Compitini di Analisi in più variabili 1 2013-14

Compitino del 5 marzo 2013

Esercizio 1 Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} (\ln x)^n$$

al variare del parametro $x > 0$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{|3 + x + y|}{12 + x^2 + xy + y^2},$$

(i) dimostrare che f assume massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$;

(ii) determinare i punti stazionari di f e stabilirne la natura;

(iii) calcolare il massimo ed il minimo di f.

Esercizio 3 Detto $f(x)$ il prolungamento 2π-periodico della funzione

$$f_0(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x), \qquad -\pi < x \leq \pi,$$

(i) si scriva la serie di Fourier di f e se ne analizzi la convergenza;

(ii) (*facoltativo:*) si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La serie proposta è la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} t^n$ calcolata per $t = \ln x$. Tale serie, come si verifica subito, ha raggio di convergenza 1, per cui:

- la serie converge assolutamente per $\ln x \in]-1,1[$, ossia per $x \in]e^{-1}, e[$;
- la serie converge puntualmente, grazie al criterio di Leibniz, per $\ln x = -1$, ossia per $x = e^{-1}$;
- la serie diverge a $+\infty$, grazie al confronto con la serie armonica, per $\ln x = 1$, ossia per $x = e$, e quindi anche per ogni $x \geq e$;
- la serie converge totalmente e uniformemente in $[e_{-1}+\delta, e-\delta]$ per ogni $\delta \in]0, (e+e^{-1})/2[$;
- la serie converge uniformemente, grazie alla stima del resto fornita dal criterio di Leibniz, anche in $[e^{-1}, 1]$, e quindi in $[e^{-1}, e-\delta]$ per ogni $\delta \in]0, e-e^{-1}[$;
- la serie è indeterminata per ogni $x < e^{-1}$.

Osserviamo che la somma della serie è parzialmente calcolabile. Infatti, posto momentaneamente $t = \ln x$, si ha per $|t| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n,$$

e d'altra parte, integrando termine a termine,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t s^{n-1}\, ds = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\, ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds = -\ln(1-t).$$

Per calcolare la somma della seconda serie, abbiamo come nel caso precedente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t s^{n-1}\, ds = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s^{n-1}\, ds;$$

l'integrando, per $0 < |s| \leq |t|$, si può riscrivere come

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s^{n-1} &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s^n = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s r^{n-1}\, dr = \\
&= \frac{1}{s} \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\, dr = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{1-r}\, dr = -\frac{\ln(1-s)}{s}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n = -\int_0^t \frac{\ln(1-s)}{s}\, ds,$$

e qui ci arrestiamo perché l'ultimo integrale non è calcolabile.

Esercizio 2 La funzione f è non negativa, ed è nulla su tutti i punti della retta $y = -x - 3$, nei quali non è differenziabile a causa della presenza del valore assoluto. Chiaramente, tutti i punti di tale retta sono di minimo per f. Mostriamo che

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y) = 0 :$$

posto $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$, si ha infatti per $r \to +\infty$

$$0 \le f(x,y) = f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \frac{1}{r} \frac{|\frac{3}{r} + \cos\vartheta + \sin\vartheta|}{\frac{12}{r^2} + 1 + \cos\vartheta\sin\vartheta} \le \frac{c}{r} \to 0.$$

Dunque f deve avere almeno un punto stazionario (di massimo); anzi, ne deve avere almeno due, uno per ciascuno dei due semipiani delimitati dalla retta $y = -x-3$: infatti in tali semipiani la f è positiva, e nulla sulla frontiera ed all'infinito.
Calcoliamo le derivate prime. Dato che cerchiamo i punti stazionari, siamo fuori dalla retta $y = -x - 3$ ed è irrilevante se ci troviamo al di sopra oppure al di sotto di essa: infatti f cambia semplicemente segno e gli zeri del suo gradiente non cambiano. Con qualche calcolo si trova che i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{12 - x^2 - 2xy - 6x - 3y}{(12 + x^2 + xy + y^2)^2} = 0 \\[2ex] f_y(x,y) = \dfrac{12 - y^2 - 2xy - 6y - 3x}{(12 + x^2 + xy + y^2)^2} = 0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 12 - x^2 - 2xy - 6x - 3y = 0 \\ 12 - y^2 - 2xy - 6y - 3x = 0. \end{cases}$$

Isolando il termine $12 - 2xy$ si ricava

$$x^2 + 6x + 3y = y^2 + 6y + 3x,$$

ovvero, sottraendo,

$$(x-y)(x+y+3)=0.$$

Dato che per ipotesi non siamo sulla retta $y=-x-3$, si deduce $x=y$, e sostituendo nella prima equazione si trova

$$12-3x^2-9x=0,$$

cioè $x=1$ e $x=-4$. Abbiamo così i due punti stazionari

$$\mathbf{P}_1=(1,1), \qquad \mathbf{P}_2=(-4,-4),$$

situati come previsto in posizione opposta rispetto alla retta $y=-x-3$. Senza calcolaere la matrice Hessiana di f, possiamo perciò concludere che si tratta di due punti di massimo relativo. Dato che

$$f(\mathbf{P}_1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}, \qquad f(\mathbf{P}_2)=\frac{5}{60}=\frac{1}{12},$$

si conclude che

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f(x,-x-3)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$
$$\max_{\mathbb{R}^2} f = f(\mathbf{P}_1)=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3 (i) La funzione f è dispari, quindi i coefficienti a_n sono tutti nulli. Calcoliamo i coefficienti b_n: con due integrazioni per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\,\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\,\frac{\cos nx}{n}\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\,\frac{\cos nx}{n}+2x\,\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\,\frac{\sin nx}{n^2}\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\,\frac{\cos nx}{n}+2x\,\frac{\sin nx}{n^2}+2\,\frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^\pi = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\pi^2\,\frac{(-1)^n}{n}+2\,\frac{(-1)^n-1}{n^3}\right] = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n^3}-2\pi\,\frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Pertanto la serie di Fourier di f è

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n^3}+2\pi\,\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin nx.$$

Per il teorema di Dirichlet, essa converge in ogni punto di $[-\pi,\pi]$ con somma uguale a $f(x)$ se $|x|<\pi$ e a 0 se $|x|=\pi$. Inoltre, dato che $f\in C^1(]-\pi,\pi[)$, si può provare che la convergenza è uniforme, ma non totale, in ogni intervallo della forma $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ con $\delta\in\,]0,\pi[\,$.

(ii) Ci dobbiamo scusare con gli studenti, perché purtroppo c'è un errore nel testo del compito: la richiesta avrebbe dovuto riguardare la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$, e non la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}$.
Per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$, calcoliamo la serie di Fourier di f nel punto $\pi/2$: si ha

$$\frac{\pi^2}{4}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n^3}+2\pi\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin n\frac{\pi}{2}\,,$$

ed essendo $\sin n\frac{\pi}{2}=0$ per $n=2k$ e $\sin n\frac{\pi}{2}=(-1)^k$ per $n=2k+1$, si deduce

$$\frac{\pi^2}{4}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}-2\pi\frac{(-1)^k}{2k+1}\right),$$

ossia

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi^2}{4}\,.$$

D'altra parte si sa che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

e dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi}{8}\left(2\pi\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^3}{32}\,.$$

Compitino del 23 aprile 2013

Esercizio 1 Si provi che:

(i) la famiglia

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq \mathbb{R} : \ E, \text{ oppure } E^c, \text{ è al più numerabile}\}$$

è una σ-algebra;

(ii) la funzione

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ è al più numerabile} \\ +\infty & \text{se } E^c \text{ è al più numerabile} \end{cases}$$

è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$;

(iii) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, allora si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu = 0.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt[n]{1 + x^{3n}}} \, dx.$$

Esercizio 3 Posto

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right\},$$

si calcoli l'integrale

$$\int_T z \, \max\{x, y\} \, dxdydz.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per mostrare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra si deve provare che $\emptyset \in \mathcal{F}$, e che $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alle operazioni di passaggio al complementare e di unione numerabile.

Osserviamo anzitutto che, essendo $\mathbb{R}$ più che numerabile, per ogni $E \in \mathcal{F}$ esattamente uno e uno solo fra E e E^c è numerabile.
Dato che $\emptyset$ non ha elementi, esso è certamente al più numerabile, quindi appartiene a $\mathcal{F}$. Sia ora $E \in \mathcal{F}$, e proviamo che $E^c \in \mathcal{F}$: se E è numerabile, allora E^c, complementare di un numerabile, appartiene a $\mathcal{F}$; se invece E^c è numerabile, allora direttamente E^c appartiene a $\mathcal{F}$. Infine, sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ e poniamo $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$: se tutti gli E_n sono numerabili, allora anche E è numerabile e quindi appartiene a $\mathcal{F}$; se invece esiste ν tale che E_ν^c è numerabile, allora a maggior ragione anche E^c, essendo incluso in E_ν^c, è numerabile, e quindi E appartiene a $\mathcal{F}$.

(ii) Per provare che μ è una misura si deve far vedere che $\mu(\emptyset) = 0$ (il che è evidente, dato che $\emptyset$ è al più numerabile), e che

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

per ogni famiglia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ di insiemi disgiunti. Data una tale famiglia, se tutti gli E_n sono numerabili allora tale è anche l'unione e quindi la relazione precedente è vera perché entrambi i suoi membri valgono 0; se invece esiste ν tale che E_ν^c è numerabile, allora nella serie vi è un addendo che vale $+\infty$ e quindi l'intera somma vale $+\infty$, e d'altra parte anche l'unione degli E_n, essendo più che numerabile, ha misura $+\infty$. In ogni caso quindi μ è numerabilmente additiva.

(iii) C'è un modo facile di ottenere la tesi: basta ricordare che l'integrale di una funzione misurabile non negativa g è definito come l'estremo superiore di integrali delle funzioni semplici φ tali che $0 \le \varphi \le g$ e *nulle al di fuori di un insieme di misura finita*. Nel caso della nostra misura μ, qualunque funzione φ del tipo descritto è nulla al di fuori di un insieme di misura nulla, ossia è q.o. nulla; ne segue che *per ogni* funzione misurabile f l'integrale di $|f|$ vale 0. L'equivalenza da provare è dunque ovvia.
Una dimostrazione più generale, che vale anche se si definisce l'integrale di funzioni non negative come estremo superiore degli integrali di *tutte* le funzioni semplici minoranti, è la seguente. Sia f una funzione misurabile. Ovviamente, se $|f|$ ha integrale nullo allora $|f|$ ha integrale finito. Viceversa, supponiamo che $\int_X |f|d\mu < +\infty$: allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\mu\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\} < \infty,$$

altrimenti avremmo per un certo indice ν

$$+\infty > \int_X |f| d\mu \geq \frac{1}{\nu} \mu \left\{ x \in X : |f(x)| > \frac{1}{\nu} \right\} = +\infty,$$

il che è assurdo. Ma allora, dato che μ assume solo i valori 0 e $+\infty$,

$$\mu \left(\left\{ x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : |f(x)| > 0\}) &= \mu \left(\bigcup_{=1}^{\infty} \left\{ x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \right) = \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu \left(\left\{ x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \right) = 0, \end{aligned}$$

il che significa che f è non nulla su un insieme di punti al più numerabile. Ma allora f è non nulla solo su un insieme di misura nulla: in altre parole, f è q.o. nulla rispetto a μ. Pertanto

$$\int_X |f| d\mu = 0.$$

Esercizio 2 Possiamo scrivere l'integrando come

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{1 + x^{3n}}} \ ,$$

ed è chiaro che per $x > 0$ fissato e $n \to \infty$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e la funzione f è sommabile in $[0, \infty[$.
Poiché non è evidente che sia $f_n \leq f_{n+1}$, piuttosto che il teorema di B. Levi conviene applicare il teorema di Lebesgue: cerchiamo quindi di dominare le f_n. Il numeratore, per x fissato, è una funzione crescente rispetto a n e positiva, quindi possiamo maggiorare così:

$$\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \ln e^x = x \qquad \forall x > 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore conviene trattare separatamente i casi $0 < x < 1$ e $x \geq 1$: se $x \in]0,1[$, si ha $\sqrt[n]{1+x^{3n}} \geq 1$, se invece $x \geq 1$, vale $\sqrt[n]{1+x^{3n}} \geq x^3$. Perciò si ha

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

cioè

$$f_n(x) \leq f(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x) \qquad \forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Per una variante del teorema di B. Levi, dimostrata a lezione, si ha direttamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n \, \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale:

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{3}{2}\,.$$

Osservazione 1 Una volta verificato, come si è appena visto, che f è sommabile, avremmo potuto anche utilizzare, anziché la variante al teorema di B. Levi, il teorema di Lebesgue, ottenendo di nuovo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n \, \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx = \frac{3}{2}\,.$$

Osservazione 2 Si poteva pure usare il teorema di B. Levi vero e proprio: come si è detto, il numeratore è positivo e crescente rispetto a n, mentre il denominatore è positivo e decrescente rispetto a n, in quanto per $0 < x \leq 1$ si ha

$$\sqrt[n]{1+x^{3n}} \geq \sqrt[n]{1+x^{3(n+1)}} \geq \sqrt[n+1]{1+x^{3(n+1)}},$$

mentre per $x \geq 1$ risulta, essendo $x^{-3} \leq 1$,

$$\sqrt[n]{1+x^{3n}} = x^3 \sqrt[n]{x^{-3n}+1} \geq x^3 \sqrt[n+1]{x^{-3(n+1)}+1} = \sqrt[n+1]{1+x^{3(n+1)}}.$$

Da ciò segue che

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{1+x^{3n}}} \leq \chi_{[0,n+1]}(x) \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{1+x^{3(n+1)}}} = f_{n+1}(x),$$

e dunque il teorema di B. Levi è applicabile.

Esercizio 3 L'insieme T è chiuso, quindi misurabile, ed è contenuto nel primo ottante di $\mathbb{R}^3$. Utilizzando le coordinate cilindriche

$$x = r\,\cos\vartheta, \quad y = r\,\sin\vartheta, \quad z = z,$$

esso è descritto dalle relazioni

$$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le z \le \frac{1}{r} - 1$$

(la limitazione per r nasce proprio dalla necessità di assicurare che sia non vuoto l'intervallo di variabilità di z).
Si ha dunque

$$\int_T z\,\max\{x,y\}\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\frac{1}{r}-1} z\,\max\{\cos\vartheta, \sin\vartheta\}\,r^2\,dzdrd\vartheta.$$

D'altra parte, è chiaro che nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha $\cos\vartheta \ge \sin\vartheta$ se e solo se $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$; quindi

$$\begin{aligned}
&\int_T z\,\max\{x,y\}\,dxdydz = \\
&\quad = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\int_0^{\frac{1}{r}-1} z\,\cos\vartheta\,r^2\,dzdrd\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\frac{1}{r}-1} z\,\sin\vartheta\,r^2\,dzdrd\vartheta = \\
&\quad = \left[\int_0^1 r^2 \int_0^{\frac{1}{r}-1} z\,dz\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\vartheta\,d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\right] = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 r^2\left(\frac{1}{r}-1\right)^2 dr \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (r-1)^2\,dr = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Compitino del 28 maggio 2013

Esercizio 1 Posto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; xy + yz = 1\},$$

si determini la distanza fra S e l'origine.

Esercizio 2 Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\omega_{a,b}(x,y) = e^{ax-by}(1+x+y)dx + e^{ax-by}(1-x-y)dy.$$

(i) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\Gamma} \omega_{1,0}$$

ove Γ è il bordo del quadrato di vertici $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, percorso nel verso antiorario.

(ii) Determinare a e b in modo che la 1-forma $\omega_{a,b}$ sia esatta e calcolarne una primitiva.

Esercizio 3 Sia $\boldsymbol{\gamma}$ la curva di equazioni parametriche

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t \in [0, \infty[.$$

(i) Si verifichi che $\boldsymbol{\gamma}$ è una curva semplice e chiusa, nel senso che

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(0).$$

(ii) Si calcoli l'area della regione piana D delimitata dalla bisettrice del primo quadrante e dalla restrizione di $\boldsymbol{\gamma}$ all'intervallo $[0,1]$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione distanza dall'origine è $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ma conviene analizzare la funzione distanza al quadrato $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, che naturalmente ha gli stessi punti di minimo della precedente.
Consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(xy+yz-1), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

e cerchiamone i punti stazionari liberi, che sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x+\lambda y = 0 \\ 2y+\lambda(x+z) = 0 \\ 2z+\lambda y = 0 \\ xy+yz = 1. \end{cases}$$

Dalla prima e terza equazione segue $x = z$; dalla seconda si ricava $y+\lambda x = 0$ e, confrontando questa relazione con la prima equazione,

$$2x = -\lambda y = \lambda^2 x.$$

Dunque si ha $x = 0$ oppure $\lambda^2 = 2$. Se $x = 0$, allora $z = x = 0$, il che contraddice la quarta equazione. Pertanto si ha $\lambda = \pm\sqrt{2}$; ma non può essere $\lambda = \sqrt{2}$, perché in tal caso la quarta e prima equazione darebbero $1 = (x + z)y = 2xy = -\lambda y^2 = -\sqrt{2}y^2$, assurdo. Dunque $\lambda = -\sqrt{2}$, da cui $y = \sqrt{2}\,x = \sqrt{2}\,z$. Dalla quarta equazione ricaviamo infine $1 = 2\sqrt{2}\,x^2$, e infine, essendo x, y, z concordi, si hanno i due punti stazionari vincolati

$$\left(2^{-3/4}, 2^{-1/4}, 2^{-3/4}\right), \qquad -\left(2^{-3/4}, 2^{-1/4}, 2^{-3/4}\right).$$

Il valore di f in entrambi questi punti è

$$f\left(\pm\left(2^{-3/4}, 2^{-1/4}, 2^{-3/4}\right)\right) = \sqrt{2},$$

e si tratta chiaramente di un minimo: infatti f ha certamente minimo (si tratta del quadrato della distanza di un chiuso dal compatto $\{(0, 0, 0)\}$), mentre f è illimitata superiormente in S.
Si conclude che l'insieme S ha distanza dall'origine pari a $\sqrt[4]{2}$.

Esercizio 2 (i) Il quadrato Γ è composto dai quattro segmenti sottoindicati:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = x - 1, \end{cases} \quad x \in [0, 1], \qquad -\Gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = -x + 1, \end{cases} \quad x \in [0, 1],$$

$$-\Gamma_3 : \begin{cases} x = x \\ y = x + 1, \end{cases} \quad x \in [-1, 0], \qquad \Gamma_4 : \begin{cases} x = x \\ y = -x - 1, \end{cases} \quad x \in [-1, 0].$$

Si ha

$$\int_{+\Gamma_1} \omega_{1,0} = \int_0^1 \left(e^x \cdot 2x + e^x(2 - 2x)\right) dx = \int_0^1 2e^x\, dx = 2(e - 1);$$

$$\int_{+\Gamma_2} \omega_{1,0} = -\int_0^1 \left(e^x \cdot 2 + e^x \cdot 0\right) dx = -\int_0^1 2e^x\, dx = -2(e - 1);$$

$$\int_{+\Gamma_3} \omega_{1,0} = -\int_{-1}^0 \left(e^x(2 + 2x) + e^x(-2x)\right) dx = -\int_{-1}^0 2e^x\, dx = -2(1 - e^{-1});$$

$$\int_{+\Gamma_4} \omega_{1,0} = \int_{-1}^0 \left(e^x \cdot 0 + e^x(-2)\right) dx = -\int_{-1}^0 2e^x\, dx = -2(1 - e^{-1}).$$

Si conclude che

$$\int_{+\Gamma} \omega_{1,0} = -4(1 - e^{-1}).$$

(ii) Imponiamo che la 1-forma $\omega_{a,b}$ sia chiusa: dato che essa è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ciò garantirà anche la sua esattezza.
Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{ax-by}(1+x+y)\right] = e^{ax-by}\left[-b(1+x+y)+1\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{ax-by}(1-x-y)\right] = e^{ax-by}\left[a(1-x-y)-1\right].$$

Pertanto $\omega_{a,b}$ è esatta in $\mathbb{R}^2$ se e solo se

$$1-b-b(x+y) = a-1-a(x+y) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

ossia se e solo se $b=a=1$.
Una primitiva della 1-forma

$$\omega_{1,1}(x,y) = e^{x-y}(1+x+y)dx + e^{x-y}(1-x-y)dy$$

è una funzione $F(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{x-y}(1+x+y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{x-y}(1-x-y);$$

quindi, integrando rispetto a x la prima relazione,

$$F(x,y) = e^{x-y}(x+y) + \varphi(y),$$

e derivando rispetto a y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{x-y}(1-x-y) + \varphi'(y).$$

Dalla seconda relazione segue allora $\varphi'(y)=0$. Dunque tutte le primitive di $\omega_{1,1}$ sono

$$F(x,y) = e^{x-y}(x+y) + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 3 (i) La curva è ovviamente chiusa, in quanto

$$\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{0}.$$

Verifichiamo che $\boldsymbol{\gamma}$ è semplice. Notiamo intanto che si ha $x(t) > y(t)$ per $t\in]0,1[$ e $x(1)=y(1)=3/2$, mentre $x(t)<y(t)$ per $t\in]1,\infty[$: quindi

$\boldsymbol{\gamma}$ sta sotto la bisettrice del primo quadrante per $t \in]0,1[$, e sta sopra per $t \in]1,\infty[$. Ora per $t \in]0,1]$ si ha

$$y'(t) = \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2} > 0,$$

il che mostra che $\boldsymbol{\gamma}$ è iniettiva in $]0,1]$; invece per $t > 1$ si ha

$$x'(t) = \frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2} < 0,$$

il che mostra che $\boldsymbol{\gamma}$ è iniettiva anche in $[1,\infty[$. Dunque $\boldsymbol{\gamma}$ è semplice.
Si può notare anche che

$$x(t) = y(1/t), \quad y(t) = x(1/t) \qquad \forall t > 0,$$

cosicché $\boldsymbol{\gamma}$ è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

(ii) Calcoliamo l'area della regione D. Il bordo di D, orientato in verso antiorario, è costituito dalle curve $+\boldsymbol{\gamma}_1$ e $-\boldsymbol{\gamma}_2$ date da

$$\boldsymbol{\gamma}_1 : \quad \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases} \qquad t \in [0,1], \qquad -\boldsymbol{\gamma}_2 : \quad \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases} \qquad x \in [0,3/2].$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} a(D) &= \frac{1}{2}\int_{+\boldsymbol{\gamma}} x\,dy - y\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{3t}{1+t^3}\left(\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\right) - \frac{3t^2}{1+t^3}\left(\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\right)\right] dt - \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} (x\,dx - x\,dx) = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{18t^2 - 9t^5 - 9t^2 + 18t^5}{(1+t^3)^3}\,dt + 0 = \\ &= \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{ds}{(1+s)^2} = \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Compitino del 4 marzo 2014

Esercizio 1 Si consideri la successione

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire in quali punti $x \in \mathbb{R}$ la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente, e determinare la funzione limite.

(ii) Individuare i sottointervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ nei quali la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Esercizio 2 (i) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

(ii) Si mostri con un esempio che esiste una funzione f, continua e 2π-periodica, tale che tutte le corrispondenti soluzioni y *non* siano limitate su $\mathbb{R}$.

(iii) Si provi che se T non è multiplo intero di 2π, allora per ogni f continua e T-periodica tutte le corrispondenti soluzioni y sono limitate su $\mathbb{R}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Scrivendo $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, si vede facilmente che quando $x \in \,]-1,1]$ la successione converge puntualmente a 0; per $x > 1$ la successione diverge a $-\infty$; per $x = -1$ la successione non ha limite, pur rimanendo limitata; infine per $x < -1$ sia per n pari che per n dispari i numeri $f_n(x)$ sono negativi e grandi in modulo, per cui nuovamente la successione diverge a $-\infty$. In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ -\infty & \text{se } |x| > 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Analizziamo la convergenza uniforme nell'intervallo $[0,1]$: poiché in tale intervallo le f_n sono derivabili, positive in $]0,1[$ e nulle agli estremi, nel punto di massimo di f_n si deve avere $0 = f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n)$; ne segue che l'unico punto di massimo di f_n è $x_n = \sqrt[n]{1/2}$. Essendo

$$f_n(x_n) = x_n^n - x_n^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

si conclude che

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \geq \frac{1}{4}$$

e quindi non vi è convergenza uniforme in $[0, 1]$.
D'altra parte, poiché $x_n \to 1$ per $n \to \infty$, fissato $\delta \in]0, 1[$ si ha $x_n > 1 - \delta$ per n maggiore di una soglia ν sufficientemente grande: dunque se $n > \nu$

$$\sup_{x \in [0,1-\delta]} |f_n(x)| = f_n(1-\delta) = (1-\delta)^n - (1-\delta)^{2n} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

e pertanto $f_n \to 0$ uniformemente in $[0, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in]0, 1[$.
Amnalogamente si vede che la convergenza è uniforme in $[-1+\delta, 0]$ per ogni $\delta \in]0, 1[$: infatti

$$|f_n(x)| = |x|^n (1 - x^n) \leq 2|x|^n \leq 2(1-\delta)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\sup_{x \in [-1+\delta,0]} |f_n(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

In definitiva, la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 in $[-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in]0, 1[$.

Esercizio 2 (i) All'equazione differenziale omogenea è associata l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\pm i$; quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è dato da

$$V_0 = \{c_1 \cos t + c_2 \sin t : \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Utilizzando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, possiamo cercare una soluzione dell'equazione non omogenea della forma

$$v(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t;$$

in tal caso, come è ben noto, le funzioni c_1 e c_2 devono risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0 \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = f(t). \end{cases}$$

È facile ricavare dunque

$$c_1'(t) = -f(t)\sin t, \qquad c_2'(t) = f(t)\cos t,$$

da cui, ad esempio,

$$c_1(t) = -\int_0^t f(s)\sin s\, ds, \qquad c_2(t) = \int_0^t f(s)\cos s\, ds.$$

Pertanto

$$v(t) = \int_0^t f(s)[-\cos t\sin s + \sin t\cos s]\, ds = \int_0^t f(s)\sin(t-s)\, ds.$$

Una generica soluzione della nostra equazione differenziale ha dunque la forma

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \int_0^t f(s)\sin(t-s)\, ds.$$

(ii) Una qualunque soluzione y dell'equazione è limitata su $\mathbb{R}$ se e solo se è limitato su $\mathbb{R}$ l'ultimo addendo $v(t) = \int_0^t f(s)\sin(t-s)\, ds$.
Scegliamo $f(t) = \cos t$: allora il corrispondente termine è

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \cos s\sin(t-s)\, ds = \\ &= \sin t\int_0^t \cos s\sin s\, ds - \cos t\int_0^t \cos^2 s\, ds = \\ &= \frac{1}{4}\sin t\,(1-\cos 2t) - \frac{1}{2}\,(t + \cos t\sin t); \end{aligned}$$

dunque, a causa della presenza del termine $-t/2$, la funzione v non è limitata su $\mathbb{R}$.

(iii) Come si è osservato, una qualunque soluzione y dell'equazione è limitata su $\mathbb{R}$ se e solo se è limitato su $\mathbb{R}$ l'ultimo addendo $v(t) = \int_0^t f(s)\sin(t-s)\, ds$. Utilizzando la T-periodicità di f, possiamo scrivere per $t > 0$, posto $k = [t/T]$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t f(s)\sin(t-s)\, ds = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{jT}^{(j+1)T} f(s)\sin(t-s)\, ds + \int_{kT}^t f(s)\sin(t-s)\, ds. \end{aligned}$$

Notiamo ora che

$$\begin{aligned}\int_{jT}^{(j+1)T} f(s)\sin(t-s)\,ds &= \int_{jT}^{(j+1)T} f(s-jT)\sin(t-s)\,ds = \\ &= \int_0^T f(\sigma)\sin(t-\sigma-jT)\,d\sigma;\end{aligned}$$

quindi

$$v(t) = \int_0^T f(\sigma)\sum_{j=0}^{k-1}\sin(t-\sigma-jT)\,d\sigma + \int_{kT}^t f(s)\sin(t-s)\,ds.$$

Osservato che

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sin(t-\sigma-jT) = \mathrm{Re}\left[e^{i(t-\sigma)}\sum_{j=0}^{k-1}e^{-ijT}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{i(t-\sigma)}\frac{1-e^{-ikT}}{1-e^{iT}}\right],$$

dal fatto che T non è multiplo intero di 2π segue che

$$\left|\sum_{j=0}^{k-1}\sin(t-\sigma-jT)\right| \le \frac{2}{|1-e^{iT}|} < \infty \qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

e pertanto

$$|v(t)| \le \sup_{\mathbb{R}}|f|\left[\frac{2}{|1-e^{iT}|}+T\right]:$$

quindi si conclude che

$$\|v\|_\infty \le C_T\|f\|_\infty\,.$$

Compitino del 6 maggio 2014

Esercizio 1 Fissato $R>0$, si determini il massimo ed il minimo della funzione

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N e^{x_i^2}$$

sull'insieme

$$T = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N:\ \sum_{i=1}^N x_i^2 = R^2\right\}.$$

Esercizio 2 Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{x^2+3y^2+2xy}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}}\,dx - \frac{3x^2+y^2+2xy}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}}\,dy.$$

(i) Stabilire se ω è esatta, individuandone eventualmente le primitive.

(ii) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+\gamma} \omega,$$

ove γ è la curva descritta dall'equazione $\rho = e^{-\vartheta}$, $\vartheta \in [0,\infty[$, orientata secondo le ϑ crescenti.

Risoluzione

Esercizio 1 Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori e consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(\mathbf{x},\lambda) = \sum_{i=1}^{N} e^{x_i^2} - \lambda\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - R^2\right];$$

annullandone il gradiente, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_i(e^{x_i^2}-\lambda) = 0, \quad i = 1,\dots,N \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = R^2. \end{cases}$$

Le prime N equazioni del sistema hanno le soluzioni $x_i = 0$ oppure $x_i = \pm\sqrt{\ln\lambda}$, ove $\lambda > 1$ è il corrispondente moltiplicatore. Quindi un generico punto stazionario vincolato avrà alcune componenti nulle (ma non tutte, avendo norma euclidea uguale a R) ed altre non nulle, uguali a $\pm\sqrt{\ln\lambda}$. Per $p = 1,\dots,N$ indichiamo con S_p l'insieme dei punti stazionari vincolati che hanno esattamente p componenti non nulle; l'insieme S_p ha cardinalità $\binom{N}{p}$. Detto λ_p il moltiplicatore relativo ai punti stazionari di S_p, si ha

$$R^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = p\ln\lambda_p \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p\,,$$

da cui

$$\lambda_p = \frac{R^2}{p}\,,$$

ed inoltre

$$g(\mathbf{x}) = N - p + p\lambda_p = N - p + p\, e^{\frac{R^2}{p}} \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p\,.$$

Dunque g assume $N-1$ valori critici, vale a dire

$$g(\mathbf{x}) = N - p + p\, e^{\frac{R^2}{p}} \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p, \quad p = 1, \ldots, N.$$

Per determinare, fra tutti i valori critici, il massimo ed il minimo di g, possiamo scrivere

$$g(\mathbf{x}) = N - p + p\, e^{\frac{R^2}{p}} = N + R^2\, \frac{e^{\frac{R^2}{p}} - 1}{\frac{R^2}{p}} \qquad \forall \mathbf{x} \in S_p\,.$$

Per convessità, i rapporti incrementali dell'esponenziale sono crescenti al crescere di $\frac{R^2}{p}$, e dunque sono decrescenti al crescere di p. Pertanto

$$\max_T g = g|_{S_1}(\mathbf{x}) = N + e^{R^2} - 1, \qquad \min_T g = g|_{S_N}(\mathbf{x}) = N\, e^{\frac{R^2}{N}}\,.$$

Esercizio 2 (i) La forma ω è di classe C^∞ nell'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso. Vediamo se ω è chiusa: posto

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2 + 2xy}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}}, \qquad g(x,y) = -\frac{3x^2 + y^2 + 2xy}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}},$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{6y + 2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} - \frac{8}{9}\frac{y(x^2 + 3y^2 + 2xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}} = \\
&= \frac{3(6y+2x)(x^2+y^2) - 8y(x^2+3y^2+2xy)}{9(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}} = \\
&= \frac{-6y^3 + 6x^3 - 10xy^2 + 10yx^2}{9(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -\frac{6x+2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} + \frac{8}{9}\frac{x(3x^2+y^2+2xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}} = \\
&= \frac{-3(6x+2y)(x^2+y^2)+8x(3x^2+y^2+2xy)}{9(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}} = \\
&= \frac{6x^3-6y^3-10xy^2+10yx^2}{3(x^2+y^2)^{\frac{7}{3}}}
\end{aligned}
$$

e dunque $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$. La forma ω è dunque chiusa.
Affinché ω sia esatta in Ω resta da verificare che $\int_{+\Gamma} \omega = 0$ per una fissata curva semplice che circondi l'origine. Scegliamo ad esempio $\Gamma = \{(\cos\vartheta, \sin\vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$ ed orientiamo Γ secondo il verso delle ϑ crescenti. Allora si vede immediatamente che molti termini si cancellano e risulta

$$
\int_{+\Gamma} \omega = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} [-2\cos^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta]d\vartheta = -\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = 0.
$$

Dunque ω è esatta in Ω.
Determiniamo una primitiva di ω: piuttosto che calcolare esplicitamente una funzione $F_0(x,y)$ tale che $\frac{\partial F_0}{\partial x} = f$ e $\frac{\partial F_0}{\partial y} = g$, conviene andare a cercare "per tentativi" una candidata funzione F_0, che dovrebbe avere la forma di un polinomio di primo grado diviso per $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$. Posto dunque

$$
F_0(x,y) = \frac{ax+by+c}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}},
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_0}{\partial x}(x,y) &= \frac{a}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{3}\frac{x(ax+by+c)}{(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} = \\
&= \frac{3a(x^2+y^2)-2x(ax+by+c)}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}} = \\
&= \frac{ax^2+3ay^2-2bxy-2cx}{3(x^2+y^2)^{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}
$$

Si vede subito allora che per avere $\frac{\partial F_0}{\partial x} = f$ basta scegliere $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Pertanto

$$
F_0(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}},
$$

ed è immediato verificare che con questa scelta dei parametri risulta anche $\frac{\partial F_0}{\partial y} = g$. Quindi le primitive di ω sono le funzioni

$$F(x,y) = F_0(x,y) + k = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che ogni primitiva F è continua in tutto $\mathbb{R}^2 = \overline{\Omega}$, ma è di classe C^1 soltanto in Ω.

(ii) La curva γ è una spirale che si avvolge infinite volte intorno all'origine con verso antiorario; si noti tuttavia che il suo sostegno è contenuto in Ω. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} \omega &= \int_0^\infty [f(e^{-\vartheta}\cos\vartheta, e^{-\vartheta}\sin\vartheta)e^{-\vartheta}(-\cos\vartheta - \sin\vartheta) + \\
&\qquad + g(e^{-\vartheta}\cos\vartheta, e^{-\vartheta}\sin\vartheta)e^{-\vartheta}(-\sin\vartheta + \cos\vartheta)]d\vartheta = \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{\vartheta}{3}}[(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta)(-\cos\vartheta - \sin\vartheta) + \\
&\qquad + (3\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta)(-\sin\vartheta + \cos\vartheta]d\vartheta.
\end{aligned}$$

Questo integrale è certamente convergente: quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} \omega &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-\frac{\vartheta}{3}}[(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta)(-\cos\vartheta - \sin\vartheta) + \\
&\qquad + (3\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin\vartheta)(-\sin\vartheta) + \cos\vartheta]d\vartheta = \\
&= \int_{+\gamma_n} \omega,
\end{aligned}$$

ove γ_n è la spirale "troncata" che si avvolge n volte intorno all'origine, ossia

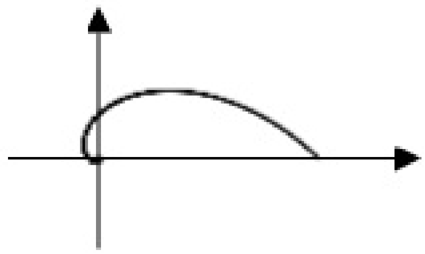
$$\gamma_n = \{\rho = e^{-\vartheta} : \ \vartheta \in [0,n]\}.$$

Essendo ω esatta, si ha per qualunque primitiva F

$$\int_{+\gamma_n} \omega = F(2n\pi, 0) - F(1,0) = e^{-\frac{2}{3}n\pi} - 1;$$

dato che F è continua in $\mathbb{R}^2$, si ha

$$\int_{+\gamma} \omega = \lim_{n\to\infty} \int_{+\gamma_n} \omega = \lim_{n\to\infty} [e^{-\frac{2}{3}n\pi} - 1] = -1.$$



Compitino del 27 maggio 2014

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi (\sin\vartheta)^{\frac{1}{n}}\frac{[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}{1+[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}\,d\vartheta.$$

Esercizio 2 Posto

$$A=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+z^2)^2\le x^2-z^2,\ x\ge 0,\ z\ge 0\},$$

e detto E l'insieme ottenuto ruotando A attorno all'asse x, calcolare:

(i) l'area della superficie ∂E;

(ii) il volume dell'insieme E.

Risoluzione

Esercizio 1 Per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ la funzione integranda è misurabile perché continua. Calcoliamo il limite puntuale: $[\sin\vartheta]^{\frac{1}{n}}\to 1$ per ogni $\vartheta\in]0,\pi[$, mentre $[\sin\vartheta]^{\frac{1}{n}}=0$ nei due estremi 0 e π. Inoltre $\vartheta(\pi-\vartheta)$ è una funzione non negativa che ha massimo in $\pi/2$, dove vale $(\pi/2)^2>1$; essa vale 1 nei due punti $\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^2-4}}{2}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n=\begin{cases}+\infty & \text{se } \frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}<\vartheta<\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2}\,,\\ 0 & \text{se } \vartheta\in\left[0,\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2},\pi\right],\\ 1 & \text{se } \vartheta=\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^2-4}}{2}\,.\end{cases}$$

Se ne deduce che

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\vartheta)^{\frac{1}{n}}\frac{[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}{1+[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}=\begin{cases}1 & \text{se } \frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}<\vartheta<\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2}\,, \\ 0 & \text{se } \vartheta\in[0,\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}[\cup]\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2},\pi], \\ 1/2 & \text{se } \vartheta=\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^2-4}}{2};\end{cases}$$

quindi c'è convergenza puntuale dell'integrando. Controlliamo se esso è dominato: si ha

$$|\sin\vartheta|^{\frac{1}{n}}\frac{[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}{1+[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}\le 1\cdot\frac{[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}{1+[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}\le 1 \qquad \forall\vartheta\in[0,\pi].$$

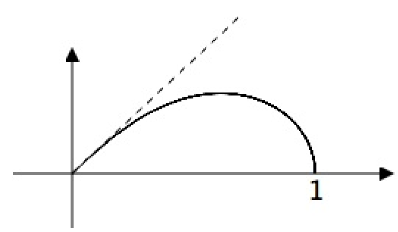
Dunque la convergenza è dominata e pertanto possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi(\sin\vartheta)^{\frac{1}{n}}\frac{[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}{1+[\vartheta(\pi-\vartheta)]^n}\,d\vartheta=\int_{\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-4}}{2}}^{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-4}}{2}}1\,d\vartheta=\sqrt{\pi^2-4}.$$

Esercizio 2 (i) La superficie ∂E è generata dalla rotazione della curva

$$\Gamma=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+z^2)^2=x^2-z^2,\ x,z\ge 0\}$$

(uno dei quattro tratti simmetrici della "lemniscata di Bernoulli") attorno all'asse x: parametrizzando Γ in coordinate polari nel piano xz, si ha $r^4=r^2(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)$, ossia $r=\sqrt{\cos 2\vartheta}$, con $\vartheta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ a causa dei vincoli $x,z\ge 0$. Quindi



$$\Gamma:\ \begin{cases}x=\sqrt{\cos 2\vartheta}\cos\vartheta\\ z=\sqrt{\cos 2\vartheta}\sin\vartheta,\end{cases}$$

Pertanto, nella rotazione attorno all'asse x la quantità z diventa $\sqrt{y^2+z^2}$ e di conseguenza ∂E è il sostegno della superficie

$$\boldsymbol{\sigma}:\ \begin{cases}x=\sqrt{\cos 2\vartheta}\cos\vartheta\\ y=\sqrt{\cos 2\vartheta}\sin\vartheta\cos\varphi\\ z=\sqrt{\cos 2\vartheta}\sin\vartheta\sin\varphi,\end{cases}\qquad \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Si ha allora, posto per comodità $g(\vartheta) = \sqrt{\cos 2\vartheta}$,

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} g'(\vartheta)\cos\vartheta - g(\vartheta)\sin\vartheta & 0 \\ [g'(\vartheta)\sin\vartheta + g(\vartheta)\cos\vartheta]\cos\varphi & -g(\vartheta)\sin\vartheta\sin\varphi \\ [g'(\vartheta)\sin\vartheta + g(\vartheta)\cos\vartheta]\sin\varphi & g(\vartheta)\sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix},$$

per cui

$$E = [g'(\vartheta)\cos\vartheta - g(\vartheta)\sin\vartheta]^2 + [g'(\vartheta)\sin\vartheta + g(\vartheta)\cos\vartheta]^2 = g'(\vartheta)^2 + g(\vartheta)^2,$$
$$G = g(\vartheta)^2\sin^2\vartheta, \qquad F = 0.$$

Essendo

$$g(\vartheta) = \sqrt{\cos 2\vartheta}, \quad g'(\vartheta) = -\frac{\sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}},$$

si conclude che

$$\begin{aligned} a(\partial E) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\vartheta)\sqrt{g'(\vartheta)^2 + g(\vartheta)^2}\,d\vartheta d\varphi = \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\vartheta}\,\sin\vartheta\sqrt{\frac{\sin^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} + \cos 2\vartheta\,d\vartheta} = \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\,d\vartheta = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

(ii) L'insieme E, ruotato di A attorno all'asse x, è descritto da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\};$$

utilizzando quindi le coordinate cilindriche con asse di rotazione x, ossia

$$x = x, \quad y = \rho\cos\vartheta, \quad z = \rho\sin\vartheta,$$

si ottiene

$$m_3(E) = \int_E 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_A \rho\,dxd\rho d\vartheta = 2\pi\int_A \rho\,dxd\rho,$$

e per maggior chiarezza possiamo ripristinare in A le variabili (x,z), scrivendo

$$m_3(E) = 2\pi\int_A z\,dxdz.$$

Poiché d'altra parte l'insieme A è descritto in coordinate polari (r, φ) dalle relazioni

$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
2\pi \int_A z\, dxdz &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2 \sin\varphi\, dr d\varphi = \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos 2\varphi]^{\frac{3}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2\cos^2\varphi - 1]^{\frac{3}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \int_1^{\sqrt{2}} (s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\, ds.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale la sostituzione $s = \cosh u$ permette di scrivere (essendo $s = 1$ se e solo se $u = 0$ e $s = \sqrt{2}$ se e solo se $u = \ln(1 + \sqrt{2})$)

$$m_3(E) = 2\pi \int_A z\, dxdz = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^4 u\, du.$$

Integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^4 u\, du = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^3 u \,\sinh u\, du = \\
&\quad = \left[\sinh^3 u \,\cosh u\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} - 3 \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^2 u \,\cosh^2 u\, du = \\
&\quad = \left[\sinh^3 u \,\cosh u\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} - 3 \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^2 u\,(1 + \sinh^2 u)\, du,
\end{aligned}$$

da cui

$$4 \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^4 u\, du = \left[\sinh^3 u \,\cosh u - \frac{3}{2}(\sinh u \,\cosh u - u)\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})},$$

ossia

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^4 u\, du &= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})\right)\right] = \\
&= \frac{3\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{8},
\end{aligned}$$

e pertanto

$$m_3(E) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sinh^4 u \, du = \pi \left[\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{12} \right].$$

Osservazione Si potevano anche utilizzare le coordinate cartesiane: l'insieme A è il sottografico della funzione $z = f(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$(x^2 + z^2)^2 \leq x^2 - z^2, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Risolvendo rispetto a z^2 si trova

$$z^4 + (2x^2 + 1)z^2 + x^4 - x^2 = 0,$$

cioè

$$z^2 = \frac{-(2x^2+1) + \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x^4 + 4x^2}}{2} = \frac{-(2x^2+1) + \sqrt{8x^2+1}}{2},$$

purché sia $\sqrt{8x^2+1} \geq 2x^2+1$, altrimenti z^2 risulterebbe negativo. Quest'ultima disuguaglianza equivale a $8x^2 + 1 \geq 4x^4 + 4x^2 + 1$, ossia $4x^2 \geq 4x^4$, che equivale a richiedere, poiché $x \geq 0$ per ipotesi, $0 \leq x \leq 1$. In definitiva

$$z = f(x) = \sqrt{\frac{-(2x^2+1) + \sqrt{8x^2+1}}{2}}, \qquad x \in [0,1].$$

Utilizzando le coordinate cilindriche di asse x, si ha

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \in [0,1], \; \sqrt{y^2+z^2} \in [0, f(x)]\},$$

e dunque il volume di E è dato da

$$m_3(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{f(x)} r \, dr dx d\vartheta = \pi \int_0^1 f(x)^2 \, dx,$$

ossia

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \pi \int_0^1 \frac{-(2x^2+1) + \sqrt{8x^2+1}}{2} \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{8x^2+1} \, dx - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{t^2+1} \, dt - \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ponendo $t = \sinh u$, si ha $t = 2\sqrt{2}$ se e solo se $u = \ln(2\sqrt{2}+3)$. Ne segue

$$\begin{aligned}
m_3(E) &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\ln(2\sqrt{2}+3)} \cosh^2 u \, du - \frac{5\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\frac{\cosh u \, \sinh u + u}{2} \right]_0^{\ln(2\sqrt{2}+3)} - \frac{5\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \left[6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2}+3) \right] - \frac{5\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2}+3) - \frac{\pi}{12} = \\
&= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \ln(1+\sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{12} = \\
&= \pi \left[\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{12} \right].
\end{aligned}$$