u_{1,h(1,k)})_k$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{1,h(1,k)} =: w_1 \;\; \textit{uniformemente su } E.$$

Similmente, la sottofamiglia $(u_{2,h(1,k)})_k \subset (u_{2,h})_h$ soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Allora esiste una sottosuccessione di indici $(h(2,k))_k \subset (h(1,k))_k$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{2,h(2,k)} =: w_2 \;\; \textit{uniformemente su } E.$$

[1] In generale per funzioni a valori in spazi metrici una tale estensione, che mantenga la costante di Lipschitz, non è possibile, al contrario di quanto afferma [13], si veda [12] e [11] che (pp. 46-47) propone un controesempio per una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$.

Inoltre possiamo supporre $h(2,2) > h(1,1)$. Iterando questo argomento induttivamente possiamo trovare una famiglia di indici $(h(j,k))_{j,k}$ tale che

$$(h(j+1,k))_k \subset (h(j,k))_k,$$

la mappa $j \mapsto h(j,j)$ è strettamente crescente, e fissto j

$$\lim_{k\to\infty} u_{i,h(j,k)} =: w_i \;\; uniformemente \; su \; E \; \forall i \leq j. \tag{3.14}$$

Proveremo che la sottofamiglia $(u_{h(i,i)}) \subset (u_h)$ ha le proprietà desiderate. Scelto $q < p$ osserviamo che per l'arbitrarietà di j e per convessità abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_E |u_{h(i,i)} - u_{h(i',i')}|^q \, d\mu \\
&\quad \leq 3^{q-1} \int_E |u_{h(i,i)} - u_{j,h(i,i)}|^q \, d\mu \\
&\qquad + 3^{q-1} \int_E |u_{j,h(i,i)} - u_{j,h(i',i')}|^q \, d\mu \\
&\qquad\quad + 3^{q-1} \int_E |u_{j,h(i',i')} - u_{h(i',i')}|^q \, d\mu.
\end{aligned}$$

Se $i, i' > j$ per costruzione abbiamo $h(i,i), h(i',i') \in ((h(j,k)))_{k=1}^{\infty}$ e per (3.14) abbiamo

$$\lim_{i\to\infty} u_{j,h(i,i)} =: w_j \;\; uniformemente \; su \; E \; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che $u_{j,h(i,i)}$ e $u_{j,h(i',i')}$ hanno stesso limite e allora:

$$\limsup_{i,i'\to\infty} \int_E |u_{h(i,i)} - u_{h(i',i')}|^q \, d\mu \leq 2 \cdot 3^{q-1} \limsup_{i\to\infty} \int_E |u_{h(i,i)} - u_{j,h(i,i)}|^q \, d\mu.$$

D'altra parte per costruzione abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_E |u_{h(i,i)} - u_{j,h(i,i)}|^q \, d\mu &= \int_{\{g_{h(i,i)} > j/2\}} |u_{h(i,i)} - u_{j,h(i,i)}|^q \, d\mu \\
&\leq 2^{q-1} \int_{\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\}} |u_{h(i,i)} - z_0|^q \, d\mu + 2^{q-1} \int_{\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\}} |z_0 - u_{j,h(i,i)}|^q \, d\mu \\
&\leq 2^{q-1} \mu\left(\left\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\right\}\right)^{1-q/p} \left(\int_{\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\}} |u_{h(i,i)} - z_0| \, d\mu\right)^{q/p} \\
&\quad + 2^{q-1} \mu\left(\left\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\right\}\right) (K_1 + K_2 j).
\end{aligned}$$

Giustifichiamo in dettaglio l'ultimo passaggio: al primo addendo abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder, perché dalla (3.12) segue che $|u_{h(i,i)} - z_0| \in L^p(E)$; al secondo addendo abbiamo sfruttato la j-Lipschitzianità di $u_{j,h(i,i)}$: scegliendo $y \in E$, per ogni $x \in \left\{g_{h(i,i)} > \frac{j}{2}\right\}$ si ha:

$$\begin{aligned}|z_0 - u_{j,h(i,i)}(x)|^q &\leq \left[|z_0 - u_{j,h(i,i)}(y)| + |u_{j,h(i,i)}(y) - u_{j,h(i,i)}(x)|\right]^q \\ &\leq [C' + dj]^q \leq C(q)C'^q + C(q)d^q j^q,\end{aligned}$$

dove $d = diam(E)$ è finito perché E è compatto, e poiché $C(q)$ può assumere i valori 1 o 2^{q-1} se q è rispettivamente minore o uguale ad 1 (subadditività) o maggiore di 1 (convessità). Ora dalla disuguaglianza di Markov abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_E |u_{h(i,i)} - u_{j,h(i,i)}|^q \; d\mu \leq 2^{q-1} \left(\frac{j}{2}\right)^{q-p} \|g_{h()}\|^{p-q}_{L^p(E)} \|u_{h(i,i)} - z_0\|^q_{L^p(E)} \\ + 2^{q-1} \left(\frac{j}{2}\right)^{-p} \|g_{h()}\|^p_{L^p(E)} (K_1 + K_2 j^q).\end{aligned}$$

I due addendi vanno a zero come j^{q-p}, uniformemente rispetto ad i, quando $j \to \infty$. Allora per l'arbitrarietà di j si ha che

$$\limsup_{i,i' \to \infty} \int_E |u_{h(i,i)} - u_{h(i',i')}|^q \; d\mu = 0,$$

dunque $(u_{h(i,i)})$ è di Cauchy in L^q per ogni $q < p$. Ne segue che, a meno di considerare una sottosuccessione, esiste una funzione u tale che

$$\lim_{i \to \infty} u_{h(i,i)} = u \qquad\qquad \mu - q.o.$$

Mostriamo ora che (u_h) è limitata in L^{p^*}, da questo applicando il lemma 3.4.1 abbiamo (3.12).

Dall'ipotesi (3.11) abbiamo

$$\begin{aligned}&\|u_h\|^p_{L^p} \leq 2^{q-1} \int_E [|u_h(x) - z_0|^p + |z_0|^p] \; d\mu \leq 2^{p-1}(C + K) < \infty \\ &\|g_h\|^p_{L^p} \leq C < \infty.\end{aligned}$$

Allora se $p < s$ per il teorema di immersione di Sobolev abbiamo $\|u_h\|_{L^{p^*}} \leq C_1 < \infty$. Se $p = s$ per il teorema di immersione abbiamo $\int_E \exp K_1|u| \; d\mu \leq K_2 < \infty$, e quindi per ogni $q \geq 1$ abbiamo:

$$\int_E |u|^q \; d\mu \leq \int_{\{|u|<1\}} |u|^{\lfloor q \rfloor} \; d\mu + \int_{\{|u| \geq 1\}} |u|^{\lfloor q \rfloor + 1} \; d\mu \leq K_2 \left(\frac{(\lfloor q \rfloor + 1)!}{K_1^{\lfloor q \rfloor + 1}} + \frac{\lfloor q \rfloor !}{K_1^{\lfloor q \rfloor}} \right),$$

dunque $\|u_h\|_{L^p}$ è limitata per ogni $q < \infty$. Se infine $p > s$ per il teorema di immersione abbiamo

$$\|u_h\|_{L^\infty} \leq \|u_h - \tilde{u}\|_{L^\infty} + \tilde{u} \leq C\mu^{1/s-1/p}\|g_h\|_{L^p} + \tilde{u} < \infty$$

quindi in ogni caso $(u_h)_h$ è limitata in L^{p^*}; come annunciato dal lemma 3.4.1 abbiamo (3.12). Per provare la (3.13) possiamo assumere a meno di sottosuccessioni che (g_h) converga debolmente in L^p ad una certa funzione g, infatti per l'ipotesi (3.11) le g_h sono equilimitate e L^p per $p > 1$ è riflessivo. Usando il lemma di *Mazur* esiste una successione di combinazioni convesse delle g_h che converge in L^p a g e da quella possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione che converge μ-q.o. a g. Allora per una opportuna somma finita, a coefficienti positivi, abbiamo

$$\sum \alpha_i g_i \in M(\sum \alpha_i g_i),$$

pertanto passando al limite otteniamo che $g \in M(u)$. $\square$

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, P. Tilli (2004), *Topics in Analysis in Metric Spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, USA.

[2] R. A. Adams, J. J. F. Fournier (2003), *Sobolev Spaces*, Pure and applied Mathematics series, Academic Press.

[3] H. Brezis (2010), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York.

[4] S. Lang (1993), *Real and Functional Analysis 3ed.*, Springer, New York.

[5] N. J. Dunford, J. T. Schwartz (1958), *Linear operators. Part 1*, Interscience Publischers, Inc, New York.

[6] N. L. Carothers (2004), *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press.

[7] P. Hajlasz (1996), *Sobolev Spaces on an Arbitrary Metric Space*, Potential Analysis 5, pp. 403-415, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[8] B. Franchi, P. Hajlasz, P. Koskela (1999), *Definitions of Soblev classes on metric spaces*, Annales de l'institut Fourier, tome 49, no. 6, pp. 1903-1924.

[9] P. Koskela (2003), *Metric Sobolev Spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, July 17-22, 2002, Vol. 7. Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, Praha, pp. 133-147.

[10] J. Li, M. Yasuda (2004), *Lusin's theorem on fuzzy measure spaces*, Fuzzy Sets and Systems 146, pp. 121–133.

[11] J. H. Wells, L. R. Williams (1976), *Embeddings and extensions in analysis*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2, Springer, New York.

[12] A. Brudnyi, Y. Brudnyi (2006), *Extension of Lipschitz Functions Defined on Metric Subspaces of Homogeneous Type*, Rev. Mat. Complut. 19, no. 2, pp. 347–359.

[13] E. Matouskova (2000), *Extensions of Continuous and Lipschitz Functions*, Canad. Math. Bull. Vol. 43 (2), pp. 208–217.

[14] M. Giaquinta, L. Martinazzi (2004) *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*, Edizioni della Normale, Pisa.

[15] L. C. Evans, R. F. Grariepy (1992), *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Bocaraton (USA).

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Paolo Acquistapace, relatore di questa tesi, per i tre anni di Analisi insieme; per le ore di ricevimento (tante) che mi ha concesso negli anni, per la disponibilità, la pazienza e l'aiuto fornitomi nella stesura di questo lavoro.
Ringrazio tutti coloro che mi hanno aiutato e consigliato nella redazione di questo documento, in particolare Ghena, Oscar, Umberto, Marco e Daniele.
Ringrazio di cuore la mia famiglia per il loro amore; per avermi sostenuto, spronato, incoraggiato e per aver creduto in me.
Ringrazio in particolare i miei genitori per i valori che mi hanno trasmesso, i quali sono per me, costante punto di riferimento.
Ringrazio i miei parenti per il loro affetto e la loro incessante presenza.
Ringrazio i miei amici perché mi sono stati sempre vicino, sapendo abbattere le distanze che ci separavano.
Ringrazio i colleghi per il continuo confronto, la disponibile collaborazione (vedi i quaderni di Dario) e per la vera amicizia dimostrata.
Ringrazio la famiglia Di Marco per essere stato un aiuto insostituibile e per avermi sostenuto nei momenti difficili del mio cammino universitario.
Ringrazio la XII per esserci sempre stata.
Ringrazio la famiglia Muolo per l'affetto donatomi e per essere stata per me una seconda famiglia.
Infine ringrazio *Te* che mi ha supportato e sopportato, consolato e incoraggiato, che hai creduto in me e mi hai dato fiducia, che mi hai riportato alla realtà quando necessario e mi sei stata vicino più di chiunque altro... Grazie.