

ESERCIZI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA (II MOD.)

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE AMBIENTALI

gruppo 2 — limiti in più variabili e derivate parziali

Esercizio 1. Servendosi delle coordinate polari, calcolare i seguenti limiti in due variabili:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + 2y^2} & \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} \\ \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y + y^3}{x^2 + 3y} & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(x^2 + y^2)}{\log[1 + (x^2 + y^2)]} \\ \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{\text{sen}(x^2 y)} & \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \log(x^2 + y^2) \\ \text{(g)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}^2 xy}{x^2 + y^2} & \text{(h)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos y^2}{x^2 + y^2} \end{array}$$

Esercizio 2. Dire se i seguenti limiti esistono oppure no:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [\log x^2 - \log y^2] & \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen } xy}{x^2 + y^2} \\ \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}^2 xy}{\text{tg}(x^2 + y^2)} \\ \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2)}{\log(1 + y^2)} & \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}^2(xy^2)}{\log(1 + x^2 y)} \end{array}$$

Esercizio 3. Servendosi delle coordinate sferiche, calcolare i seguenti limiti in tre variabili:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{(b)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\text{sen } z}{x^2 + y^2} \\ \text{(c)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y + yz^2}{x^2 + 2y^2} & \text{(d)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\text{tg}(xyz)}{\text{sen}(x^2 + y^2 + z^2)} \end{array}$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di una variabile reale:

- (a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ (b) $y = 3x - x^3$ (c) $y = 2x^2 - 3x + \frac{2}{x}$
(d) $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ (e) $y = 3x^2 + e^x$ (f) $y = (x + 3x^2)(1 - x^3)$
(g) $y = e^x(x^2 + 2x - 1)$ (h) $y = \operatorname{sen} x \cos x$ (i) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$
(l) $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$ (m) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}$ (n) $y = \exp(x^2 + 3x - 1)$
(o) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (p) $y = \log \log x$ (q) $y = \log(e^x + \operatorname{sen} x)$

Esercizio 5. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni di due variabili:

- (a) $z = x^2y$ (b) $z = 3x^2 - 2xy + y^3$ (c) $z = 3x \log y$
(d) $z = 2xe^{2y}$ (e) $z = 3x^2 \log(x + y)$ (f) $z = \exp(x^2 + y^2)$
(g) $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ (h) $z = \operatorname{sen} x \cos y$ (i) $z = \operatorname{tg} xy$
(l) $z = \exp(x^2 + 3xy)$ (m) $z = \log(x^2 + y^3)$ (n) $z = x^2 + y^3 \operatorname{sen} x$

Esercizio 6. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni di tre variabili:

- (a) $w = \frac{3x + 2xy}{z^2 + 2z - 1}$ (b) $w = 3xyz$ (c) $w = x^2y - e^{xyz}$
(d) $w = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$ (e) $w = 2xe^y \log z$ (f) $w = \frac{x}{y + z}$
(g) $w = \exp(x + 2y - z)$ (h) $w = \frac{\log x}{\cos y - \operatorname{sen} z}$ (i) $w = \log(x + ze^y)$