Esercizio 1 Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, definiamo per ogni $x \in [a, b]$ le seguenti quantità:

$$m(x) = \inf\{f(\xi) : \ \xi \in [a, x]\}, \quad M(x) = \sup\{f(\xi) : \ \xi \in [a, x]\}.$$

Si provi che m, M sono funzioni continue su $[a, b]$.

Risoluzione Osserviamo anzitutto che dalla definizione segue subito che m è una funzione decrescente in $[a, b]$ mentre M è una funzione crescente in $[a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b]$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Sia allora $x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$: se $x < x_0$ possiamo scrivere

$$m(x_0) = \min \Big\{ m(x), \ \inf\{f(\xi) : \xi \in [x, x_0]\} \Big\}.$$

D'altra parte per ogni $\xi \in [x, x_0]$ si ha

$$f(\xi) > f(x_0) - \varepsilon > f(x) - 2\varepsilon,$$

e quindi

$$m(x_0) \geq \min\{m(x), \ f(x) - 2\varepsilon\} \geq m(x) - 2\varepsilon.$$

D'altronde, per monotonia si ha anche $m(x_0) \leq m(x)$, e pertanto

$$m(x) \geq m(x_0) \geq m(x) - 2\varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0[.$$

Analogamente, se $x > x_0$ abbiamo la stessa relazione con x e x_0 scambiati:

$$m(x_0) \geq m(x) \geq m(x_0) - 2\varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \cap]x_0, x_0 + \delta[,$$

ossia

$$m(x) + 2\varepsilon \geq m(x_0) \geq m(x) \quad \forall x \in [a, b] \cap]x_0, x_0 + \delta[.$$

Si conclude allora che

$$|m(x) - m(x_0)| \leq 2\varepsilon \qquad \forall x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

e dunque m è continua in x_0.
In modo perfettamente analogo si prova che anche M è continua in x_0.

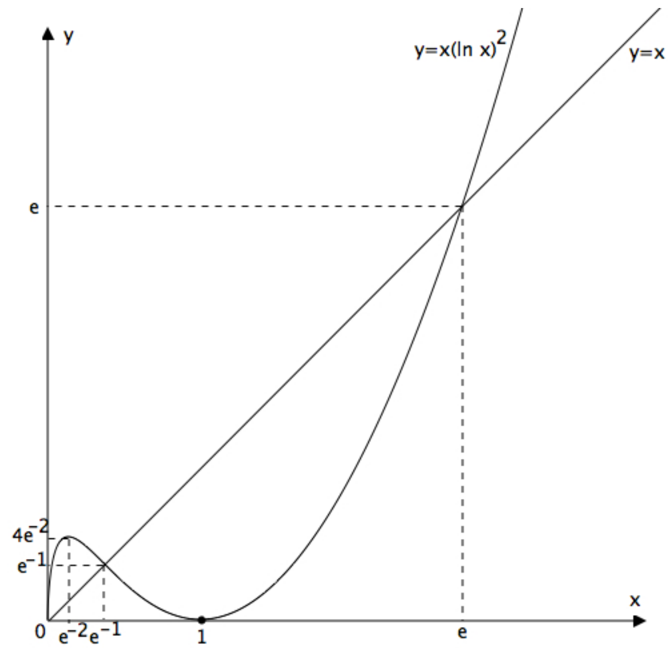
Esercizio 2 (difficile) Posto

$$f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

si descriva il comportamento della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n), & n \in \mathbb{N}, \\ a_0 = \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda > 0$.



I possibili limiti della successione sono le soluzioni $L \geq 0$ dell'equazione $L = L(\ln L)^2$, che sono i valori 0, e^{-1}, e, $+\infty$.
In particolare, se $\lambda = 0$, oppure $\lambda = e^{-1}$, oppure $\lambda = e$, allora la successione è costante e quindi converge al corrispondente valore.
Osserviamo poi che se $\lambda = 1$ si ha $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Similmente, si vede facilmente che esiste una successione $\{\lambda_k\}$ di valori iniziali, crescente e contenuta in $]1, e[$, tale che, se $a_0 = \lambda_k$, allora a_n decresce per $0 \leq n \leq k$ fino al valore $a_k = e^{-1}$, dopodiché si ha $a_n = e^{-1}$ per ogni $n \geq k$; similmente, esiste una successione $\{\mu_k\}$ di valori iniziali, decrescente e contenuta in $]0, e^{-1}[$, tale che, se $a_0 = \mu_k$, allora a_n cresce per $0 \leq n \leq k$ fino al valore $a_k = e^{-1}$, dopodiché si ha $a_n = e^{-1}$ per ogni $n \geq k$. Queste successioni si

possono costruire graficamente, costruendo le consuete spezzate fra $y = x$ e $y = f(x)$ e procedendo "all'indietro", con partenza dal punto (e^{-1}, e^{-1}) e andando verso destra per i λ_k e verso sinistra per i μ_k.
A parte questi casi particolari, il comportamento di $\{a_n\}$ al variare di λ è piuttosto complicato. Se, ad esempio, $0 < \lambda < e^{-1}$ e $\lambda \in]\mu_{k+1}, \mu_k[$, allora a_n cresce per $0 \leq n \leq k$, allorché $a_k > e^{-1}$; a questo punto a_{k+1} cade nuovamente in $]0, e^{-1}[$ e il ciclo ricomincia, o arrestandosi dopo un numero finito di passi (se a_{k+1} coincide con qualche μ_n), oppure dando luogo ad una oscillazione infinita attorno al punto e^{-1} e senza che vi sia convergenza.
Se $e^{-1} < \lambda < 1$, si ha subito $a_1 \in]0, e^{-1}[$ e si ricade nel caso precedente. Se $1 < \lambda < e$, e $\lambda \in]\lambda_{k+1}, \lambda_k[$, si ha una situazione analoga: a_n decresce per $0 \leq n \leq k$, allorché $a_k < e^{-1}$; a questo punto si ricade nuovamente nel caso precedente.
Infine se $\lambda > e$ allora si verifica agevolmente per induzione che a_n è crescente e quindi il suo unico limite possibile è $+\infty$.