

Modelli matematici ambientali

Lista di esercizi n. 2

1. Sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \int_Q (x + 2y) \, dx dy, & \quad \text{(ii)} \int_Q \frac{x}{y + 1} \, dx dy, \\ \text{(iii)} \int_Q xy^2 \, dx dy, & \quad \text{(iv)} \int_Q (x^2 + 1)e^y \, dx dy, \\ \text{(v)} \int_Q (x^2 + y^2) \, dx dy, & \quad \text{(vi)} \int_Q \sin(\pi x) \cos \frac{\pi y}{2} \, dx dy. \end{aligned}$$

2. Calcolare i seguenti integrali doppi nel dominio indicato:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \int_A x^3 y \, dx dy, & \quad A = [0, 1] \times [-1, 0], \\ \text{(ii)} \int_A \sin x \cos y \, dx dy, & \quad A = [0, \pi] \times [0, \pi], \\ \text{(iii)} \int_A x \sqrt{1 + y^2} \, dx dy, & \quad A = [-1, 1] \times [0, 3], \\ \text{(iv)} \int_A \frac{dx dy}{1 - x - y + xy}, & \quad A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ \text{(v)} \int_A (x^2 y + y^3) \, dx dy, & \quad A = [0, 2] \times [-2, -1]. \end{aligned}$$

3. Calcolare

$$\int_T x \, dx dy,$$

ove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

4. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{1 + 2x + y^2} \, dx dy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi nel dominio indicato:

- (i) $\int_A \sin(x+y) \, dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x\}$,
- (ii) $\int_A xy \, dx dy$, $A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, -x^2 \leq y \leq 1+x\}$,
- (iii) $\int_A (x-1)y \, dx dy$, $A = \{(x, y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$,
- (iv) $\int_A x^2 \sin^2 y \, dx dy$, $A = \{(x, y) : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 3 \cos x\}$,
- (v) $\int_A \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,
- (vi) $\int_{A_\lambda} e^{-x+y} \, dx dy$, $A_\lambda = \{(x, y) : x \geq 0, \lambda x \leq y \leq 2-2\lambda x\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Calcolare l'integrale

$$\int_E xy^2 \, dx dy,$$

ove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, \sqrt{3}], 0 \leq y \leq \sqrt{1+x^2}\}$.

7. Calcolare l'integrale

$$\int_A (x-1)y^2 \, dx dy,$$

ove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$.

8. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, dx dy,$$

ove A è la regione delimitata dalle rette di equazioni

$$x = \frac{1}{2}y, \quad x = 2y, \quad x = 1.$$

9. Calcolare l'integrale

$$\int_T (x-y) \, dx dy,$$

ove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$.

10. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_A x^2 e^{-y^2} \, dx dy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

11. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_A \frac{\sin x}{1+y^2} dx dy,$$

ove

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \tan x\}.$$

12. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_A |x| \sin \pi y dx dy,$$

ove $A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.

13. Si calcoli l'integrale

$$\int_Q xy e^{-x^2-2y^2} dx dy,$$

ove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

14. Si calcoli l'integrale

$$\int_T e^{x-y} dx dy,$$

ove T è il triangolo delimitato dalle rette di equazioni $x+y=4$, $3x+y=4$, $y=0$.

15. Si calcoli l'integrale

$$\int_T (5x^2 + y^2 + 3xy) dx dy,$$

ove T è il trapezio di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

16. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int_A x^2 y dx dy,$$

ove A è l'insieme delimitato dai grafici delle due funzioni $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

17. Calcolare l'integrale

$$\int_A \sqrt{xy - y^2} dx dy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(10, 1)$.

18. Si considerino i due dischi

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

e si calcolino gli integrali

$$\int_{D_1} xy dx dy, \quad \int_{D_2} xy dx dy.$$

19. Si calcolino gli integrali seguenti:

(i) $\int_E \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy$, ove $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$,

(ii) $\int_Q \frac{xy}{\sqrt{1 + y^2}} dx dy$, ove $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

20. Calcolare l'integrale

$$\int_T \frac{e^{y+2x}}{1 + e^{x+y}} dx dy,$$

ove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.

21. Calcolare l'integrale

$$\int_T \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy,$$

ove T è il trapezio di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

22. Detto R il rettangolo $[1, 2] \times [0, 2]$, si calcoli l'integrale

$$\int_R |x - y| dx dy.$$

23. Si calcoli l'integrale

$$\int_T x e^{x-y} dx dy,$$

ove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 2\}$.

24. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x \sin(x - y) dx dy,$$

ove A è il parallelogrammo di vertici $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

25. Calcolare

$$\int_A \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

ove A è la parte del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio a contenuta nel primo quadrante.

26. Calcolare

$$\int_A \sqrt{x^2 - y^2} dx dy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.

27. Calcolare

$$\int_A \sqrt{xy - y^2} \, dx dy,$$

ove A è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(10, 1)$, $(1, 1)$.

28. Calcolare

$$\int_A \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

ove A è la regione limitata di piano delimitata dalla parabola $y = x^2/2$ e dalla retta $y = x$.

29. Calcolare i seguenti integrali, aiutandosi con un'opportuna sostituzione:

(i) $\int_A x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\},$

(ii) $\int_A (x + y^2) \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$

(iii) $\int_A 2xy \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x, x \leq 0\},$

(iv) $\int_A (x - 2)^2 \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$

(v) $\int_A \frac{dx dy}{y}, \quad A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x\},$

(vi) $\int_A \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$

30. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(i) $\int_A \ln \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$

(ii) $\int_A \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)}, \quad A = [1, \infty[\times [1, \infty[,$

(iii) $\int_A x e^{-x^2 - y^2} \, dx dy, \quad A = \mathbb{R}^2,$

(iv) $\int_A x^2 e^{-x^2 - y^2} \, dx dy, \quad A = \mathbb{R}^2,$

(v) $\int_A e^{-x-y} \sin x \cos y \, dx dy, \quad A = [0, \infty[\times [0, \infty[,$

(vi) $\int_A \ln xy \, dx dy, \quad A = [0, 1] \times [0, 1].$