

## ESERCIZI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA (II MOD.)

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE AMBIENTALI

### gruppo 3 — il calcolo differenziale per funzioni di più variabili

**Esercizio 1.** Calcolare la derivata direzionale, nei punti, e nelle direzioni indicate, delle funzioni seguenti:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$  in  $(1, 1)$ , nella direzione  $(1, 2)$ .
- (b)  $f(x, y) = xy + \sin x \sin y$  in  $(0, \pi)$  nella direzione  $(1, 1)$ .
- (c)  $f(x, y) = xy \exp(x + y)$  in  $(1, 1)$  nella direzione  $(2, -1)$ .
- (d)  $f(x, y) = x(1 - y)$  in  $(1, 0)$  nella direzione  $(1, 3)$ .
- (e)  $f(x, y) = xe^y$  in  $(1, \ln 2)$  nella direzione  $(3, -1)$ .
- (f)  $f(x, y) = \sin x \cos y$  in  $(\pi/2, \pi)$  nella direzione  $(1, 1)$ .

**Esercizio 2.** Calcolare il gradiente in ogni punto in cui esiste, e scrivere esplicitamente il differenziale delle funzioni seguenti:

- (a)  $f(x, y) = e^x \sin y$
- (b)  $f(x, y) = x(1 - y) \exp(x + y)$
- (c)  $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$
- (d)  $f(x, y) = x^\alpha (1 - y)^\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$
- (e)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$
- (f)  $f(x, y) = \ln(1 + x^2) \ln(1 + y^2)$
- (g)  $f(x, y) = e^{x^2} \log(1 + y^2)$
- (h)  $f(x, y) = \exp[-(x + y)^2]$
- (i)  $f(x, y) = \frac{e^x}{1 + y^2}$
- (l)  $f(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$

**Esercizio 3.** Calcolare i punti stazionari delle funzioni seguenti:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^3 + 3xy$
- (c)  $f(x, y) = \exp(xy)$
- (d)  $f(x, y) = 3x^2 + 2e^y$
- (e)  $f(x, y) = x^\alpha (1 - y)^\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$
- (f)  $f(x, y) = e^{x^\alpha + y^\beta}$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

**Esercizio 4.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici  $2 \times 2$ :

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- (e)  $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- (f)  $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

**Esercizio 5.** Calcolare gli autovalori delle matrici seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} & \text{(e)} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{(f)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Esercizio 6.** Senza calcolarli esplicitamente, dire qual è il segno degli autovalori delle seguenti matrici:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & \text{(e)} \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \text{(f)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Esercizio 7.** Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo delle funzioni seguenti (dare la risposta, possibilmente, senza calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice hessiana):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2 & \text{(b)} \quad f(x, y) = y^2 - x^2y \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = x^2y^2(1 - x - y) & \text{(d)} \quad f(x, y) = x^4 - x^3 + y^2 \\ \text{(e)} \quad f(x, y) = (2x + y) \exp[-(x^2 + y^2)] & \text{(f)} \quad f(x, y) = (x + 3y) \exp(-xy) \\ \text{(g)} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{(h)} \quad f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2} \end{array}$$

**Esercizio 8.** Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo delle funzioni seguenti, al variare del parametro reale  $\alpha$ :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x, y) = x^4 + \alpha x^2y + y^2 & \text{(b)} \quad f(x, y) = x^2 \exp(x + \alpha y) \\ \text{(c)} \quad f(x, y) = (\alpha x + y) \exp(-xy) & \text{(d)} \quad f(x, y) = x \log_\alpha(x + y) \end{array}$$