Ingegneria civile - ambientale - edile

Analisi 1 - Compitini dal 2016-17

Primo compitino - 15 dicembre 2016

Esercizio 1 Trovare gli $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione seguente:

$$(iz)^5 + i\,|z|\,\overline{z}\,(1+i)^2 = 0.$$

Esercizio 2 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha+\ln(5^n+1)},$$

e calcolarlo.

Esercizio 3 Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}\,(2x)^{4n}-\frac{1}{n}\,(4x)^{2n}\right]$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

Esercizio 1 Anzitutto osserviamo che $z = 0$ risolve l'equazione.
Supposto adesso $z \neq 0$, poiché $i^5 = i$ e $(1+i)^2 = 2i$, l'equazione si può riscrivere nel modo seguente:

$$i\,z^5 - 2\,|z|\,\overline{z} = 0,$$

e da qui segue intanto, passando ai moduli,

$$|z|^5 = |i\,z^5| = |2\,|z|\,\overline{z}| = 2|z|^2;$$

dunque, essendo $z \neq 0$,

$$|z| = 2^{\frac{1}{3}}.$$

Sostituendo tale valore nell'equazione, si ottiene

$$i\,z^5 - 2^{\frac{4}{3}}\,\overline{z} = 0$$

e, moltiplicando per z,

$$i\,z^6 - 2^{\frac{4}{3}}\,|z|^2 = 0,$$

ossia

$$i\,z^6 - 4 = 0.$$

Pertanto $z^6 = -4i$, ossia z è una delle radici seste di $-4i$.
L'argomento di $-4i$ è $\frac{3\pi}{2}$, il modulo è 4; come è giusto, $|z| = 4^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$. Ne segue

$$z = 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

e in particolare si trovano le soluzioni

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{3\pi}{12}} = 2^{-\frac{1}{6}}(1+i),\\
z_1 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{7\pi}{12}},\\
z_2 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{11\pi}{12}},\\
z_3 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{15\pi}{12}} = -2^{-\frac{1}{6}}(1+i),\\
z_4 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{19\pi}{12}},\\
z_5 &= 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\,\frac{23\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Si ha

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha+\ln(5^n+1)} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha} \cdot \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\ln(5^n+1)}.$$

Analizziamo per primo il secondo fattore: essendo

$$\ln(5^n+1) = \ln 5^n + \ln(1+5^{-n}) = n\ln 5 + \ln(1+5^{-n}),$$

si può scrivere

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\ln(5^n+1)} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n\ln 5} \cdot \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\ln(1+5^{-n})};$$

d'altronde

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n\ln 5} = e^{\frac{\ln 5}{3}} = 5^{\frac{1}{3}},$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\ln(1+5^{-n})} = 1^0 = 1.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\ln(5^n+1)} = 5^{\frac{1}{3}}.$$

Analizziamo adesso il primo fattore. Esso si riscrive così:

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha} = \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}\right]^{2n^{\alpha-1}},$$

e poiché, quando $n\to\infty$,

$$\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}\right] \to e^{\frac{1}{3}},$$

otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>1,\\ e^{\frac{2}{3}} & \text{se } \alpha=1,\\ 1 & \text{se } \alpha<1.\end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n^\alpha+\ln(5^n+1)}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>1,\\ (5e^2)^{\frac{1}{3}} & \text{se } \alpha=1,\\ 5^{\frac{1}{3}} & \text{se } \alpha<1.\end{cases}$$

Esercizio 3 Analizziamo separatamente le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\,(2x)^{4n},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\,(4x)^{2n}.$$

Consideriamo la prima, che si riscrive come

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,16^n}{n^2+1}\,x^{4n}.$$

Si tratta di una serie di potenze, ma conviene trattarla come una serie numerica di parametro x. Si tratta di una serie a termini positivi, e per analizzarne la convergenza (che coincide con la convergenza assoluta) utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{n\,16^n}{n^2+1}\,x^{4n}}=16x^4\sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}}\to 16x^4 \quad \text{per } n\to\infty.$$

Dunque la serie converge per $16x^4<1$, ossia per $|x|<\frac{1}{2}$. Inoltre tale serie diverge a $+\infty$ per $x=\pm\frac{1}{2}$, ed a maggior ragione per $|x|>\frac{1}{2}$, per confronto asintotico con la serie armonica.
Consideriamo la seconda serie, che si riscrive come

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16^n}{n}\,x^{2n}.$$

Anche questa serie è a termini positivi e come prima, per analizzarne la convergenza, utilizziamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{16^n}{n}\,x^{2n}}=16x^2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 16x^2 \quad \text{per } n\to\infty.$$

Dunque la serie converge per $16x^2<1$, ossia per $|x|<\frac{1}{4}$. Inoltre tale serie diverge a $+\infty$ per $x=\pm\frac{1}{4}$, ed a maggior ragione per $|x|>\frac{1}{4}$, per confronto asintotico con la serie armonica.
Consideriamo finalmente la serie data,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}\,16^n\,x^{4n}-\frac{1}{n}\,16^n x^{2n}\right],$$

che è differenza delle due serie già analizzate. Essa converge assolutamente per $|x| < \frac{1}{4}$, dato che entrambe le serie analizzate convergono assolutamente per tali valori di x; diverge a $-\infty$ per $\frac{1}{4} \leq |x| < \frac{1}{2}$, visto che in questo caso la prima serie converge e la seconda diverge positivamente.
Vediamo cosa succede quando $|x| \geq \frac{1}{2}$. In questo caso si ha la forma indeterminata $+\infty - \infty$: tuttavia osserviamo che il termine generale della serie si può scrivere così:

$$\frac{n}{n^2+1}(2x)^{4n} - \frac{1}{n}(4x)^{2n} = (16x^2)^n \left[\frac{n}{n^2+1}\, x^{2n} - \frac{1}{n}\right];$$

si vede allora che esso non è infinitesimo: infatti quando $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$ risulta

$$\begin{aligned}(16x^2)^n \left[\frac{n}{n^2+1}\, x^{2n} - \frac{1}{n}\right] &= -(16x^2)^n \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n^2}{n^2+1}|x|^{2n}\right) \leq \\ &\leq -(16x^2)^n \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n^2}{n^2+1}\right) = -\frac{(16x^2)^n}{n(n^2+1)} \to -\infty,\end{aligned}$$

mentre quando $|x| > 1$ si ha

$$(16x^2)^n \left[\frac{n}{n^2+1}\, x^{2n} - \frac{1}{n}\right] = (16x^2)^n \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1}|x|^{2n} - 1\right) \to +\infty.$$

Pertanto la serie assegnata converge per $|x| < \frac{1}{4}$, diverge a $-\infty$ per $\frac{1}{4} \leq |x| \leq 1$, diverge a $+\infty$ per $|x| > 1$.

Secondo compitino - 11 aprile 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = e^{-xy} \sin x^2 y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Si mostri che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Si scrivano le derivate parziali $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.

(iii) Si calcoli la derivata direzionale $f_{\mathbf{v}}(1/2, \pi)$, ove $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

(iv) Si determini l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, \pi, 0)$.

(v) Si trovi l'angolo $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fra tale piano e il piano di equazione $z = 0$ (è sufficiente scriverne il coseno o il seno).

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) + \sqrt{1-4x} - 1}{\sin(x - x^2) - \arctan x}.$$

Esercizio 3 Descrivere il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} + |x-1|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è il prodotto di due composizioni di funzioni di classe C^∞ (il seno e l'esponenziale) con monomi nelle variabili x, y: quindi f è certamente differenziabile, in virtù del teorema di differenziabilità delle funzioni composte. Applicando lo stesso ragionamento ad una qualunque derivata parziale, si può anche arrivare a dire che f è di classe C^∞.

(ii) Si ha

$$f_x(x,y) = -y\,e^{-xy}\sin x^2y + 2xy\,e^{-xy}\cos x^2y,$$
$$f_y(x,y) = -x\,e^{-xy}\sin x^2y + x^2\,e^{-xy}\cos x^2y.$$

(iii) Nel punto $(1/2, \pi)$ si ha

$$f_x\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2} = 0,$$
$$f_y\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2};$$

dunque

$$f_{\mathbf{v}}\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = \left\langle \left(0, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,e^{-\pi/2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle_2 = \frac{1}{8}\,e^{-\pi/2}.$$

(iv) Essendo

$$f(1,\pi) = 0, \qquad f_x(1,\pi) = -2\pi\,e^{-\pi}, \qquad f_y(1,\pi) = -e^{-\pi},$$

l'equazione cercata è

$$z = -2\pi\,e^{-\pi}(x-1) - e^{-\pi}(y-\pi).$$

(v) Il vettore ortogonale al piano tangente sopra scritto è $\mathbf{v} = (2\pi\,e^{-\pi}, e^{-\pi}, 1)$; il vettore ortogonale al piano di equazione $z = 0$ è $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$. L'angolo ϑ fra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_3$ è certamente acuto, dato che il loro prodotto scalare è $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3\rangle_3 = 1 > 0$. Si ha allora

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3\rangle_3}{\|\mathbf{v}\|_3\|\mathbf{e}_3\|_3} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2\,e^{-2\pi} + e^{-2\pi} + 1}},$$

e naturalmente

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{4\pi^2\,e^{-2\pi} + e^{-2\pi}}}{\sqrt{4\pi^2\,e^{-2\pi} + e^{-2\pi} + 1}}.$$

Esercizio 2 Si tratta di una forma indeterminata $0/0$. Osservando che

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$
$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathrm{o}(t^2) \qquad \text{per } t \to 0,$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

si ricava

$$\begin{aligned}
&\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) && \text{per } x \to 0,\\
&\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) && \text{per } x \to 0,\\
&\sin(x - x^2) = x - x^2 - \frac{(x-x^2)^3}{6} + \mathrm{o}((x-x^2)^3) = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2) && \text{per } x \to 0,\\
&\arctan x = x + \mathrm{o}(x^2) && \text{per } x \to 0,
\end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{\ln(1+2x) + \sqrt{1-4x} - 1}{\sin(x-x^2) - \arctan x} = \frac{-4x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{-x^2 + \mathrm{o}(x^2)} \qquad \text{per } x \to 0;$$

pertanto il limite cercato è uguale a $+4$.

Esercizio 3 La funzione f è definita su $\mathbb{R}$ ed è continua. Essa è sempre strettamente positiva, e si ha $f(0) = \frac{3}{2}$. I limiti all'infinito sono

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + 1 - x\right] = +\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + x - 1\right] = +\infty.
\end{aligned}$$

Vediamo se ci sono asintoti obliqui: si ha, tenuto conto del fatto che $\frac{1}{2}e^{-x^2}$ è infinitesimo per $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1,$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x)+x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(1-x+x\big) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(x-1-x\big) = -1.$$

Pertanto c'è l'asintoto obliquo $y = x-1$ per $x \to -\infty$, e c'è l'asintoto obliquo $y = -x+1$ per $x \to +\infty$.
La funzione f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: in $x = 1$ infatti il valore assoluto si annulla e non è derivabile. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -x\, e^{-x^2} + 1 & \text{se } x > 1\\ -x\, e^{-x^2} - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Risulta $f(1) = \frac{1}{2e}$ e

$$f'(1^+) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{e} + 1, \qquad f'(1^-) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{e} - 1.$$

Si può osservare che

$$f'(x) < 0 \quad \forall x < 1, \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x > 1 :$$

infatti il massimo su $\mathbb{R}$ della funzione $g(x) = |x|e^{-x^2}$ è raggiunto, con facile verifica che si ottiene cercando il massimo della funzione $t \mapsto t\,e^{-t^2}$ in $[0,\infty[$, nei punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, e tale massimo vale $\frac{1}{\sqrt{2e}} < 1$; ne segue che

$$f'(x) \le -1 + \frac{1}{\sqrt{2e}} < 0 \quad \forall x < 1, \qquad f'(x) \ge 1 - \frac{1}{\sqrt{2e}} > 0 \quad \forall x > 1.$$

Dunque f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1[$ ed è strettamente crescente in $]1, +\infty[$. Quindi il punto angoloso 1 è di minimo assoluto per f, e non ci sono altri punti né di massimo relativo né di minimo relativo.
Analizziamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = (-1 + 2x^2)e^{-x^2} \qquad \forall x \ne 1;$$

in particolare

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[,$$

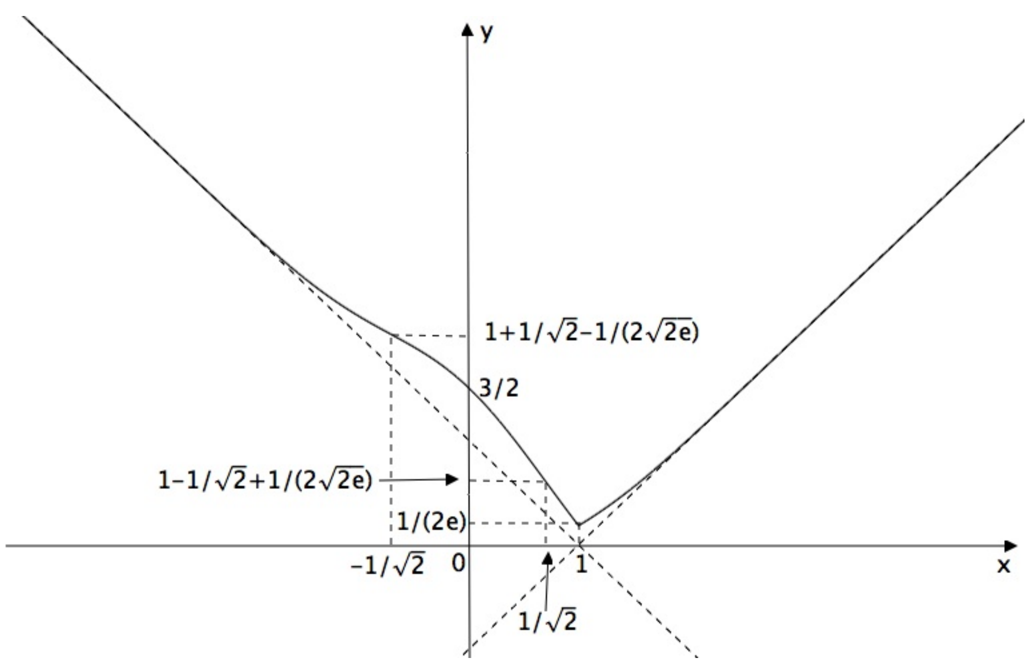
mentre

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[\cup \,]1, +\infty[.$$

Vi sono dunque i due punti di flesso $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, nei quali, come si vede facilmente,

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2e}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}} - 1,$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}} + 1.$$

Mettendo insieme tutte le informazioni trovate, possiamo costruire il grafico seguente:



Terzo compitino - 30 maggio 2017

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2\ln(3+x^2+y^2) - xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Trovare i punti stazionari di f e individuarne la natura.

(ii) Determinare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 2 Calcolare gli integrali

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^{\ln 3} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{3x}{2}}}{e^x + 1}\, dx, \qquad (\mathbf{b}) \quad \int_1^3 \frac{[x+1] - x}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\, dx,$$

ove $[t]$ denota la parte intera di t.

Esercizio 3 Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 2ay' + (a^2+b^2)y = 0,$$

ove a, b sono parametri reali.

(i) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate in $[0, \infty[$.

(ii) Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione sono infinitesime per $x \to +\infty$.

(iii) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ scrivere la soluzione dell'equazione differenziale che verifica $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione f è di classe C^∞. Calcoliamo il gradiente di f:

$$f_x(x,y) = \frac{4x}{3+x^2+y^2} - y, \quad f_y(x,y) = \frac{4y}{3+x^2+y^2} - x.$$

I punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x - y(3+x^2+y^2) = 0 \\ 4y - x(3+x^2+y^2) = 0. \end{cases}$$

Tra questi punti vi è l'origine $(0,0)$. Altrimenti, entrambe le coordinate sono diverse da 0 e si trova

$$3 + x^2 + y^2 = 4\,\frac{x}{y} = 4\,\frac{y}{x}\,,$$

da cui

$$x^2 = y^2, \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{4}\,(3 + x^2 + y^2) > 0,$$

il che implica $y = x$. Sostituendo nella prima equazione si ha infine

$$3 + 2x^2 = 4, \quad \text{ossia} \quad x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Abbiamo dunque i tre punti stazionari

$$(0,0), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana: si ha, con facili calcoli,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{4(3 - x^2 + y^2)}{(3 + x^2 + y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{4(3 + x^2 - y^2)}{(3 + x^2 + y^2)^2},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{8xy}{(3 + x^2 + y^2)^2} - 1,$$

Perciò

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{H}_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Si conclude che $(0,0)$ è punto di minimo relativo, mentre $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di sella.

(ii) Basta osservare che

$$f(x,x) = 2\ln(3 + 2x^2) - x^2 \to -\infty \quad \text{per } y = x \to +\infty,$$
$$f(x,-x) = 2\ln(3 + 2x^2) + x^2 \to +\infty \quad \text{per } y = -x \to +\infty$$

per concludere che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty, \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$$

Esercizio 2 (a) Ponendo $e^{-\frac{x}{2}} = t$, si ha $x = -2\ln t$ e $dx = -\frac{2}{t}\,dt$. Quindi

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{3x}{2}}}{e^x + 1}\,dx = -2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t - t^3}{t\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)}\,dt = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{(1 - t^2)t^2}{1 + t^2}\,dt =$$
$$= 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left[1 - t^2 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right]dt = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left[2 - t^2 - \frac{2}{1 + t^2}\right]dt =$$
$$= \left[4t - \frac{2}{3}\,t^3 - 4\arctan t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{10}{3} - \frac{34}{9\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\,.$$

(b) Si ha
$$\int_1^3 \frac{[x+1]-x}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int_1^2 \frac{2-x}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \int_2^3 \frac{3-x}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx;$$
Quindi, integrando per parti,
$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{[x+1]-x}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \left[-2(2-x)(4-x)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^2 - 2\int_1^2 (4-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx + \\ &\quad + \left[-2(3-x)(4-x)^{-\frac{1}{2}}\right]_2^3 - 2\int_2^3 (4-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} + 4\left[(4-x)^{\frac{1}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} + 4 - 4\sqrt{3} = \\ &= \sqrt{2} + 4 - \frac{10}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (i) Si tratta di un'equazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + b^2 = 0,$$
e le sue radici sono
$$\lambda = -a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm ib.$$
Se, in particolare, $b = 0$, allora l'equazione ha la radice doppia $\lambda = a$.
L'insieme delle soluzioni è dunque
$$V_0 = \begin{cases} \{c_1 e^{-ax}\cos bx + c_2 e^{-ax}\sin bx : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} & \text{se } b \neq 0 \\ \{c_1 e^{-ax} + c_2\, x\, e^{-ax};\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} & \text{se } b = 0. \end{cases}$$
Affinché tutte le soluzioni siano limitate per $x \to +\infty$ è sufficiente (e necessario) che sia $a \geq 0$ e $b \neq 0$ oppure $a > 0$ e $b = 0$.

(ii) Affinché tutte le soluzioni siano infinitesime per $x \to +\infty$ è sufficiente (e necessario) che sia $a > 0$, con nessuna restrizione per b.

(iii) Se $b \neq 0$, la soluzione $y(x)$ è della forma
$$y(x) = c_1 e^{-ax}\cos bx + c_2 e^{-ax}\sin bx;$$
quindi
$$y'(x) = -ac_1 e^{-ax}\cos bx - bc_1 e^{-ax}\sin bx - ac_2 e^{-ax}\sin bx + bc_2 e^{-ax}\cos bx,$$
da cui
$$-1 = y(0) = c_1\,, \qquad 1 = y'(0) = -ac_1 + bc_2\,.$$
Pertanto
$$c_1 = -1, \qquad c_2 = \frac{1-a}{b}\,,$$

e in definitiva

$$y(x) = -e^{-ax}\cos bx + \frac{1-a}{b}\, e^{-ax}\sin bx.$$

Se invece $b = 0$, la soluzione $y(x)$ è della forma

$$y(x) = c_1\, e^{-ax} + c_2\, x\, e^{-ax};$$

quindi

$$y'(x) = -ac_1\, e^{-ax} + c_2\, e^{-ax} - ac_2\, x\, e^{-ax},$$

da cui

$$-1 = y(0) = c_1, \qquad 1 = y'(0) = -ac_1 + c_2.$$

Pertanto

$$c_1 = -1, \qquad c_2 = 1 - a,$$

e in definitiva

$$y(x) = -e^{-ax} + (1-a)\, x\, e^{-ax}.$$

Primo compitino - 13 dicembre 2018

Esercizio 1 Trovare i numeri $z \in \mathbb{C}$ che risolvono l'equazione

$$z|z| - \overline{z} = i.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{6n^2-7n-8}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza R della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i + n^4\,\ln n}{n^5\big(\ln(n+1)\big)^3}\, z^n$$

e stabilire il comportamento della serie nei punti della circonferenza $|z| = R$.

Risoluzione

Esercizio 1 Poniamo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa

$$(a+ib)\sqrt{a^2+b^2} - (a-ib) = i,$$

ovvero, separando la parte reale dalla parte immaginaria,

$$\begin{cases} a\sqrt{a^2+b^2} - a = 0 \\ b\sqrt{a^2+b^2} + b = 1. \end{cases}$$

La prima equazione è risolta per $a = 0$ oppure per $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Se $a = 0$, allora $\sqrt{a^2+b^2} = |b|$ e la seconda equazione ci dà $b|b| + b = 1$; in particolare, $b \neq 0$. Se $b > 0$, l'equazione è $b^2 + b - 1 = 0$, le sue radici sono $b = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, e solo la prima, $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, è positiva: si trova così $z = i\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Se $b < 0$, l'equazione è $b^2 - b + 1 = 0$ e le sue radici non sono reali.
Se invece $a \neq 0$, si ha $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Dalla seconda equazione ricaviamo $2b = 1$ e dunque $b = \frac{1}{2}$; essendo $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, si ottiene $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pertanto deve essere $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
D'altra parte, una verifica diretta mostra che i tre numeri sopra determinati risolvono davvero l'equazione.

Esercizio 2 Per quanto riguarda il primo limite, possiamo scrivere, decomponendo l'esponente,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{6n^2-7n-8} &= \left(1+\frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{2(3n^2+4n+5)-15n-18} = \\ &= \frac{\left(1+\frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{2(3n^2+4n+5)}}{\left(1+\frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{15n+18}}\,.\end{aligned}$$

Il denominatore tende a 1, perché nell'esponente vi è un infinito più debole che nella base. Il numeratore, scritto come

$$\left[\left(1+\frac{2}{3n^2+4n+5}\right)^{3n^2+4n+5}\right]^2,$$

tende a $[e^2]^2$ ossia a e^4. Ne segue che il primo limite esiste ed è uguale a e^4.
Quanto al secondo limite, si ha, esplicitamdo il coefficiente binomiale,

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdot(n+1)}{2^n\,n!} = \frac{2n}{2n}\,\frac{2n-1}{2(n-2)}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2} \geq \frac{n+1}{2},$$

e pertanto anche questo limite esiste e vale $+\infty$.

Esercizio 3 (i) Consideriamo il coefficiente a_n della potenza z^n:

$$a_n = \frac{i + n^4\,\ln n}{n^5\big(\ln(n+1)\big)^3}$$

e calcoliamo il massimo limite della radice n-sima del suo modulo: si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n^8(\ln n)^2+1}}{n^5\big(\ln(n+1)\big)^3}} = \sqrt[n]{\frac{(n^4\ln n)\sqrt{1+\frac{1}{n^8(\ln n)^2}}}{n^5\big(\ln(n+1)\big)^3}}\,;$$

poiché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1,$$

si ottiene

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln n)^2}} = 1.$$

Ne deriva che il raggio di convergenza della serie di potenze data è $R = 1$.

(ii) Analizziamo la serie quando $|z| = 1$: per quanto sopra visto, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n z^n|}{\frac{1}{n(\ln n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\frac{1}{n(\ln n)^2}} = \lim_{n\to\infty} n(\ln n)^2 |a_n| = 1,$$

e poiché la serie $\Sigma \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge, si conclude che la serie data converge assolutamente per $|z| = 1$.

Secondo compitino - 16 aprile 2019

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x - \sin^2 2x}{\ln(1+x^2) - e^{3x^2} + \sqrt{1+4x^2}}.$$

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stabilire:

(i) in quali punti di $\mathbb{R}^2$ f è continua;

(ii) in quali punti di $\mathbb{R}^2$ f è differenziabile.

Esercizio 3 Tracciare approssimativamente il grafico della funzione

$$g(x) = \frac{|x^2 - x|}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

in particolare:

- determinare, se esistono, i limiti a $\pm\infty$ e gli asintoti;
- trovare, se esistono, i punti di discontinuità e i punti angolosi;
- individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza ed i punti di massimo o minimo relativo, trascurando lo studio della derivata seconda;
- giustificare il fatto che nella semiretta $]-\infty, 0[$ deve esistere almeno un punto di flesso.

Risoluzione

Esercizio 1 Esplicitando la funzione tangente, il numeratore può scriversi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\tan^2 2x - \sin^2 2x &= \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - \sin^2 2x = \\ &= \sin^2 2x \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right) = \sin^2 2x \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\sin^4 2x}{\cos^2 2x}.\end{aligned}$$

Dunque il limite da calcolare diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{\cos^2 2x\big(\ln(1+x^2) - e^{3x^2} + \sqrt{1+4x^2}\big)}\,.$$

Tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\cos 2x = 1,$$

il nostro limite equivale a

$$\lim_{x\to 0}\frac{16x^4}{\ln(1+x^2) - e^{3x^2} + \sqrt{1+4x^2}}.$$

Dai noti sviluppi di Taylor per $t \to 0$ del logaritmo, dell'esponenziale e della funzione $\sqrt{1+t}$, ricaviamo per $t \to 0$

$$\begin{aligned}&\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2),\\ &e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2),\\ &\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathrm{o}(t^2),\end{aligned}$$

da cui, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{16x^4}{\ln(1+x^2) - e^{3x^2} + \sqrt{1+4x^2}} = \\ &\quad = \frac{16x^4}{x^2 - \frac{x^4}{2} - 1 - 3x^2 - \frac{9x^4}{2} + 1 + 2x^2 - 2x^4 + \mathrm{o}(t^4)} = \frac{16x^4}{-7x^4 + \mathrm{o}(x^4)}\end{aligned}$$

e in definitiva

$$\lim_{x\to 0}\frac{16x^4}{\ln(1+3x^2) - e^{3x^2} + 1} = -\frac{16}{7}\,.$$

Pertanto anche il limite proposto vale $-\frac{16}{7}$.

Esercizio 2 (i) Certamente la funzione f è continua nei punti $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, perché quoziente di monomi. D'altra parte, se $(x,y) \to (0,0)$ si ha

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^4}\, x^2y^2 \leq x^2y^2 \to 0,$$

e dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Ciò prova che f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Nei punti $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ la f è differenziabile: infatti le sue derivate parziali

$$f_x(x,y) = \frac{2x^5y^2 + 4x^3y^6}{(x^2+y^4)^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \frac{2x^6y - 2x^4y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

esistono, e sono continue in ogni intorno di (x_0, y_0) che non contenga l'origine. D'altra parte, nell'origine $(0,0)$ si ha

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, x^2y = 0. \end{aligned}$$

Dunque f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, con differenziale nullo.

Esercizio 3 La funzione g è definita su $\mathbb{R}$ ed è continua. Per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1,$$

dunque la ratta $y = 1$ è asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.
Notiamo che

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 1 \\ \dfrac{x - x^2}{1+x^2} & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

e non esistono punti di discontinuità.
Calcoliamo la derivata prima. Con facile calcolo ed alcune semplificazioni si trova

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(1+x^2)^2} & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 1 \\ -\dfrac{x^2 + 2x - 1}{(1+x^2)^2} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Nel punto $x = 0$ risulta

$$g(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} g'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} g'(x) = 1,$$

mentre nel punto $x = 1$ si ha

$$g(1) = 0-, \qquad \lim_{x \to 1^-} g'(x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^+} g'(x) = -\frac{1}{2};$$

dunque i punti $x = 0$ e $x = 1$ sono angolosi.
Cerchiamo gli intervalli di crescenza. Per $x < 0$ oppure $x > 1$ si ha

$$g'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2x - 1 \geq 0,$$

mentre, al contrario, per $0 < x < 1$ si ha

$$g'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

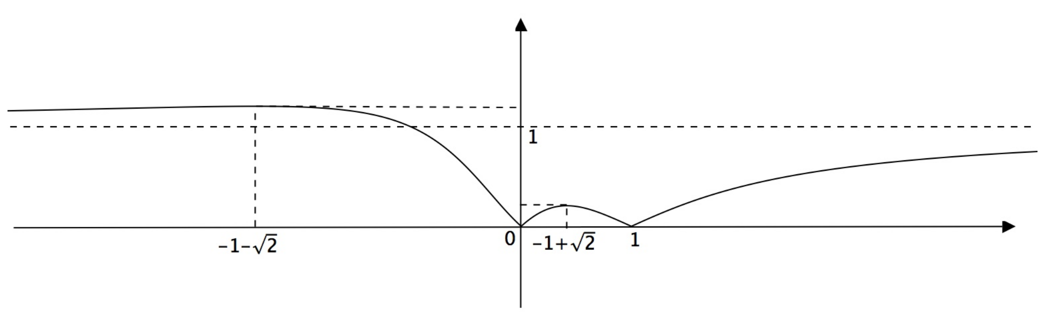
Le radici del trinomio sono $-1 \pm \sqrt{2}$; chiaramente si ha $-1 - \sqrt{2} < 0 < -1 + \sqrt{2} < 1$. Pertanto g sarà crescente in $]-\infty, -1-\sqrt{2}[$, decrescente in $]-1-\sqrt{2}, 0[$, crescente in $]0, -1+\sqrt{2}[$, decrescente in $]-1+\sqrt{2}, 1[$, e infine crescente in $]1, +\infty[$.
Dunque il punto $x = -1 - \sqrt{2}$ è di massimo relativo, con

$$g(-1-\sqrt{2}) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}};$$

il punto $x = 0$ è di minimo relativo, e come sappiamo $g(0) = 0$; il punto $x = -1 + \sqrt{2}$ è di massimo relativo, con

$$g(-1+\sqrt{2}) = \frac{|4 - 3\sqrt{2}|}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{4 - 2\sqrt{2}};$$

infine il punto $x = 1$ è di minimo relativo, e come sappiamo $g(1) = 0$.
Dalle informazioni ottenute si ottiene il grafico seguente:



Osserviamo che la derivata seconda è, dopo qualche calcolo,

$$g''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 2}{(1+x^2)^4} & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 1 \\[2ex] -\dfrac{-2x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 2}{(1+x^2)^4} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lo studio di g'' certamente non è agevole. Però si noti che per $x > 1$ si ha $-2x+2 < 0$ e quindi $g''(x) < 0$, ossia g è concava in $]1, +\infty[$. Negli altri intervalli non si può dedurre nulla. Tuttavia di sicuro vi è un punto $x_0 < -1 - \sqrt{2}$ in cui $g''(x_0) = 0$: infatti la g, che è concava in un intorno di $-1 - \sqrt{2}$, non può rimanere concava in tutta la semiretta $]-\infty, -1-\sqrt{2}]$, perché in tal caso g avrebbe limite $-\infty$ per $x \to -\infty$. Dunque g deve essere convessa in qualche intervallo contenuto in $]-\infty, b[$, con $b < -1 - \sqrt{2}$, e pertanto deve esistere almeno un punto di flesso $x_0 < -1 - \sqrt{2}$.

1 Terzo compitino - 28 maggio 2019

Esercizio 1 (i) Trovare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - xy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Determinare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f, \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 2 Calcolare gli integrali

$$\textbf{(a)} \int_{-\ln 15}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x}}\, dx, \qquad \textbf{(b)} \int_{-1}^{3} \left| x - \frac{1}{2} \right| e^x\, dx.$$

Esercizio 3 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\textbf{(a)} \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1, \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \begin{cases} y' = y\,(\ln y)\, e^x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞. Annullandone il gradiente si arriva al sistema

$$\begin{cases} 8x^3 - y = 0 \\ 2y - x = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$.
La matrice Hessiana di f è

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

e risulta

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

gli autovalori di questa matrice sono $1 \pm \sqrt{2}$ e dunque $(0,0)$ è punto di sella per f. Inoltre negli altri due punti si ha

$$\mathbf{H}_f \left(\pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

gli autovalori di questa matrice sono $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$ e sono entrambi positivi, come è immediato verificare. Dunque i punti $\pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ sono entrambi di minimo relativo per f, con

$$f \left(\pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{1}{128} + \frac{1}{64} - \frac{1}{32} = -\frac{1}{128} < 0.$$

Valutiamo adesso l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f. Osservato che

$$xy \geq -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

risulta

$$f(x,y) \geq 2x^4 + y^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{2} + 2x^4 - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + 2\left(x^2 - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} \geq -\frac{1}{64};$$

pertanto f è limitata inferiormente, ed inoltre

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x,y) \geq \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} \left[\frac{y^2}{2} + 2\left(x^2 - \frac{1}{8}\right)^2 \right] = +\infty.$$

In particolare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$$

D'altra parte, poiché $f(x,y) \to +\infty$ per $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$, scelto $M > 0$ esiste $R > 1$ tale che risulti

$$f(x,y) > M \quad \text{per } \sqrt{x^2+y^2} \geq R.$$

Dunque, dentro la palla chiusa $\overline{B((0,0),R)}$ la funzione f ha minimo e tale minimo è negativo, perché f assume un valore negativo nei due punti di minimo relativo. Dunque il minimo di f sulla palla chiusa non può essere assunto sul bordo, dove f è positiva: quindi sarà assunto all'interno, necessariamente in un punto stazionario. I punti di minimo relativo all'interno della palla sono quelli già trovati, e si conclude che i punti $\pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ sono di minimo assoluto. In particolare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{1}{128}.$$

Esercizio 2 (a) Con la sostituzione $e^x = t$, che dà $dx = dt/t$, l'integrale diventa

$$\int_{-\ln 15}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x}}\, dx = \int_{1/15}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t}} = \int_{1/15}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t+1}}.$$

Con l'ulteriore sostituzione $t = s^2$, da cui $ds = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 15}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x}}\,dx &= \int_{1/15}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{t+1}} = 2\int_{1/\sqrt{15}}^{1} \frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = \\ &= \Big[2\ln(s+\sqrt{s^2+1})\Big]_{1/\sqrt{15}}^{1} = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{5}{\sqrt{15}}} = \ln\frac{3(1+\sqrt{2})^2}{5}.\end{aligned}$$

Si poteva anche procedere nel modo seguente: osservando che

$$\int_{-\ln 15}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x}}\,dx = \int_{-\ln 15}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}\,dx,$$

con la sostituzione $t = \sqrt{1+e^{-x}}$ si ha $x = -\ln(t^2-1)$, $dx = -\frac{2t}{t^2-1}\,dt$ e dunque

$$\int_{-\ln 15}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}\,dx = -\int_{4}^{\sqrt{2}} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{4} \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right] dt = \left[\ln\frac{|1-t|}{1+t}\right]_{\sqrt{2}}^{4}.$$

Pertanto, essendo $1-t<0$,

$$\int_{-\ln 15}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x}}\,dx = \left[\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{4} = \ln\frac{3}{5} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{3(1+\sqrt{2})^2}{5}.$$

(b) La quantità $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ è negativa in $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ e positiva in $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Quindi l'integrale si decompone come segue:

$$\int_{-1}^{3} \left|x-\frac{1}{2}\right| e^x\,dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-x\right) e^x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(x-\frac{1}{2}\right) e^x\,dx.$$

Il primo termine, integrando per parti, diventa

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-x\right) e^x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^x - x\,e^x + e^x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{3}{2}-x\right) e^x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}e^{-1}.$$

Di conseguenza il secondo termine vale

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(x-\frac{1}{2}\right) e^x\,dx = -\left[\left(\frac{3}{2}-x\right) e^x\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{3}{2}e^3 + e^{\frac{1}{2}}.$$

In definitiva, per l'integrale proposto si ha

$$\int_{-1}^{3} \left|x-\frac{1}{2}\right| e^x\,dx = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}e^{-1} + \frac{3}{2}e^3 + e^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}e^3 + 2\,e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}e^{-1}.$$

Esercizio 3 (a) L'equazione caratteristica associata all;'equazione omogenea è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

e si ha la radice doppia $\lambda = 2$. Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è

$$V_0 = \left\{ c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x},\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tenuto conto del fatto che l'esponenziale a secondo membro ha come coefficiente dell'esponente la radice doppia dell'equazione caratteristica, possiamo cercare una soluzione particolare y^* dell'equazione non omogenea della forma

$$y^*(x) = A\, x^2\ e^{2x} + B + Cx + Dx^2.$$

Si ha allora

$$(y^*)'(x) = (2Ax + 2Ax^2)e^{2x} + C + 2Dx, \qquad (y^*)''(x) = (2A + 8Ax + 4Ax^2)e^{2x} + 2D,$$

da cui

$$\begin{aligned} &(y^*)'' - 4(y^*)' + 4y^* = \\ &\quad = (2A + 8Ax + 4Ax^2 - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2)e^{2x} + \\ &\qquad\qquad + 2D - 4C - 8Dx + 4B + 4Cx + 4Dx^2 = \\ &\quad = 2A\, e^{2x} + 2D - 4C + 4B + (4C - 8D)x + 4Dx^2. \end{aligned}$$

Poiché vogliamo che sia $(y^*)'' - 4(y^*)' + 4y^* = e^{2x} + x^2$, occorre che risulti

$$2A = 1, \qquad 2D - 4C + 4B = 0, \qquad 4C - 8D = 0, \qquad 4D = 1,$$

ossia

$$A = \frac{1}{2}, \qquad D = \frac{1}{4}, \qquad C = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{3}{8}.$$

Si conclude che

$$y^*(x) = \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4}\, x^2,$$

e pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è

$$\left\{ c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4}\, x^2,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ ad una generica soluzione

$$y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4}\, x^2 :$$

essendo

$$y'(x) = 2c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{2x} + 2c_2\, x\, e^{2x} + x\, e^{2x} + x^2\, e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2},$$

si ricava

$$y(0) = c_1 + \frac{3}{8} = 0, \qquad y'(0) = 2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 1,$$

da cui finalmente $c_1 = -\frac{3}{8}$, $c_2 = \frac{5}{4}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{3}{8}\, e^{2x} + \frac{5}{4}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4}\, x^2.$$

(b) Osservato che l'equazione è soddisfatta dalle costanti $y = 0$ e $y = 1$, e che la seconda di queste soddisfa la condizione $y(1) = 1$, si conclude subito che la soluzione del problema di Cauchy è la funzione costante

$$y(x) \equiv 1.$$