Modelli matematici ambientali

Lista di esercizi n. 3

1. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve, ove a è un parametro positivo:

   (i) $\Gamma = \{x = a\,e^t \cos t,\ y = a\,e^t \sin t,\ z = a\,e^t,\ t \in [0, a]\}$;

   (ii) $\Gamma = \{x = t^2,\ y = t^3,\ |t| \leq 2\}$;

   (iii) $\Gamma = \{r = e^\vartheta,\ \vartheta \in [-4\pi, 4\pi]\}$;

   (iv) $\Gamma = \{y = \cosh x,\ x \in [-a, a]\}$;

   (v) $\Gamma = \{x = a \cos t + \cos at,\ y = a \sin t - \sin at,\ t \in [0, 2\pi]\}$;

   (vi) $\Gamma = \{r = \vartheta^2,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\}$.

2. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di funzioni:

   (i) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$, $\Gamma =$ segmento di estremi $(0,0)$, $(1,2)$;

   (ii) $\displaystyle\int_\Gamma x^2 y\, ds$, $\Gamma = \{4x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$;

   (iii) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)^2\, ds$, $\Gamma = \{r = e^{2\vartheta},\ \vartheta \in [0, \pi]\}$;

   (iv) $\displaystyle\int_\Gamma (x + y) ds$, $\Gamma = \left\{x = t,\ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, z = t^3,\ 0 \leq t \leq 1\right\}$;

   (v) $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$, $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x = y\}$;

   (vi) $\displaystyle\int_\Gamma |y|\, ds$, $\Gamma = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$.

3. Calcolare i seguenti integrali curvilinei di campi vettoriali:

   (i) $\displaystyle\int_{+\Gamma} \big[(x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy\big]$, $\Gamma = \{y = x^2,\ x \in [1, 2]\}$, verso delle x crescenti;

   (ii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} [(2 - y)dx + x\, dy]$, $\Gamma = \{x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]\}$, verso delle t crescenti;

   (iii) $\displaystyle\int_{+\Gamma} (2xy\, dx - x^2\, dy)$, $\Gamma = \left\{y = \sqrt{\frac{x}{2}},\ 0 \leq x \leq 2\right\}$, verso delle x crescenti;

   (iv) $\displaystyle\int_{+\Gamma} \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$, verso antiorario;

(v) $\displaystyle\int_{+\Gamma}(y\,dx+z\,dy+x\,dz)$, $\Gamma=\{(R\sin\alpha\cos\vartheta,\ R\sin\alpha\sin\vartheta, R\cos\alpha):0\le\vartheta\le 2\pi\}$, verso delle t crescenti (α fissato);

(vi) $\displaystyle\int_{+\Gamma}(xy\,dx+y^2\,dy+zx)dz$, $\Gamma=\{x^2+y^2+z^2=2x,\ z=x,\ y>0\}$, verso da $(0,0,0)$ a $(1,0,1)$.

4. Verificare che i seguenti campi vettoriali sono conservativi nell'aperto dove sono definiti, e scriverne un potenziale:

   (i) $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{1}{x+y},\dfrac{1}{x+y}\right)$;

   (ii) $\mathbf{F}(x,y)=\big(e^{x-y}(1+x+y),e^{x-y}(1-x-y)\big)$;

   (iii) $\mathbf{F}(x,y)=f(x^2+y^2)\,(x,y)$, con $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ continua;

   (iv) $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)$;

   (v) $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy^2-y^2\cos x,1-2y\,\sin x+3x^2y^2,3e^z)$;

   (vi) $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{(x,2y,3z)}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}}+(a\,\cos x,b\,\sin y,c\,e^z)$ (a,b,c fissati).

5. Calcolare l'area delle seguenti superfici:

   (i) $\Sigma=\{x^2+y^2=r^2,\ mx\le z\le nx\}$, ove $n>m>0$;

   (ii) $\Sigma=\{y^2+z^2=2x,\ y^2\le x\le 1\}$;

   (iii) $\Sigma=\left\{x^2+y^2=1,\ 0\le y\le\dfrac{1}{4},\ z\ge 1-\dfrac{y}{4}\right\}$;

   (iv) $\Sigma=$grafico della funzione $(x,y)\mapsto\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$;

   (v) $\Sigma=$rotazione dell'arco di cicloide $\{x=t-\sin t,\ z=1-\cos t,\ 0\le t\le\pi\}$ attorno all'asse x;

   (vi) $\Sigma=$rotazione dell'arco di cicloide $\{x=t-\sin t,\ z=1-\cos t,\ 0\le t\le\pi\}$ attorno all'asse z.

6. Calcolare i seguenti integrali superficiali:

   (i) $\displaystyle\int_\Sigma\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $\Sigma=\{z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 2\}$;

   (ii) $\displaystyle\int_\Sigma(x^2+y^2)d\sigma$, $\Sigma=$rotazione della curva $\Gamma=\left\{(x,z):\ x=\dfrac{1}{1+z}\right\}$ attorno all'asse z;

   (iii) $\displaystyle\int_\Sigma(1-x)(1-y^3)d\sigma$, $\Sigma=\{x^2+y^2+2z^2=1\}$;

   (iv) $\displaystyle\int_\Sigma z^2\,d\sigma$, $\Sigma=\{z=xy,\ x^2+y^2\le 8\}$;

(v) $\displaystyle\int_\Sigma x\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}\,d\sigma$, $\Sigma = \{x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = rt,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le t \le \pi\}$;

(vi) $\displaystyle\int_\Sigma \frac{xz\ln y}{y}\,d\sigma$, $\Sigma = \{z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4},\ y \ge x \ge 0,\ z \ge 0\}$.

7. Calcolare il flusso dei seguenti campi vettoriali attraverso le specificate superfici orientate:

(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{rot}(ze^{-y}, z, y)$, $\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$, versore normale esterno;

(ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\Sigma =$ quadrato di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,\sqrt{2})$, $(1,1,\sqrt{2})$, normale $\mathbf{n}$ con $n_x > 0$;

(iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $\Sigma = \{x+y+z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, normale $\mathbf{n}$ con $n_z > 0$;

(iv) $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,z)$, $\Sigma = \{x^2+4y^2+9z^2 = 1\}$, normale esterna;

(v) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, $\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0\}$, normale $\mathbf{n}$ con $n_z > 0$;

(vi) $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{rot}(y, x, xe^{-y})$, $\Sigma = \{y = x^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$, normale $\mathbf{n}$ con $n_y < 0$.

8. Calcolare l'area della regione delimitata da ciascuna delle seguenti curve, in cui a è un parametro positivo:

(i) (lemniscata di Bernoulli) $\Gamma = \{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\}$;

(ii) (astroide) $\Gamma = \{x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}\}$;

(iii) (strofoide) $\Gamma = \left\{y^2 = x^2\dfrac{a+x}{a-x}\right\}$;

(iv) (rosa a 3 petali) $\Gamma = \{r = a\sin 3\vartheta,\ \vartheta \in [0,2\pi]\}$;

(v) (rosa a 4 petali) $\Gamma = \{r = a\sin^2 2\vartheta,\ \vartheta \in [0,2\pi]\}$;

(vi) (folium di Cartesio) $\Gamma = \{x^3+y^3 = axy\}$.