Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Punti fissi per mappe non espansive

Relatore :
Prof. Paolo Acquistapace

Candidato :
Maria Branca

Anno Accademico 2009-2010

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio dei punti fissi di mappe non espansive, la cui importanza in innumerevoli problemi applicativi è evidente; anche a livello teorico, comunque, le applicazioni non espansive sono strettamente legate agli operatori accretivi, spesso utilizzati nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali.
Se (X, d) è uno spazio metrico e C è un sottoinsieme non vuoto di X, un'applicazione $T : C \longrightarrow X$ è **non espansiva** se

$$d(T(x), T(x')) \leq d(x, x') \qquad \forall x,\, x' \in C;$$

un punto fisso per T è un punto $x \in C$ tale che $T(x) = x$.
Dunque tutto ciò che serve per definire l'oggetto del nostro studio è uno spazio metrico. Tuttavia per avere risultati significativi sull'esistenza di punti fissi bisogna considerare spazi metrici completi.
Nel caso particolare delle contrazioni, cioè delle mappe $T : C \longrightarrow X$ per le quali esiste $\lambda \in]0, 1[$ tale che

$$d(T(x), T(x')) \leq \lambda d(x, x') \qquad \forall x,\, x' \in C,$$

l'esistenza e unicità del punto fisso è garantita dal classico teorema di Picard, che fornisce anche un semplice metodo iterativo che converge al punto fisso.
Per le mappe non espansive, facili esempi mostrano che in generale non si ha più l'esistenza di punti fissi (ad esempio le traslazioni in $\mathbb{R}$), nè l'unicità (ad esempio l'identità), nè la convergenza del metodo iterativo di Picard (se $T : [0, 1] \to [0, 1]$ è definita da $T(x) = 1 - x$, vi è l'unico punto fisso $x = \frac{1}{2}$, ma l'iterazione di Picard che parte da $x_0 = 0$ non converge a x).
Nel caso generale di mappe non espansive, per ottenere risultati interessanti è necessario supporre che X sia uno spazio di Banach. Nei teoremi di esistenza che descriveremo vi è un'ipotesi ulteriore sullo spazio di Banach X, il quale deve essere uniformemente convesso oppure uniformemente liscio. Per quanto riguarda l'approssimazione di un punto fisso con metodi iterativi, analizzeremo due risultati: nel primo (iterazione di Ishikawa) si assume che $T(C)$ sia un insieme compatto, nel secondo (iterazione di Halpern) si suppone che X sia uno spazio di Hilbert oppure uno spazio uniformemente liscio, e che valgano opportune ipotesi di controllo sulla successione delle iterazioni.

Capitolo 1

Teoremi di esistenza

Come prima cosa andremo a mostrare due teoremi di esistenza di punti fissi per mappe non espansive definite in particolari sottoinsiemi di spazi di Banach: uniformemente convessi e uniformemente lisci.
Vediamo alcune definizioni.

Definizione 1.1. *Sia E un sottoinsieme di uno spazio vettoriale X. L'**inviluppo convesso** di E è l'insieme*

$$co(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \colon n \in \mathbb{N}^+,\ x \in E,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Definizione 1.2. *Sia X uno spazio vettoriale topologico. Si chiama **topologia debole** su X la topologia generata dalla famiglia di seminorme $\{p_\phi\}_{\phi \in X^*}$ così definite:*

$$p_\phi(x) = |\phi x| \qquad \forall x \in X.$$

La topologia debole si denota con il simbolo $\sigma(X, X^*)$.

Definizione 1.3. *Sia X uno spazio normato e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione contenuta in X. Diciamo che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge debolmente** ad un elemento $x \in X$ se si ha che $Fx_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$ per ogni funzionale $F \in X^*$; in tal caso scriveremo $x_n \rightharpoonup x$.*

Definizione 1.4. *Sia X uno spazio di Banach e sia $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica, che è così definita: ad ogni $x \in X$ associamo il funzionale $J_x \in X^{**}$ che agisce su X^* nel seguente modo:*

$$J_x(T) = T(x) \qquad \forall T \in X^*.$$

*Diciamo che X è **riflessivo** se $J(X) = X^{**}$.*

Definizione 1.5. *Uno spazio di Banach X si dice* ***uniformemente convesso*** *se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x, y \in X,\ \|x\|_X \leq 1,\ \|y\|_X \leq 1 \ \ e \ \ \|x-y\|_X > \varepsilon \ \Rightarrow \ \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X < 1-\delta.$$

Quindi intuitivamente uno spazio di Banach si dice uniformemente convesso se, presi comunque due punti distinti della sfera unitaria, il punto medio del segmento che li unisce si troverà molto all'interno della stessa, a meno che il segmento non sia molto corto.

Definizione 1.6. *Sia X uno spazio di Banach reale. Il* ***modulo di liscezza*** *di X è la funzione*

$$\rho_X : [0, +\infty) \to [0, +\infty),$$

definita da

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\|_X + \|x-\tau y\|_X}{2} - 1 \,\middle|\, \|x\|_X \leq 1,\ \|y\|_X \leq 1\right\}.$$

X è detto ***uniformemente liscio*** *se:*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Equivalentemente diremo che X è ***uniformemente liscio*** *se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tau > 0$ tale che*

$$\forall x, y \in X,\ \|x\|_X \leq 1,\ \|y\|_X \leq \tau \quad \Rightarrow \quad \|x+y\|_X + \|x-y\|_X \leq 2 + \varepsilon\|y\|_X.$$

Osservazione 1.7. E' facile verificare che la funzione ρ_X, per come è stata definita, è una funzione crescente, con $\rho_X(0) = 0$ e $\lim_{\tau\to+\infty} \rho_X(\tau) = +\infty$.

Ricordiamo inoltre:

Teorema 1.8 (Milman)**.** *[4]*
Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.

□

Proposizione 1.9. *[2]*
Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X.
Allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente in X ad un elemento $x \in X$.

□

1.1 Teorema di esistenza in spazi di Banach uniformemente convessi

Il più noto teorema sull'esistenza dei punti fissi per mappe non espansive in spazi uniformemente convessi viene dimostrato indipendentemente da Browder [5], da Göhde [7] e da Kirk [11].

Teorema 1.10 (Browder-Göhde-Kirk)**.**
Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso, sia $C \subseteq X$ un suo sottoinsieme non vuoto, convesso, chiuso e limitato e sia $T : C \longrightarrow C$ una mappa non espansiva. Allora T ha un punto fisso.

Dimostrazione. Sia Φ la famiglia di tutti i sottoinsiemi non vuoti, convessi e chiusi di C, invarianti per T, cioè $T(\overline{C}) \subseteq \overline{C}$, per ogni $\overline{C} \in \Phi$.
Φ è un insieme non vuoto, poiché C è un elemento di Φ, inoltre, ponendo $C_1 \leq C_2$ se $C_1 \subset C_2$, Φ diventa un insieme parzialmente ordinato. Vogliamo dimostrare che Φ ha un elemento minimo C_0; per far questo vogliamo applicare il *lemma di Zorn* per il quale ogni insieme non vuoto, parzialmente ordinato e induttivo ha un elemento minimo. Verifichiamo allora che Φ sia induttivo, cioè che ogni sottoinsieme di Φ totalmente ordinato ammetta un elemento minimale. Ma un sottoinsieme totalmente ordinato $K = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di Φ è composto da sottoinsiemi di C non vuoti, chiusi, convessi, limitati e inscatolati.
Per il teorema 1.8 abbiamo che X è uno spazio di Banach riflessivo e dunque, poiché in uno spazio di Banach riflessivo gli insiemi chiusi, limitati e convessi sono compatti con la topologia debole [4], avremo che la loro intersezione, oltre ad essere chiusa, limitata e convessa, è compatta con la topologia debole e quindi non vuota, per la proprietà dell'intersezione finita. L'intersezione è l'elemento minimale cercato.
Allora, per il lemma di Zorn, Φ ha un elemento minimo C_0.
Dimostriamo che C_0 è uguale all'inviluppo convesso chiuso di $T(C_0)$. Supponiamo infatti sia C_1 questo inviluppo convesso chiuso, cioè $C_1 = \overline{co(T(C_0))}$.
Allora, poiché $T(C_0) \subseteq C_0$ e C_0 è chiuso e convesso, anche $C_1 = \overline{co(T(C_0))}$ sarà contenuto in C_0, quindi $C_1 \subseteq C_0$.
Inoltre C_1 è anche invariante per T, cioè $T(C_1) \subseteq C_1$. Infatti, utilizzando la definizione di C_1, verifichiamo che $T\Big(co(T(C_0))\Big) \subseteq C_1$. Consideriamo $x \in co(T(C_0))$: allora abbiamo, per definizione di inviluppo convesso,

$$\exists x_i \in C_0 \text{ tali che } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i).$$

Ma poiché C_0 è invariante per T, abbiamo che anche $T(x_i) \in C_0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Allora $x \in C_0$ e dunque $T(x) \in T(C_0) \subseteq co(T(C_0)) \subseteq C_1$. Ma T è continua, infatti è non espansiva, per cui $T^{-1}(C_1)$ è un chiuso che contiene $co(T(C_0))$, quindi contiene $\overline{co(T(C_0))} = C_1$; ossia $T(C_1) \subseteq C_1$. Ma allora abbiamo trovato un insieme non vuoto, chiuso, convesso e invariante rispetto a T contenuto in C_0. Per la minimalità di C_0 in Φ, deve essere $C_1 = C_0$.
Per completare la dimostrazione basterà mostrare che C_0 ha un solo elemento. Poiché non è vuoto, basta verificare che non può avere due elementi distinti.
Supponiamo per assurdo che li abbia. Sia d_0 il diametro di C_0 e siano x_1 e x_2 due punti distinti di C_0 tali che $\|x_1 - x_2\|_X \geq \frac{d_0}{2}$.
Sia $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ il punto medio. Allora, per ogni $y \in C_0$, $x - y$ sarà punto medio tra $x_1 - y$ e $x_2 - y$, con $\|x_1 - y\|_X \leq d_0$ e $\|x_2 - y\|_X \leq d_0$.
Di conseguenza, dato $\varepsilon = \frac{d_0}{2} > 0$, abbiamo che:

$$\left\|\frac{x_1 - y}{d_0}\right\|_X \leq 1, \quad \left\|\frac{x_2 - y}{d_0}\right\|_X \leq 1, \quad \left\|\frac{(x_1 - y) - (x_2 - y)}{d_0}\right\|_X = \left\|\frac{x_1 - x_2}{d_0}\right\|_X > \varepsilon.$$

Per l'uniforme convessità, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\left\|\frac{(x_1 - y) + (x_2 - y)}{2d_0}\right\|_X = \left\|\frac{x_1 + x_2}{2d_0} - \frac{y}{d_0}\right\|_X = \left\|\frac{x - y}{d_0}\right\|_X < 1 - \delta < 1.$$

Posto $d_1 = (1 - \delta)d_0 < d_0$, abbiamo trovato che

$$\|x - y\|_X \leq d_1 < d_0 \qquad \forall y \in C_0.$$

Poniamo

$$C_2 = \bigcap_{y \in C_0} \{u \in C_0 \mid \|u - y\|_X \leq d_1\}.$$

Verifichiamo che C_2 è un sottoinsieme proprio di C_0. Per definizione di diametro,

$$\exists y_1,\, y_2 \in C_0 \text{ tali che } \|y_1 - y_2\|_X = d_0(1 - \theta) \text{ con } \theta < \delta.$$

Dunque $\|y_1 - y_2\|_X > d_1$; abbiamo quindi trovato due punti y_1, $y_2 \in C_0$, con $y_1 \notin C_2$ oppure $y_2 \notin C_2$.
Inoltre C_2 è banalmente chiuso e convesso, poiché è intersezione di insiemi chiusi e convessi ed è non vuoto, abbiamo infatti appena mostrato che $x \in C_2$.
Vogliamo verificare che C_2 è invariante per T. Consideriamo una coppia di elementi $y \in C_0$ ed $u \in C_2$. Come abbiamo dimostrato C_0 è l'inviluppo

convesso chiuso di $T(C_0)$, cioè $C_0 = \overline{co(T(C_0))}$. Allora, essendo C_0 chiuso, non ha punti isolati:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists z \in C_0 \text{ tale che } \|y - z\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché z è aderente a $co(T(C_0))$, esiste

$$z' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(z_i), \text{ con } z_i \in C_0, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

tale che $\|z - z'\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ Allora abbiamo che:

$$\|y - z'\|_X \|y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(z_i)\|_X < \varepsilon.$$

Quindi, per la disuguaglianza triangolare, troviamo che:

$$\begin{aligned} \|T(u) - y\|_X \ &\leq \ \|T(u) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(z_i)\|_X + \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(z_i) - y\|_X \\ &\leq \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|T(u) - T(z_i)\|_X + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ma T è una mappa non espansiva, quindi

$$\|T(u) - T(z_i)\|_X \leq \|u - z_i\|_X \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ed inoltre essendo $u \in C_2$, per ogni $y \in C_0$ vale $\|u - y\|_X \leq d_1$.
Perciò

$$\|T(u) - y\|_X \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|u - z_i\|_X + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_1 + \varepsilon = d_1 + \varepsilon.$$

Ma poiché questo vale per ogni $\varepsilon > 0$ si ha infine che:

$$\|T(u) - y\|_X \leq d_1 \quad \forall y \in C_0.$$

Abbiamo dunque trovato che per ogni $u \in C_2$, $T(u) \in C_2$, quindi C_2 è invariante per T. Essendo anche chiuso, limitato e convesso, ne segue quindi che $C_2 \in \Phi$. Inoltre, come abbiamo precedentemente osservato, $C_2 \subsetneq C_0$, ma questo è assurdo per la minimalità di C_0 in Φ. Assumendo che C_0 avesse due punti distinti siamo arrivati ad un assurdo.
Abbiamo così trovato che $C_0 = \{x_0\}$ cioè, essendo C_0 invariante per T, si ha $T(x_0) = x_0$.

$\square$

Esempio 1.11. Sottolineiamo come questo risultato non possa essere esteso a generici spazi di Banach. Mostriamo un controesempio.
Consideriamo lo spazio di Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ delle funzioni continue definite su $[0,1]$, con

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big|, \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Questo non è uno spazio uniformemente convesso.
Poniamo

$$K = \{f \in C[0,1] :\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ 0 \le f(x) \le 1\},$$

K è chiaramente limitato, chiuso e convesso. Consideriamo allora la mappa $\phi : K \to C[0,1]$ così definita: ad ogni $h \in K$ associamo la funzione $\phi_h \in C[0,1]$ nel seguente modo

$$\phi(h(x)) = xh(x), \qquad \forall x \in [0,1].$$

Abbiamo, per ogni h, $k \in K$

$$\begin{aligned}
\|\phi(h) - \phi(k)\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\phi(h(x)) - \phi(k(x))| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |x(h(x) - k(x))| \le \sup_{x\in[0,1]} |h(x) - k(x)| \\
&\le \|h - k\|_\infty
\end{aligned}$$

Quindi ϕ è non espansiva, ma non ha punti fissi in K.

1.2 Teorema di esistenza in spazi di Banach uniformemente lisci

Vediamo ora un teorema di esistenza di punti fissi per mappe non espansive definite su sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di spazi di Banach uniformemente lisci.
Iniziamo mostrando che gli spazi di Banach uniformemente lisci sono riflessivi.
Per fare ciò ricordiamo che, per il teorema 1.8, gli spazi uniformemente convessi sono riflessivi, ma sappiamo anche [4] che X è uno spazio di Banach riflessivo se e solo se il suo spazio duale X^* è uno spazio di Banach riflessivo.
Se dimostriamo dunque che il duale di uno spazio di Banach uniformemente liscio è uniformemente convesso abbiamo finito.

Teorema 1.12. *Sia X uno spazio di Banach uniformemente liscio; allora il suo duale X^* è uno spazio di Banach uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, in accordo con la definizione di spazio uniformemente liscio, abbiamo che esiste $\tau > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X,\ \|x\|_X \leq 1,\ \|y\|_X \leq \tau \ \Rightarrow\ \|x+y\|_X + \|x-y\|_X \leq 2 + \frac{\varepsilon}{4}\|y\|_X.$$

Vogliamo dimostrare che X^* è uniformemente convesso.
Siano f, $g \in X^*$ tali che

$$\|f\|_{X^*} \leq 1, \quad \|g\|_{X^*} \leq 1, \quad \|f-g\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \langle f-g, x\rangle > \varepsilon.$$

Consideriamo $u \in X$ tale che $\|u\|_X \leq 1$ e $\langle f-g, u\rangle > \frac{\varepsilon}{2}$. Poniamo $v = \tau u$, chiaramente avremo che $\|v\|_X \leq \tau$ e $\langle f-g, v\rangle = \tau\langle f-g, u\rangle > \tau\frac{\varepsilon}{2}$. Ricordando che

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} \langle f, x\rangle \qquad \forall x \in X,$$

per la linearità e applicando la definizione, avremo

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_{X^*} = \\
&\quad = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \big\{\langle f+g, x\rangle\big\} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \big\{\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle\big\} \\
&\quad = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \big\{\langle f, x+v\rangle + \langle g, x-v\rangle - \big(\langle f, v\rangle - \langle g, v\rangle\big)\big\} \\
&\quad \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \big\{\|x+v\|_X + \|x-v\|_X - \tau\frac{\varepsilon}{2}\big\}.
\end{aligned}$$

Ma, dall'altro canto, per ipotesi, per ogni u, $v \in X$, con $\|u\|_X \leq 1$ e $\|v\|_X \leq \tau$, si ha

$$\|u+v\|_X + \|u-v\|_X \leq 2 + \tau\frac{\varepsilon}{4},$$

per cui

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{X^*} \leq 1 + \tau\frac{\varepsilon}{8} - \tau\frac{\varepsilon}{4} = 1 - \tau\frac{\varepsilon}{4}.$$

Cioè abbiamo trovato che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_{\varepsilon,\tau} = \tau\frac{\varepsilon}{4} > 0$ tale che, per ogni f, $g \in X^*$ con $\|f\|_{X^*} \leq 1$, $\|g\|_{X^*} \leq 1$ e $\|f-g\|_{X^*} > \varepsilon$ si ha che:

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{X^*} \leq 1 - \delta.$$

Ovvero abbiamo mostrato che X^* è uniformemente convesso. □

Ricordiamo inoltre che:

Definizione 1.13. *Sia C un sottoinsieme non vuoto convesso, chiuso e limitato di uno spazio di Banach X.*
Data $T : C \longrightarrow C$ una mappa non espansiva, diremo che C è ***minimale per*** T *se non esiste alcun sottoinsieme proprio di C che sia non vuoto, convesso e T-invariante.*

Lemma 1.14. *Sia C un sottoinsieme non vuoto convesso, chiuso e limitato di uno spazio di Banach X uniformemente liscio.*
Sia $T : C \longrightarrow C$ una mappa non espansiva tale che C sia minimale per T. Allora

$$r_x(C) := \sup_{y \in C} \|x - y\|_X = D, \qquad \forall x \in C,$$

dove $D = \sup_{x,y \in C} \|x - y\|_X$.

Dimostrazione. Iniziamo osservando che $\overline{co(T(C))} = C$. Per verificarlo si ricalca il procedimento utilizzato nella dimostrazione del teorema di Browder, cioè si osserva che, essendo C invariante per T ed essendo un insieme chiuso e convesso, si deve avere che $\overline{co(T(C))} \subseteq C$. Si verifica inoltre che anche $\overline{co(T(C))}$ è un insieme invariante per T e quindi, essendo per ipotesi C minimale, si avrà proprio che $\overline{co(T(C))} = C$.
Consideriamo ora la funzione $r : C \to \mathbb{R}$, definita da $r(x) = r_x(C)$ per ogni $x \in C$; questa è convessa, semicontinua inferiormente e positiva, quindi sappiamo [1] che r ha minimo su C. Posto, dunque,

$$C_0 = \left\{ x \in C \,\middle|\, r(x) = \inf_{y \in C} r(y) \right\},$$

avremo che C_0 è un sottoinsieme di C non vuoto ed ovviamente chiuso, convesso e limitato.
Inoltre

$$r(T(x)) \leq r(x) \qquad \forall x \in C.$$

Infatti, poiché $\overline{co(T(C))} = C$, esiste per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $y \in C$, una combinazione convessa tale che

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(z_i) - y \right\|_X \leq \varepsilon.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|T(x)-y\|_X &\leq \|T(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(z_i)\|_X + \|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(z_i)-y\|_X \\ &\leq \|T(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(z_i)\|_X + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|x-z_i\|_X + \varepsilon \\ &\leq r(x)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Allora abbiamo dimostrato che $r(T(x)) \leq r(x)+\varepsilon$, per ogni ε. Quindi C_0 è invariante per T; ma allora per la minimalità di C abbiamo che r è una funzione costante, in particolare

$$r_x(C) = D \qquad \forall x \in C.$$

□

Lemma 1.15. *Sia C un sottoinsieme non vuoto convesso, chiuso e limitato di uno spazio di Banach X uniformemente liscio.*
Sia $T : C \longrightarrow C$ una mappa non espansiva tale che C sia minimale per T e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = 0$, allora

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|_X = \lim_{n\to\infty}\|x_n - y\|_X = D \qquad \forall y \in C,$$

dove $D = \sup_{x,y\in C}\|x-y\|_X$.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa $\psi : C \to \mathbb{R}$, definita da

$$\psi(y) = \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|_X, \qquad \forall y \in C.$$

Vogliamo dimostrare che ψ è costante su C.
La mappa ψ è banalmente convessa, semicontinua inferiormente e positiva, essendo il massimo limite di un modulo, quindi sappiamo [1] che ψ ha minimo su C. Posto, dunque,

$$C_0 = \left\{ x \in C \,\middle|\, \psi(x) = \inf_{y\in C}\psi(y) \right\},$$

avremo che C_0 è un sottoinsieme di C non vuoto ed ovviamente chiuso, convesso e limitato.
Inoltre $T(C_0) \subseteq C_0$. Infatti, dato $x_0 \in C_0$, dalle ipotesi segue che

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\|x_n - T(x_0)\|_X \leq \\ &\quad\leq \limsup_{n\to\infty}\|T(x_n)-T(x_0)\|_X + \limsup_{n\to\infty}\|x_n - T(x_n)\|_X \\ &\quad\leq \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x_0\|_X.\end{aligned}$$

In altre parole $\psi(T(x_0)) \leq \psi(x_0) = \inf_{y \in C} \psi(y)$, quindi $T(x_0) \in C_0$, cioè $T(C_0) \subseteq C_0$. Dalla minimalità di C segue che $C_0 = C$, cioè ψ è costante su C o, equivalentemente, esiste $D' \in \mathbb{R}$ tale che

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X = D', \qquad \forall y \in C.$$

Supponiamo per assurdo $D' < D$, dunque $\frac{D'+D}{2} < D$.
Poniamo

$$\overline{B}\left(y, \frac{D'+D}{2}\right) = \left\{x \in C \,\middle|\, \|x - y\|_X \leq \frac{D'+D}{2}\right\} \qquad \forall y \in C.$$

Sia $0 < \varepsilon \leq \frac{D-D'}{2}$, allora per ogni insieme finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq C$, possiamo trovare un intero N tale che:

$$\|x_N - y_i\|_X \leq D' + \varepsilon \leq \frac{D'+D}{2}, \qquad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Quindi $x_N \in \bigcap_{i=1}^{k} \overline{B}\left(y_k, \frac{D'+D}{2}\right)$.
Dunque la famiglia $\left\{\overline{B}\left(y, \frac{D'+D}{2}\right) \,\middle|\, y \in C\right\}$, che è costituita da insiemi compatti rispetto alla topologia debole dello spazio riflessivo X, gode della proprietà dell'intersezione finita. Pertanto l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia è non vuota, cioè esiste

$$x_0 \in \bigcap_{y \in C} \overline{B}\left(y, \frac{D'+D}{2}\right).$$

Ma allora si ha che $r_{x_0}(C) = \sup_{y \in C} \|x_0 - y\|_X < \frac{D'+D}{2} < D$. Ma questo è assurdo perché nel lemma 1.14 abbiamo dimostrato che $r_x(C) = D$, per ogni $x \in C$.
Ci resta da dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X = \limsup_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X, \qquad \forall y \in C.$$

cioè

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X = \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X, \qquad \forall y \in C.$$

Supponiamo per assurdo che esista $y \in C$

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X < D,$$

allora dovrebbe esistere una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_{n_k} - y\|_X = \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|_X < D.$$

Ma allora avremmo trovato una successione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ con $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - T(x_{n_k})\|_X = 0$ tale che

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_{n_k} - y\|_X < D,$$

ma questo è in contraddizione con quanto appena dimostrato.

$\square$

Possiamo, a questo punto, vedere il teorema di esistenza:

Teorema 1.16 (Baillon)**.** *[3]*
Sia C un sottoinsieme non vuoto convesso, chiuso e limitato di uno spazio di Banach X uniformemente liscio.
Sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva tale che C sia minimale per T, allora T ha un punto fisso in C.

Dimostrazione. Sia $D \in \mathbb{R}$ il diametro di C, cioè

$$D = \sup_{x,\, y\in C} \|x - y\|_X.$$

Se $D = 0$, allora la tesi è banalmente vera; infatti essendo C non vuoto, avremo $C = \{x_0\}$ ed, essendo T invariante su C, risulterà che

$$T(x_0) = x_0,$$

cioè x_0 è un punto fisso di T.
Supponiamo allora per assurdo che $D > 0$.
Sia $u \in C$ e $0 < k < 1$. Consideriamo la mappa $T_k : C \to X$ definita da:

$$T_k(x) = ku + (1-k)T(x), \qquad \forall x \in C.$$

Osserviamo innanzitutto che $T_k(C) \subseteq C$, infatti C è convesso e invariante per T, dunque, per ogni $x \in C$, $T_k(x)$ risulta essere combinazione convessa di u e $T(x)$, entrambi elementi di C, e quindi $T_k(x) \in C$.
Abbiamo inoltre che T_k è una contrazione di rapporto $0 < 1-k < 1$, infatti:

$$\begin{aligned} \|T_k(x) - T_k(y)\|_X &= \|ku + (1-k)T(x) - ku - (1-k)T(x)\|_X \\ &= (1-k)\|T(x) - T(y)\|_X \leq (1-k)\|x - y\|_X, \end{aligned}$$

per ogni x, $y \in C$.
Allora, per il teorema delle contrazioni, si ha che T_k ha un unico punto fisso $x_k \in C$:

$$x_k = T_k(x_k) = ku + (1-k)T(x_k).$$

Inoltre vale che

$$\|x_k - T(x_k)\|_X = \|ku + (1-k)T(x_k) - T(x_k)\|_X = k\|u - T(x_k)\|_X \leq kD.$$

Quindi si avrà che $\lim_{k\to 0}(x_k - T(x_k)) = 0$.
Poniamo $K = \{x \in C \,\big|\, x = T_k(x) \text{ per un certo } k \in (0,1)\}$.
Allora se $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $(0,1)$ tale che $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, si avrà che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sarà una successione limitata definita in K, con $\lim_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = 0$.

Allora per il teorema 1.9, essendo X uniformemente liscio e quindi riflessivo, passando a sottosuccessione, possiamo supporre che

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in C.$$

Sia $0 < \tau < 1$, per definizione di modulo di liscezza vale la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} &1 + \rho\left(\frac{\tau\|\bar{x} - x_m\|_X}{\|x_n - x_m\|_X}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|\frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|_X} + \frac{\tau(\bar{x} - x_m)}{\|x_n - x_m\|_X}\right\|_X + \frac{1}{2}\left\|\frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|_X} - \frac{\tau(\bar{x} - x_m)}{\|x_n - x_m\|_X}\right\|_X . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|x_n - x_m + \tau(\bar{x} - x_m)\|_X + \frac{1}{2}\|x_n - x_m - \tau(\bar{x} - x_m)\|_X \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\|_X\left(1 + \rho\left(\frac{\tau\|\bar{x} - x_m\|_X}{\|x_n - x_m\|_X}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Osserviamo che $x_m + \tau(\bar{x} - x_m) = (1-\tau)x_m + \tau\bar{x}$, essendo combinazione convessa di elementi del convesso C, è un elemento di C; quindi per il lemma 1.15

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - (x_m + \tau(\bar{x} - x_m))\|_X = \lim_{n\to\infty}\|x_n - (x_m + \tau(\bar{x} - x_m))\|_X = D.$$

Inoltre poiché $\|x_n - x_m\|_X \leq D$, si avrà che

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_m\|_X = D^-$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|x_n - x_m\|_X} = \left(\frac{1}{D}\right)^+.$$

Allora, dalla crescenza di ρ, segue che

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \rho\left(\frac{\tau\|\bar{x}-x_m\|_X}{\|x_n-x_m\|_X}\right) &= \lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{\tau\|\bar{x}-x_m\|_X}{\|x_n-x_m\|_X}\right) \\
&= \rho\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\tau\|\bar{x}-x_m\|_X}{\|x_n-x_m\|_X}\right) \\
&= \rho\left(\left(\frac{\tau\|\bar{x}-x_m\|_X}{D}\right)^+\right) \\
&\leq \rho(\tau^+).
\end{aligned}$$

Mettendo insieme queste osservazioni e passando al limite per $n \to \infty$, la disuguaglianza (1.1) diventa

$$\frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_m + \tau(\bar{x}-x_m)\|_X + \frac{D}{2} \leq D + D\rho(\tau^+).$$

Ma $x_n \rightharpoonup \bar{x}$, quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\bar{x}-x_m+\tau(\bar{x}-x_m)\|_X + \frac{D}{2} &\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_m + \tau(\bar{x}-x_m)\|_X + \frac{D}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_m + \tau(\bar{x}-x_m)\|_X + \frac{D}{2} \\
&\leq D + D\rho(\tau^+),
\end{aligned}$$

cioè

$$\frac{1}{2}(1+\tau)\|\bar{x}-x_m\|_X \leq \frac{D}{2} + D\rho((\tau)^+).$$

Prendiamo ora il limite per $m \to \infty$ e otteniamo

$$\frac{1}{2}(1+\tau)D \leq \frac{D}{2} + D\rho(\tau^+),$$

da cui si ricava che

$$\frac{\rho(\tau^+)}{\tau} \geq \frac{1}{2}.$$

Supponendo che $D > 0$ siamo arrivati ad un assurdo, infatti, essendo X uniformemente liscio, si deve avere che

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\rho(\tau^+)}{\tau} = 0.$$

Quindi la tesi è dimostrata.

□

Capitolo 2

Iterazione di Ishikawa

2.1 Premessa

Nel 1955 Krasnoselsky introduce una speciale tecnica iterativa per approssimare punti fissi per mappe non espansive definite in un sottoinsieme di Banach. Vediamo il risultato principale da lui raggiunto:

Teorema 2.1 (Teorema di Krasnoselsky)**.** *[12]*
Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso, sia $C \subseteq X$ un suo sottoinsieme convesso e chiuso e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva. Supponiamo che $T(C)$ sia contenuto in un sottoinsieme compatto di C. Allora per ogni $\overline{x} \in C$ la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$\begin{cases} x_1 = \overline{x} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + T(x_n)), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

converge ad un punto fisso di T.
La (2.1) *oggi è nota come* ***iterazione di Krasnoselsky****.*

Notiamo come il teorema fornisca un algoritmo per il calcolo di un punto fisso per la mappa data, ma viene aggiunta, rispetto al Teorema di Browder, la condizione che l'immagine di T debba essere contenuta in un compatto di C.
Una importante estensione di questo metodo ci viene fornita da Ishikawa[10] nel 1967. Egli infatti dimostra che il Teorema di Krasnoselsky continua a valere anche senza dover assumere alcuna ipotesi di convessità sullo spazio di Banach X, inoltre utilizza una iterazione molto più generale che noi chiameremo **iterazione di Krasnoselsky - Mann**.
Enunciamo allora il teorema dimostrato da Ishikawa:

Teorema 2.2. *[10]*
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach X, $T : C \to X$ una mappa non espansiva. Supponiamo che $T(C)$ sia contenuta in un sottoinsieme compatto di X e che la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abbia valori in $[0,1]$, con:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty \qquad e \qquad \limsup_{n\to\infty} t_n < 1.$$

Allora per ogni $x_1 \in C$, la successione di Krasnoselsky - Mann $(x_n)_{n\in N}$ definita da

$$x_{n+1} = (1 - t_n)x_n + t_n T(x_n), \;\; n \geq 1 \tag{2.2}$$

converge ad un punto fisso di T.

Noi, però, analizzeremo con maggiori dettagli una generalizzazione di tale iterazione, introdotta per la prima volta nel 1974 dallo stesso Ishikawa [9]. Questo perché la successione usata sarà molto più generale di quella di Krasnoselsky-Mann.

Definizione 2.3.
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach X, $T : C \to X$ una mappa non espansiva.
Per ogni $x_1 \in C$, definiamo la successione

$$x_{n+1} = t_n T(s_n T(x_n) + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n, \quad con\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

dove $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni in $[0,1]$.
*Questo processo iterativo viene soprannominato **iterazione di Ishikawa**.*

Osservazione 2.4. Notiamo che l'iterazione di Krasnoselsky-Mann, vista sopra, non è altro che un caso speciale della (2.3). Basta infatti considerare la successione $s_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ottenere la (2.2).

Verificheremo, seguendo la dimostrazione proposta da Deng [6] nel 1996 che la (2.3) converge ad un punto fisso di T, se le successioni $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfano alcune condizioni iniziali. Questo senza dover supporre che lo spazio di Banach X sia uniformemente convesso, ma con l'ipotesi aggiuntiva che l'immagine $T(C)$ sia contenuta in un sottoinsieme compatto di C.
Prima di mostrare il teorema principale dobbiamo dimostrare alcuni lemmi.

2.2 Lemmi

Lemma 2.5. *[17]*
Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *siano due successioni di numeri reali non negativi tali che* $a_{n+1} \leq a_n + b_n$ *per ogni* $n \geq 1$.
Se $\sum_{i=1}^{\infty} b_n < \infty$ *allora esiste il* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Dimostrazione. Per ogni $n,\ m \geq 1$, abbiamo che

$$a_{n+m+1} \leq a_{n+m} + b_{n+m} \leq a_{n+(m-1)} + b_{n+(m-1)} + b_{m+n} \leq \ldots \leq a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i$$

Allora

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i.$$

Ma questo implica che

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Allora il massimo limite e quello minimo coincidono e quindi, come volevamo dimostrare, esiste il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Lemma 2.6.
Sia X *uno spazio normato e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni in* X.
Se esiste una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di numeri reali tale che:*

$$0 \leq t_n \leq t < 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \tag{i}$$

$$a_{n+1} = (1-t_n)a_n + t_n b_n \qquad \forall n \geq 1, \tag{ii}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_X = d, \tag{iii}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|b_n\|_X \leq d \ \text{ e la successione } \left(\sum_{i=1}^{n} t_i b_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è limitata} \tag{iv}$$

allora $d = 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi $d \geq 0$. Supponiamo per assurdo che $d > 0$.
Dalla (iv) segue che $\sum_{i=n}^{n+m-1} t_i b_i$ è limitata per ogni n ed m interi positivi.
Allora posto

$$L = \sup_{n,m\in\mathbb{N}^+} \left\| \sum_{i=n}^{n+m-1} t_i b_i \right\|_X \tag{2.4}$$

prendiamo un intero N tale che

$$N > \max\left\{\frac{2L}{d}, 1\right\}.$$

Quindi possiamo scegliere un numero $\varepsilon > 0$ tale che

$$1 - 2\varepsilon \exp\frac{N+1}{1-t} > \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Dalla (i) segue che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$N < \sum_{i=1}^{k} t_i.$$

Allora possiamo prendere il più piccolo intero M per cui quest'ultima relazione è verificata; avremo quindi che

$$\sum_{i=1}^{M-1} t_i \leq N < \sum_{i=1}^{M} t_i$$

e, valendo $0 \leq t_n < 1$, si ha anche

$$N < \sum_{i=1}^{M} t_i < N + 1.$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_X = d$, $\limsup_{n\to\infty} \|b_n\|_X \leq d$ ed ε non dipende da n, possiamo assumere, senza perdere generalità, che per ogni n si abbia

$$d(1-\varepsilon) < \|a_n\|_X < d(1+\varepsilon), \tag{2.6}$$

$$\|b_n\|_X < d(1+\varepsilon). \tag{2.7}$$

Poniamo $s_n = 1 - t_n$, allora $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha valori in $(0, 1]$.
Possiamo quindi applicare M volte la (ii), ottenendo che

$$\begin{aligned}
a_{M+1} &= t_M b_M + (1-t_M)a_M = t_M b_M + s_M a_M \\
&= t_M b_M + s_M(t_{M-1}b_{M-1} + s_{M-1}a_{M-1}) \\
&= t_M b_M + s_M t_{M-1} b_{M-1} + s_M s_{M-1}(t_{M-2}b_{M-2} + s_{M-2}a_{M-2}) \\
&= \ldots \\
&= t_M b_M + s_M t_{M-1} b_{M-1} + s_M s_{M-1} t_{M-2} b_{M-2} + \ldots + \\
&\qquad + s_M s_{M-1} \ldots s_2(t_1 b_1 + s_1 a_1) \\
&= t_M b_M + s_M t_{M-1} b_{M-1} + \ldots + s_M s_{M-1} \ldots s_2 t_1 b_1 + \\
&\qquad + s_M s_{M-1} \ldots s_2 s_1 a_1
\end{aligned}$$

Cioè, se definiamo l'insieme $B = co(a_1, b_1, \ldots, b_M)$, abbiamo appena verificato che $a_{M+1} \in B$: infatti, come si verifica facilmente

$$t_M + s_M t_{M-1} + \ldots + s_M s_{M-1} \ldots s_2 t_1 + s_M s_{M-1} \ldots s_2 s_1 = 1.$$

Poniamo inoltre

$$T = \sum_{i=1}^{M} t_i,$$

$$S = \prod_{i=1}^{M} s_i,$$

$$x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{M} t_i b_i$$

allora avremo, per come sono stati definiti t_i e s_i e per quanto sopra visto, che $N < T \leq N + 1$ mentre $0 < S \leq 1$ e $x \in B$. Sottraiamo da ambo i membri della precedente

$$Sx = S\left(\frac{t_1 b_1 + \ldots + t_M b_M}{T}\right)$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
a_{M+1} - Sx = {} & Sa_1 + s_2 s_3 \ldots s_M t_1 b_1 + \ldots + s_{M-1} t_M b_{M-1} + t_M b_M \\
& - S\left(\frac{t_1 b_1 + \ldots + t_M b_M}{T}\right) \\
= {} & Sa_1 + \frac{S}{s_1} t_1 b_1 + \frac{S}{s_1 s_2} t_2 b_2 + \ldots + \frac{S}{s_1 s_2 \ldots s_{M-1}} t_{M-1} b_{M-1} + t_M b_M \\
& - S\left(\frac{t_1 b_1}{T}\right) - \ldots - S\left(\frac{t_M b_M}{T}\right) \\
= {} & Sa_1 + St_1\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{T}\right) b_1 + \ldots + St_{M-1}\left(\frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{M-1}} - \frac{1}{T}\right) b_{M-1} \\
& + St_M\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right) b_M \\
= {} & S\Bigg[a_1 + t_1\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{T}\right) b_1 + \ldots + t_{M-1}\left(\frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_{M-1}} - \frac{1}{T}\right) b_{M-1} \\
& + t_M\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right) b_M\Bigg].
\end{aligned}$$

Osserviamo che in realtà $0 < 1 - S < 1$. Infatti, se avessimo $1 - S = 0$, gli s_i sarebbero uguali a 1 per ogni $i = 1, \ldots, M$, ma questo è assurdo: in questo caso infatti avremmo che $t_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, M$, cosa che contraddice l'ipotesi che $N < \sum_{i=1}^{M} t_i$. Possiamo allora porre

$$\begin{aligned} y = \frac{S}{1-S}\Bigg[& a_1 + t_1\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{T}\right)b_1 \\ & + t_2\left(\frac{1}{s_1 s_2} - \frac{1}{T}\right)b_2 + \cdots + t_M\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right)b_M\Bigg]. \end{aligned}$$

Poiché $S + s_2 s_3 \ldots s_M + \ldots + s_{M-1} t_M + t_M - S t_1 - \ldots - S t_M = 1 - S$, è facile verificare che $y \in B$. Dunque, andando a sostituire, abbiamo trovato che

$$a_{M+1} = Sx + (1-S)y.$$

Dalla (2.6) e dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\begin{aligned} d(1-\varepsilon) &< \|a_{M+1}\|_X = \|Sx - (1-S)y\|_X \\ &\leq S\|x\|_X + (1-S)\|y\|_X \leq S\|x\|_X + (1-S)d(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio deriva da come è stato definito y e dall'osservazione che $\|a_1\|_X < d(1+\varepsilon)$ e $\|b_i\|_X < d(1+\varepsilon)$ per ogni $i = 1, \ldots, M$. Poiché vale che $\log(1+y) \leq y$ per ogni $y \in (-1, \infty)$, dalla relazione precedente ricaviamo

$$\begin{aligned} \|x\|_X &> \frac{d}{S}\Big(1 - \varepsilon - (1-S)(1+\varepsilon)\Big) \\ &= \frac{d}{S}\left(-2\varepsilon + S + S\varepsilon\right) = d\left(1 - \frac{\varepsilon}{S}(2-S)\right) \\ &> d\left(1 - \frac{2\varepsilon}{S}\right) = d\left(1 - 2\varepsilon \prod_{i=1}^{M}(1-t_i)^{-1}\right) \\ &= d\left\{1 - 2\varepsilon \exp\left(\sum_{i=1}^{M} \log\big(1-t_i\big)^{-1}\right)\right\} \\ &= d\left\{1 - 2\varepsilon \exp\left(\sum_{i=1}^{M} \log\big(1 + \frac{t_i}{1-t_i}\big)\right)\right\} \\ &\geq d\left(1 - 2\varepsilon \exp\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{t_i}{1-t_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che dalla (i) segue che $0 < 1 - t \le 1 - t_i \le 1$. Da questo e dalla (2.5) avremo che

$$\begin{aligned} \|x\|_X &> d\left(1 - 2\varepsilon \exp\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{t_i}{1-t_i}\right)\right) \\ &\ge d\left(1 - 2\varepsilon \exp\left(\frac{T}{1-t}\right)\right) \\ &\ge d\left(1 - 2\varepsilon \exp\left(\frac{N+1}{1-t}\right)\right) \\ &> \frac{d}{2}\,. \end{aligned}$$

Ma allo stesso tempo, osservando che $T = \sum_{i=1}^{M} t_i > N > \max\left\{\frac{2L}{d}, 1\right\} \ge \frac{2L}{d}$, dalla definizione di x, ricordando la (2.4), abbiamo che

$$\frac{d}{2} < \|x\|_X = \frac{1}{T}\left\|\sum_{i=1}^{M} t_i b_i\right\|_X \le \frac{L}{T} \le \frac{d}{2L} L = \frac{d}{2}\,.$$

Quindi siamo arrivati ad un assurdo e questo dimostra la nostra tesi, cioè $d = 0$.

□

Lemma 2.7. *[17]*
Sia C un sottoinsieme di uno spazio normato X e $T : C \to X$ una mappa non espansiva. Sia $x_1 \in X$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X l'iterazione di Ishikawa, data da

$$x_{n+1} = t_n T(s_n T(x_n) + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n \tag{2.8}$$

dove $0 \le t_n, s_n \le 1$ per ogni $n \ge 1$. Allora

$$\|x_{n+1} - p\|_X \le \|x_n - p\|_X \qquad \forall n \ge 1, \quad \forall p \in Fix(T)$$

dove con $Fix(T)$ denotiamo l'insieme dei punti fissi per T.

Dimostrazione. Per ogni $n \le 1$ definiamo la mappa $F_n : C \to X$ data da:

$$F_n(x) = t_n T(s_n T(x) + (1 - s_n)x) + (1 - t_n)x.$$

Dunque l'iterazione di Ishikawa si può riscrivere come

$$x_{n+1} = F_n(x_n).$$

Verifichiamo che la mappa F_n è non espansiva.
Per ogni $x, y \in D$, applicando la disuguaglianza triangolare ed essendo T non espansiva, troviamo che

$$\begin{aligned}
&\|F_n(x) - F_n(y)\|_X = \\
&\quad = \|(t_n f\big(s_n T(x) + (1 - s_n)x\big) + (1 - t_n)x) \\
&\qquad\qquad - (t_n f\big(s_n T(y) + (1 - s_n)y\big) + (1 - t_n)y)\|_X \\
&\quad \leq t_n \|f\big(s_n T(x) + (1 - s_n)x\big) - f\big(s_n T(y) + (1 - s_n)y\big)\|_X + (1 - t_n)\|x - y\|_X \\
&\quad \leq t_n \|s_n T(x) + (1 - s_n)x - s_n T(y) - (1 - s_n)y\|_X + (1 - t_n)\|x - y\|_X \\
&\quad \leq t_n s_n \|T(x) - T(y)\|_X + t_n(1 - s_n)\|x - y\|_X + (1 - t_n)\|x - y\|_X \\
&\quad \leq t_n s_n \|x - y\|_X + t_n(1 - s_n)\|x - y\|_X + (1 - t_n)\|x - y\|_X \\
&\quad = (t_n s_n + t_n - t_n s_n + 1 - t_n)\|x - y\|_X \\
&\quad = \|x - y\|_X.
\end{aligned}$$

Inoltre, essendo $p \in Fix(T)$, avremo che $p \in Fix(F_n)$, infatti

$$\begin{aligned}
F_n(p) &= t_n T(s_n T(p) + (1 - s_n)p) + (1 - t_n)p \\
&= t_n T(s_n p - s_n p + p) + (1 - t_n)p \\
&= p.
\end{aligned}$$

Infine otteniamo che

$$\|x_{n+1} - p\|_X = \|F_n(x_n) - F_n(p)\|_X \leq \|x_n - p\|_X.$$

□

Lemma 2.8.
Sia C un sottoinsieme di uno spazio normato X e sia $T : C \to X$ una mappa non espansiva.
Consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in C e due successioni di numeri reali $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che soddisfino le seguenti condizioni:

$$0 \leq t_n \leq t < 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \tag{i}$$

$$0 \leq s_n \leq 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty, \tag{ii}$$

$$x_{n+1} = t_n T(s_n T(x_n) + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, . \tag{iii}$$

Se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è limitata allora* $\lim_{n\to\infty}\|T(x_n)-x_n\|_X = 0$.

Dimostrazione. Innanzitutto poniamo, per semplificare i calcoli,

$$y_n = s_n T(x_n) + (1-s_n)x_n \qquad \forall n \geq 1.$$

Allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si riscriverà così

$$x_{n+1} = t_n T(y_n) + (1-t_n)x_n.$$

Essendo T non espansiva, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X = \\
&\quad = \|T(x_{n+1}) - t_nT(y_n) - (1-t_n)x_n\|_X \\
&\quad = \|T(x_{n+1}) - t_nT(y_n) + \big(t_nT(x_{n+1}) - t_nT(x_{n+1}))\big) - (1-t_n)x_n\|_X \\
&\quad = \|t_n\big(T(x_{n+1}) - T(y_n)\big) + (1-t_n)\big(T(x_{n+1}) - x_n\big)\|_X \\
&\quad \leq (1-t_n)\|T(x_{n+1}) - x_n)\|_X + t_n\|T(x_{n+1}) - T(y_n)\|_X \\
&\quad \leq (1-t_n)\|T(x_{n+1}) - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n)\|_X + t_n\|x_{n+1} - y_n\|_X \\
&\quad \leq (1-t_n)\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X + (1-t_n)\|x_{n+1} - x_n)\|_X + t_n\|x_{n+1} - y_n\|_X \\
&\quad = (1-t_n)\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X + (1-t_n)\|t_nT(y_n) + (1-t_n)x_n - x_n)\|_X \\
&\qquad\qquad + t_n\|t_nT(y_n) + (1-t_n)x_n + (t_ny_n - t_ny_n) - y_n\|_X \\
&\quad = (1-t_n)\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X + t_n(1-t_n)\|T(y_n) - x_n)\|_X \\
&\qquad\qquad + t_n\big(t_n\|T(y_n) - y_n\|_X + (1-t_n)\|x_n - y_n\|_X\big).
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che

$$\begin{aligned}
&t_n\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X \leq \\
&\quad \leq t_n(1-t_n)\|T(y_n) - x_n)\|_X + t_n\big(t_n\|T(y_n) - y_n\|_X + (1-t_n)\|x_n - y_n\|_X\big).
\end{aligned}$$

Possiamo assumere, senza perdere in generalità, che $t_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. Dividiamo ambo i membri per t_n e, ricordando che $y_n = s_nT(x_n) + (1-s_n)x_n$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\|T(x_{n+1}) - x_{n+1}\|_X \leq \\
&\quad \leq t_n\|T(y_n) - y_n\|_X + (1-t_n)\big(\|T(y_n) - x_n)\|_X + \|x_n - y_n\|_X\big) \\
&\quad = t_n\|T(y_n) + \big(s_nT(y_n) - s_nT(y_n)\big) - s_nT(x_n) - (1-s_n)x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1-t_n)\big(\|T(y_n) - x_n)\|_X + \|x_n - y_n\|_X\big) \\
&\quad \leq t_ns_n\|T(y_n) - T(x_n)\|_X + t_n(1-s_n)\|T(y_n) - x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1-t_n)\big(\|T(y_n) - x_n)\|_X + \|x_n - y_n\|_X\big) \\
&\quad \leq t_ns_n\|x_n - y_n\|_X + (t_n - t_ns_n + 1 - t_n)\|T(y_n) - x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1-t_n)\|x_n - y_n\|_X \\
&\quad = (1 + t_ns_n - t_n)\|x_n - y_n\|_X + (1 - t_ns_n)\|T(y_n) - x_n\|_X \\
&\quad = (1 + t_ns_n - t_n)\|x_n - s_nT(x_n) - (1-s_n)x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1 - t_ns_n)\|T(y_n) - T(x_n) + T(x_n) - x_n\|_X \\
&\quad \leq s_n(1 + t_ns_n - t_n)\|T(x_n) - x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1 - t_ns_n)\big(\|T(y_n) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X\big) \\
&\quad \leq s_n(1 + t_ns_n - t_n)\|T(x_n) - x_n\|_X \\
&\qquad\quad + (1 - t_ns_n)\big(\|s_nT(x_n) + (1-s_n)x_n - x_n\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X\big) \\
&\quad \leq s_n(1 + t_ns_n - t_n)\|T(x_n) - x_n\|_X + (1 - t_ns_n)(1+s_n)\|T(x_n) - x_n\|_X \\
&\quad = \big(1 + 2s_n(1-t_n)\big)\|T(x_n) - x_n\|_X.
\end{aligned}
$$

Quindi, ponendo $a_n = T(x_n) - x_n$ e $b_n = 2s_n(1-t_n)\|T(x_n) - x_n\|_X$, abbiamo che le successioni $(\|a_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di numeri reali non negativi. Riscriviamo allora il risultato appena ottenuto

$$\|a_{n+1}\|_X \leq \|a_n\|_X + b_n.$$

Essendo $0 < 1 - t_n \leq 1$ abbiamo che $0 \leq s_n(1-t_n) \leq s_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto, dalla (i) segue che $\sum_{i=1}^{\infty} s_i(1-t_i) < \infty$. Ma $(\|a_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora, per come è stata definita, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$. Possiamo applicare il lemma 2.5 ottenendo quindi che esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_X = d$.

Poniamo ora
$$c_n = \frac{1}{t_n}(T(x_{n+1}) - T(x_n)) + T(x_n) - T(y_n);$$
vorremmo applicare, alle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il lemma 2.6.
Abbiamo appena verificato che vale la (iii).
Verifichiamo che vale anche la condizione (ii), cioè $a_{n+1} = (1-t_n)a_n + t_n c_n$ per ogni n. Infatti
$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= T(x_{n+1}) - x_{n+1} = T(x_{n+1}) - t_nT(y_n) - (1-t_n)x_n \\
&= T(x_{n+1}) + T(x_n) - T(x_n) + t_nT(x_n) - t_nT(x_n) - t_nT(y_n) - (1-t_n)x_n \\
&= (1-t_n)(T(x_n) - x_n) + \big[(T(x_{n+1}) - T(x_n)) + t_n(T(x_n) - T(y_n))\big] \\
&= (1-t_n)a_n + t_nc_n.
\end{aligned}$$
Vediamo se anche la condizione (iv) è verificata, cioè $\limsup_{n\to\infty} \|c_n\|_X \leq d$ e la successione $(\sum_{i=1}^n t_ic_i)$ è limitata. Abbiamo che
$$\begin{aligned}
\|c_n\|_X &\leq \frac{1}{t_n}\|T(x_{n+1}) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - T(y_n)\|_X \\
&\leq \frac{1}{t_n}\|x_{n+1} - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&= \frac{1}{t_n}\|t_nT(y_n) + (1-t_n)x_n - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&= \|T(y_n) - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&= \|T(y_n) - T(x_n) + T(x_n) - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&\leq \|T(y_n) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&\leq \|y_n - x_n\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X + \|x_n - y_n\|_X \\
&= \|T(x_n) - x_n\|_X + 2\|x_n - y_n\|_X \\
&= \|T(x_n) - x_n\|_X + 2\|x_n - s_nT(x_n) - (1-s_n)x_n\|_X \\
&= \|T(x_n) - x_n\|_X + 2s_n\|T(x_n) - x_n\|_X = (1+2s_n)\|a_n\|_X.
\end{aligned}$$
Ma $\sum_{i=1}^\infty s_i = L < \infty$, quindi la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima, infatti per definizione di limite della serie abbiamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|\sum_{i=1}^n s_i - L\|_X < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. Di conseguenza
$$\|s_n\|_X = \left\|\sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=1}^n s_i - L\right\|_X + \left\|L - \sum_{i=1}^{n-1} s_i\right\|_X < 2\varepsilon \quad \forall n > \nu+1.$$

In altre parole $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Quindi

$$\limsup_{n\to\infty} \|c_n\|_X \le \limsup_{n\to\infty} (1+2s_n)\|a_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_X = d.$$

Infine abbiamo per ogni n

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n t_i c_i\right\|_X &= \left\|\sum_{i=1}^n (T(x_{i+1}) - T(x_i) + t_i(T(x_i) - T(y_i)))\right\|_X \\
&= \left\|T(x_{n+1}) - T(x_1) + \sum_{i=1}^n t_i(T(x_i) - T(y_i))\right\|_X \\
&\le \|T(x_{n+1}) - T(x_1)\|_X + \sum_{i=1}^n t_i \|(T(x_i) - T(y_i))\|_X \\
&\le \|x_{n+1} - x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i \|x_i - y_i\|_X \\
&= \|x_{n+1} - x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i \|x_i - s_i T(x_i) - (1-s_i)x_i\|_X \\
&= \|x_{n+1} - x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i s_i \|T(x_i) - x_i\|_X.
\end{aligned}$$

Dunque, essendo per ipotesi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, la successione $(\sum_{i=1}^n t_i c_i)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata: infatti se $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|x_n\|_X$, si ha per ogni n

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n t_i c_i\right\|_X &= \|x_{n+1} - x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i s_i \|T(x_i) - x_i\|_X \\
&\le M + \|x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i s_i \left(\|T(x_i) - T(x_1)\|_X + \|T(x_1)\|_X + M\right) \\
&\le M + \|x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i s_i \left(\|x_i - x_1\|_X + \|T(x_1)\|_X + M\right) \\
&\le M + \|x_1\|_X + \sum_{i=1}^n t_i s_i \left(M + \|x_1\|_X + \|T(x_1)\|_X + M\right).
\end{aligned}$$

Anche la condizione (iv) del lemma 2.6 è verificata e, in definitiva, si ha che $d = 0$, cioè, come volevamo dimostrare,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - x_n\|_X = 0.$$

□

2.3 Teorema di convergenza

Teorema 2.9. *[10]*
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach X e sia $T : C \to X$ una mappa non espansiva. Supponiamo che l'immagine $T(C)$ sia contenuta in un sottoinsieme compatto non vuoto di X.
Siano $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali che soddisfano le seguenti condizioni:

$$0 \leq t_n \leq t < 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \tag{i}$$

$$0 \leq s_n \leq 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty, \tag{ii}$$

Allora, per ogni $\bar{x} \in C$, posto $x_1 = \bar{x}$, l'iterazione di Ishikawa definita come:

$$x_{n+1} = t_n T(s_n T(x_n) + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n, \quad n \geq 1,$$

converge ad un punto fisso di T.

Osservazione 2.10. Non è necessario aggiungere l'ipotesi $Fix(T) \neq \emptyset$, infatti il teorema di Schauder [1] ci assicura che:

Teorema 2.11. *Un'applicazione continua, che manda un insieme convesso e chiuso di uno spazio di Banach in un suo sottoinsieme compatto non vuoto, ha un punto fisso.*

$\square$

Dimostrazione. Sia C_0 la chiusura dell'inviluppo convesso dell'unione di $T(C)$ con il punto x_1, cioè $C_0 = \overline{co\big(T(C) \cup \{x_1\}\big)}$. Allora, essendo per ipotesi $T(C)$ compatto, $T(C) \cup \{x_1\}$ sarà a sua volta compatto. Ricordiamo il seguente:

Teorema 2.12 (Teorema di Mazur)**.** *[1]*
Sia C un sottoinsieme relativamente compatto di uno spazio di Banach X. Allora $\overline{co(C)}$ è compatto.

$\square$

Dunque avremo che C_0 è anch'esso un insieme compatto. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in C_0, quindi, per compattezza, esiste una sottosuccessione $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $u \in C_0$, cioè

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = u.$$

L'insieme C_0, essendo compatto, è limitato, quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata; perció siamo nelle ipotesi del lemma 2.8. Di conseguenza

$$\lim_{i\to\infty} \|T(x_{n_i}) - x_{n_i}\|_X = 0.$$

Ora, essendo T una mappa non espansiva, dalla disuguaglianza triangolare segue che:

$$\begin{aligned}
\|T(u) - u\|_X &= \|T(u) - T(x_{n_i}) + T(x_{n_i}) - x_{n_i} + x_{n_i} - u\|_X \\
&\leq \|T(u) - T(x_{n_i})\|_X + \|T(x_{n_i}) - x_{n_i}\|_X + \|x_{n_i} - u\|_X \\
&\leq 2\|u - x_{n_i}\|_X + \|T(x_{n_i}) - x_{n_i}\|_X
\end{aligned}$$

Allora, poiché $\lim_{i\to\infty} \|T(x_{n_i}) - x_{n_i}\|_X = 0$ e $\lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - u\|_X = 0$, abbiamo trovato che u è un punto fisso per T.
Per ogni intero positivo n possiamo applicare il lemma 2.7 ottenendo che:

$$\|x_{n+1} - u\|_X \leq \|x_n - u\|_X.$$

Per ipotesi $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = u$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\|x_{n_i} - u\|_X < \varepsilon \qquad \forall n_i \geq n_0$$

In particolare allora $\|x_{n_0} - u\|_X < \varepsilon$, da cui, per monotonia

$$\|x_n - u\|_X < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Questo equivale a dire che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u;$$

in altre parole abbiamo trovato che il processo iterativo di Ishikawa converge a u, punto fisso per T.

$\square$

Capitolo 3

Iterazione di Halpern

Il secondo metodo che andremo a studiare è stato introdotto nel 1967 da Halpern [8]. Anch'egli per approssimare punti fissi di mappe non espansive, definite su un sottoinsieme di uno spazio normato, utilizza una successione generata mediante una formula ricorsiva.

Definizione 3.1.
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio metrico X e sia $T : C \to X$ una mappa non espansiva.
Data una successione di numeri reali $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ e un elemento $\bar{x} \in C$ definiamo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X nel seguente modo

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} \\ x_{n+1} = t_{n+1}x_1 + (1 - t_{n+1})T(x_n), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Vogliamo vedere sotto quali condizioni l'iterazione appena definita converge ad un punto fisso di T. Elenchiamo una serie di condizioni che, nel tempo, sono state studiate per scoprire quali fossero necessarie e quali sufficienti ad assicurare la convergenza della (3.1):

$$(C1)\ \lim_{n\to\infty} t_n = 0, \qquad (C2) \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \qquad (C3) \sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty,$$

$$(C4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}^2} = 0,\ (C5)\ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}} = 0, \quad \text{cioè} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = 1.$$

Osservazione 3.2. La (C2) è equivalente a $\prod_{i=1}^{\infty}(1 - t_n) = 0$.
Infatti, poiché $\log(1+y) \leq y$ per ogni $y \in (-1, \infty)$, essendo $t_n \in [0,1]$, posto

$y_n = -t_n$, si ha $y_n \in (-1, 0)$; quindi

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1-t_i) &= \exp\log\left(\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)\right) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\log(1+y_i)\right\} \\ &\leq \exp\sum_{i=1}^{n}(-t_i) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}t_i\right).\end{aligned}$$

Allora dalla (C2) si ricava, prendendo il limite per $n \to \infty$, che

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-t_i) \leq \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}t_i\right) = 0.$$

3.1 Condizioni necessarie per la convergenza

Per prima cosa vediamo un teorema di Halpern[8], in cui si dimostra che le condizioni (C1) e (C2) sono necessarie, nel senso che per ogni sottoinsieme chiuso e convesso C di uno spazio normato X e per ogni mappa non espansiva $T : C \to X$ tale che $Fix(T) \neq \emptyset$, se l'iterazione di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto fisso di T allora la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve soddisfare le condizioni (C1) e (C2).

Teorema 3.3. *Sia $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione di numeri reali in [0,1], dotata delle seguenti proprietà: se C è un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio normato X e $T : C \to X$ è una mappa non espansiva, dato $\bar{x} \in C$, se la successione di Halpern definita da*

$$x_1 = \bar{x}, \qquad x_{n+1} = t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

converge ad un punto fisso per T, allora:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0, \tag{i}$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t_i) = 0. \tag{ii}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, grazie all'osservazione 3.2, la (ii) è equivalente alla condizione (C2).
Per stabilire se una condizione è necessaria basta considerare un caso particolare.
Possiamo scegliere $X = \mathbb{R}$, $C = \{y \in X \,|\, \|y\|_X \leq 1\}$, $x_1 = -1$ ed $T(x) = 1$

per ogni $x \in C$.
Abbiamo dunque che la successione di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è equivalente a

$$x_n = 1 - 2t_n \qquad \forall n > 1.$$

Poiché l'insieme dei punti fissi di T è $Fix(T) = \{1\}$, dire che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge ad un punto fisso di T, equivale a dire che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 - 2\lim_{n\to\infty} t_n = 1,$$

cioè $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.
Abbiamo quindi verificato che la (i) è una condizione necessaria.
Prendiamo ora $X = \mathbb{R}$, $C = \{y \in X \mid \|y\|_X \leq 1\}$, $x_1 = -1$ e $T(x) = -x$ per ogni $x \in C$.
Abbiamo stavolta che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è equivalente a

$$\begin{aligned} x_n &= -t_n - (1-t_n)x_{n-1} - (1-t_{n-1})x_{n-2}) \\ &= -t_n - t_nt_{n-1} + t_{n-1} + (1-t_n)(1-t_{n-1})x_{n-2} \\ &= \dots \\ &= g(t_n, \dots, t_1) + (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(1-t_i) \end{aligned}$$

dove $g(t_n, \dots, t_1)$ è una funzione polinomiale in n variabili, nulla nell'origine.
Quindi, se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge ad un punto fisso di T, essendo $Fix(T) = \{0\}$, si deve avere che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(t_n, \dots, t_1) + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(1-t_i) = 0.$$

Dalla (i) segue che $\lim_{n\to\infty} g(t_n, \dots, t_1) = 0$, dunque deve valere

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t_i) = 0.$$

Anche la (ii) è, quindi, una condizione necessaria.

$\square$

Rimane tutt'oggi aperta la questione se le condizioni (C1) e (C2) sono, oltre che necessarie, anche sufficienti a garantire la convergenza delle iterazioni di Halpern.
Fino ad ora è stato dimostrato che si ha la convergenza sotto un'ulteriore condizione, condizione che cambia, come vedremo nei prossimi paragrafi, in base alla scelta dello spazio X.

3.2 Condizioni sufficienti per la convergenza dell'iterazione di Halpern

3.2.1 Introduzione

Vediamo ora cosa sappiamo dire riguardo la convergenza del processo iterativo di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, in particolare quali sono le condizioni di controllo sufficienti per la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq (0,1)$ e quali ipotesi dobbiamo fare sulla struttura dello spazio normato X, affinchè la (x_n) converga ad un elemento di $Fix(T)$.
Lions [14] verifica che se X è uno spazio di Hilbert e la $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa, oltre alle condizioni necessarie (C1) e (C2), anche la condizione

$$\text{(C4)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}^2} = 0,$$

la successione (3.1) converge ad un punto fisso per T.
Questa condizione limita la scelta della successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$: non permette infatti di fare una delle scelte più naturali, considerare, cioè, la successione $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^+}$.
Questo risultato è stato migliorato: vedremo infatti che, dato sottoinsieme C chiuso e convesso di uno spazio di Banach X, se $T : C \to X$ è una mappa non espansiva e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è una successione che soddisfa (C1) e (C2), allora la successione di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge a un punto fisso per T se:

(1) X è uno spazio di Hilbert e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ soddisfa anche la condizione

$$\text{(C3)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty,$$

(2) X è uno spazio di Banach uniformemente liscio, $T(C) \subseteq C$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ soddisfa anche la condizione

$$\text{(C5)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}} = 0.$$

Osserviamo, con l'aiuto di alcuni esempi, che le condizioni di controllo in generale non sono comparabili: esistono infatti successioni che soddisfano l'una ma non l'altra e viceversa.
L'unica dipendenza ovvia è:

$$(C4) \Longrightarrow (C5),$$

mentre il viceversa non è vero.

Esempio 3.4. Mostriamo una successione che verifica (C1), (C2), (C3) e (C5), ma non (C4).
Consideriamo la successione

$$t_n = \frac{1}{n}, \qquad n \in N.$$

Verifichiamo:

$$\textbf{(C1)} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\textbf{(C2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

$$\textbf{(C3)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty,$$

$$\textbf{(C5)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Non vale invece

$$\textbf{(C4)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}^2} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 0.$$

Esempio 3.5. Mostriamo una successione che verifica (C1), (C2) e (C3), ma non (C5) e quindi neanche (C4).

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 2^m, \quad m \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{2^m} & \text{se } n = 2^m, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vale ovviamente **(C1)**.
Verifichiamo che vale **(C2)**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \geq \sum_{\substack{n \neq 2^m \\ m \in \mathbb{N}}} t_n = \sum_{\substack{n \neq 2^m \\ m \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = +\infty - 2 = +\infty,$$

quindi la serie diverge.
Verifichiamo che vale **(C3)**:

- se $n \neq 2^m$, $2^m - 1$, per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$$

- se $n = 2^m$, quindi $(n+1) \neq 2^h$, per ogni $h \in \mathbb{N}^+$ e $(n+1) = 2^m + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| = \sum_{m=0}^{\infty} |\frac{2}{2^m} - \frac{1}{2^m + 1}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{4^m} < +\infty.$$

- se $n = 2^m - 1$, quindi $(n+1) = 2^m$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| = \sum_{m=0}^{\infty} |\frac{2}{2^m} - \frac{1}{2^m - 1}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2^m-1)^2} < +\infty.$$

Verifichiamo che non vale **(C5)**:

considieriamo $n = 2^m$, quindi $(n+1) \neq 2^h$, per ogni $h \in \mathbb{N}^+$ e dunque avremo $(n+1) = 2^m + 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{2^m} \cdot (2^m + 1) = \lim_{m\to\infty} \frac{2^m + 1}{2^{m-1}} = 2 \neq 1.$$

Questo caso è sufficiente, perché il limite, anche se esiste, è diverso da 1.

Esempio 3.6. Resta da far vedere una successione che verifica (C1), (C2), (C4) e (C5), ma non (C3).
Per semplificare la scrittura poniamo $a = \frac{1}{3}$ e definiamo la successione:

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{n^a - n^{-a}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{(n-1)^a} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Valgono ovviamente **(C1)** e **(C2)**.
Verifichiamo che vale **(C4)** e di conseguenza **(C5)**:

- se $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ allora $t_n = \frac{1}{n^a - n^{-a}}$ mentre $t_{n+1} = \frac{1}{n^a}$, dunque

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}^2} &= \lim_{n\to\infty} n^{2a} \left(\frac{1}{n^a - n^{-a}} - \frac{1}{n^a} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{2a} \left(\frac{n^{-a}}{n^a(n^a - n^{-a})} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a - n^{-a}} = 0. \end{aligned}$$

- se $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$ allora $t_n = \frac{1}{(n-1)^a}$ mentre $t_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^a - (n+1)^{-a}}$, dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n+1}}{t_{n+1}^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^a - (n+1)^{-a}\right]^2 \left[\frac{1}{(n-1)^a} - \frac{1}{(n+1)^a - (n+1)^{-a}} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^a - (n+1)^{-a}\right] \left[\frac{(n+1)^a - (n-1)^a - (n+1)^{-a}}{(n-1)^a} \right]$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a}{(n-1)^a} [(n+1)^a - (n-1)^a] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2Ma}{(n-1)^{1-a}} = 0.$$

Verifichiamo inoltre che la **(C3)** non è verificata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} |t_{2k+1} - t_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{(2k)^a} - \frac{1}{(2k)^a - (2k)^{-a}}|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^{-a}}{(2k)^a \left[(2k)^a - (2k)^{-a}\right]}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{3a} \left[1 - (2k)^{-2a}\right]} = +\infty,$$

poiché $a = \frac{1}{3} \leq 1$.

3.2.2 Convergenza in spazi di Hilbert con condizioni di controllo (C1), (C2) e (C3)

Uno dei più importanti risultati sulla convergenza delle iterazioni di Halpern in spazi di Hilbert è stato raggiunto da Wittmann [18]. Egli dimostra che se la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ soddisfa le condizioni (C1), (C2) e (C3), l'iterazione converge ad un punto fisso della mappa data. Osserviamo che la successione $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ verifica queste condizioni.

Risultati preliminari

Proposizione 3.7. *[13]*
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert H e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva.
L'insieme dei punti fissi per T, $F = Fix(T)$, è un sottoinsieme chiuso e convesso di C.

Dimostrazione. Se $F = \emptyset$ oppure ha un solo elemento la tesi è banalmente vera.
Siano $x, y \in F$. Sia $z \in C$ una loro combinazione convessa, cioè esiste $\lambda \in (0,1)$ tale che $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Supponiamo per assurdo che $z \notin F$, cioè $T(z) \neq z$. Questo implica che $T(z)$ non appartiene al segmento che unisce x e y, altrimenti dovremmo avere che

$$\|T(z) - T(x)\|_H > \|x - z\|_H \qquad \text{oppure} \qquad \|T(z) - T(y)\|_H > \|y - z\|_H.$$

Ma questo contraddice l'ipotesi che T sia non espansiva. Quindi,

$$\begin{aligned}\|x-z\|_H+\|z-y\|_H &= \|x-y\|_H < \|x-T(z)\|_H+\|T(z)-y\|_H\\ &= \|T(x)-T(z)\|_H+\|T(z)-T(y)\|_H\\ &\leq \|x-z\|_H+\|z-y\|_H.\end{aligned}$$

Si ha la disuguaglianza stretta perché appunto $T(z)$ non giace sul segmento che unisce x e y, ma ciò costituisce una contraddizione, quindi abbiamo verificato che $z \in F$.

□

Proposizione 3.8 (Minima Norma)**.** *[2]*
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert H.
Allora per ogni $x \in H$ esiste uno ed un solo $x_0 \in C$ tale che

$$\|x-x_0\|_H \leq \|x-y\|_H \qquad \forall y \in C.$$

Tale elemento si chiama ***proiezione di** x **sul convesso*** *C e lo indicheremo con $P(x)$.*

□

La proprietà di minimalità della proiezione di un elemento di uno spazio di Hilbert su un suo sottoinsieme convesso si traduce nella seguente caratterizzazione:

Proposizione 3.9. *[2]*
Sia C un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di uno spazio di Hilbert H, siano x e $x_0 \in C$.
Risulta $x_0 = P(x)$ se e solo se x_0 verifica la seguente disequazione variazionale:

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ \langle x-x_0, y-x_0\rangle_H \leq 0 \quad \forall y \in C. \end{cases}$$

□

Proposizione 3.10. *[13]*
Sia C un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di uno spazio di Hilbert H e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva.
Se una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ converge debolmente a p, cioè $x_n \rightharpoonup p$, e $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$, allora $T(p)=p$.

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\langle T(z)-T(x_n), z-x_n\rangle_H &\leq |\langle T(z)-T(x_n), z-x_n\rangle_H| \\ &\leq \|z-x_n\|_H\|T(z)-T(x_n)\|_H \leq \|z-x_n\|_H^2\end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$\|z-x_n\|_H^2 \geq \langle T(z)-T(x_n), z-x_n\rangle_H,$$

che implica

$$\langle [z-T(z)]-[x_n-T(x_n)]\,, z-x_n\rangle_H \geq 0.$$

Per $n \to \infty$, dalle ipotesi fatte, abbiamo che

$$\langle z-T(z), z-p\rangle_H \geq 0 \qquad \forall z \in C. \tag{3.2}$$

Ma C è un insieme chiuso e convesso, quindi se consideriamo $z_\lambda = (1-\lambda)p+\lambda T(p)$, con $\lambda \in (0,1)$, questo sarà un elemento di C. Quindi la (3.2) vale anche per z_λ, cioè

$$0 \leq \langle z_\lambda - T(z_\lambda), z_\lambda - p\rangle_H = \langle z_\lambda - T(z_\lambda), -\lambda(p-T(p))\rangle_H = -\lambda\langle z_\lambda - T(z_\lambda), p-T(p)\rangle_H.$$

Quindi

$$\langle z_\lambda - T(z_\lambda), p-T(p)\rangle_H \leq 0.$$

Ora, prendendo $\lambda \to 0$ si ricava la tesi, infatti $z_\lambda \to p$ e la precedente, essendo T continua, diventa

$$\langle p-T(p), p-T(p)\rangle_H \leq 0,$$

quindi $p = T(p)$.

□

Teorema di convergenza

Ora abbiamo tutti gli strumenti per vedere il risultato sulla convergenza di Halpern ottenuto da Wittmann:

Teorema 3.11.
Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert H e sia $T: C \to H$ una mappa non espansiva tale che

$$F = Fix(T) = \{x \in C \,|\, T(x) = x\} \neq \emptyset.$$

Sia inoltre $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *una successione in* $[0,1]$ *tale che*

$$(C1): \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0, \tag{i}$$

$$(C2): \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \tag{ii}$$

$$(C3): \quad \sum_{n=1}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty. \tag{iii}$$

Allora per ogni $\bar{x} \in C$ *la successione* (3.1) *di Halpern* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$*, definita da*

$$x_1 = \bar{x}, \qquad x_{n+1} = t_{n+1}x_1 + (1 - t_{n+1})T(x_n),$$

converge alla proiezione $P(\bar{x})$ *di* $\bar{x}$ *su* $Fix(T)$*.*

Osservazione 3.12. C non è necessariamente limitato, quindi il teorema 1.10 non è applicabile e l'ipotesi $Fix(T) \neq \emptyset$ è necessaria.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione per passi.
Assumiamo inizialmente che $0 \in F$.

(1). Dall'osservazione 3.2 e da (ii) segue che

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=m}^{n} (1 - t_i) = 0 \qquad \forall m \geq 1. \tag{1}$$

(2). Dimostriamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è limitata.
Per cominciare osserviamo che:

$$\|T(x)\|_X \leq \|x\|_X, \quad \forall x \in C.$$

Infatti poiché $0 \in Fix(T)$

$$\|T(x)\|_X = \|T(x) - 0\|_X = \|T(x) - T(0)\|_X \leq \|x\|_X.$$

Verifichiamo per induzione che la successione di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ è limitata.
In particolare vale la seguente

$$\|x_n\|_X \leq \|x_1\|_X \qquad \forall n \geq 1. \tag{2}$$

Il caso $n = 1$ è banale.
Supponiamo che $\|x_n\|_X \leq \|x_1\|_X$ con $n \geq 1$ e dimostriamolo per $n + 1$. Per

la disuguaglianza triangolare abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}\|_X &= \|t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n)\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|T(x_n)\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|x_n\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|x_1\|_X = \|x_1\|_X
\end{aligned}$$

(3). Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_H = 0. \tag{3}$$

Sfruttando la (2) e il fatto che T è non espansiva, risulta che per ogni $n > 1$

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_n\|_H = \\
&\quad = \|t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n) - t_n x_1 - (1-t_n)T(x_{n-1})\|_H \\
&\quad \leq |t_{n+1} - t_n|\, \|x_1\|_H + (1-t_{n+1})\|T(x_n) - T(x_{n-1})\|_H \\
&\qquad\quad + |t_{n+1} - t_n| \|T(x_{n-1})\|_H \\
&\quad \leq |t_{n+1} - t_n|\, \|x_1\|_H + (1-t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_H \qquad (4) \\
&\qquad\quad + |t_{n+1} - t_n|\, \|x_{n-1}\|_H \\
&\quad \leq |t_{n+1} - t_n|\, \|x_1\|_H + (1-t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_H \\
&\qquad\quad + |t_{n+1} - t_n|\, \|x_1\|_H \\
&\quad = 2|t_{n+1} - t_n|\, \|x_1\|_H + (1-t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_H.
\end{aligned}$$

Per ogni $m > n$, riapplicando $(m+1-n)$ volte la (4), ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1} - x_m\|_H &\leq 2|t_{m+1} - t_m|\, \|x_1\|_H + (1-t_{m+1})\|x_m - x_{m-1}\|_H \\
&\leq \dots \\
&\leq 2\sum_{i=n}^{m} |t_{i+1} - t_i|\, \|x_1\|_H + \|x_n - x_{n-1}\|_H \prod_{i=n}^{m}(1-t_{i+1}) \\
&\leq 2\sum_{i=n}^{m} |t_{i+1} - t_i|\, \|x_1\|_H + 2\,\|x_1\|_H \prod_{i=n}^{m}(1-t_{i+1}).
\end{aligned}$$

Quindi dalla (1), otteniamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} \|x_{m+1} - x_m\|_H \leq 2\sum_{i=n}^{\infty} |t_{i+1} - t_i|\, \|x_1\|_H. \tag{5}$$

Prendendo $n \to \infty$, si ricava, dalla (iii) e dalla (5), che

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_H = 0.$$

(4). Verifichiamo che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\|_H = 0$.
Per ogni $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\|_H &= \big\|x_{n+1} - (1 - t_{n+1})T(x_n) + (1 - t_{n+1})T(x_n) \\
&\qquad - t_{n+1}T(x_{n+1}) + t_{n+1}T(x_{n+1}) - T(x_{n+1})\big\|_H \\
&\leq \|x_{n+1} - (1 - t_{n+1})T(x_n)\|_H + (1 - t_{n+1})\|T(x_{n+1}) - T(x_n)\|_H \\
&\qquad + t_{n+1}\|T(x_{n+1})\|_H \\
&\leq \|t_{n+1}x_1 + (1 - t_{n+1})T(x_n) - (1 - t_{n+1})T(x_n)\|_H \\
&\qquad + (1 - t_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\|_H + t_{n+1}\|x_{n+1}\|_H \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_H + (1 - t_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\|_H + t_{n+1}\|x_1\|_H \\
&= 2t_{n+1}\|x_1\|_H + (1 - t_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\|_H.
\end{aligned}$$

Combinando questo risultato con la (3) e con la (i) otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T(x_{n+1})\|_H = 0. \tag{6}$$

Per la proposizione 3.7 sappiamo che F è un sottoinsieme di C chiuso e convesso, abbiamo supposto che $0 \in F$, quindi abbiamo anche che $F \neq \emptyset$. Dunque la proposizione 3.8 ci assicura che, per ogni $\bar{x} \in C$, la proiezione $P(\bar{x})$ di $\bar{x}$ su un insieme chiuso e convesso F è tale che

$$\|\bar{x} - P(\bar{x})\|_H \leq \|\bar{x} - y\|_H \qquad \forall y \in F. \tag{7}$$

Come abbiamo visto nella proposizione 3.9, la proiezione $P(\bar{x})$ soddisfa la seguente

$$\langle y - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H \leq 0 \quad \forall y \in F. \tag{8}$$

(5). Dimostriamo che:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle T(x_n) - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H \leq 0. \tag{9}$$

Supponiamo per assurdo che la (9) sia falsa, ma allora esiste $D \in \mathbb{R}^+$ e una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che

$$\lim_{k\to\infty} \langle T(x_{n_k}) - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H = D > 0.$$

Ma noi sappiamo che, se X è uno spazio di Banach riflessivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in X, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente in X ad un elemento $z \in X$. Quindi, poiché gli spazi di Hilbert sono ovviamente degli spazi di Banach riflessivi, a patto di passare ad una nuova sottosuccessione, avremo che

$$x_{n_k} \rightharpoonup z, \qquad \text{con } z \in H.$$

Dalla (6), applicando la proposizione 3.10, otteniamo che $T(z) = z$, cioè $z \in F$.
Inoltre, per la continuità di T, si ha che

$$T(x_{n_k}) \rightharpoonup T(z) = z.$$

Dato che la (8) vale per ogni $y \in F$, in particolare avremo che

$$0 < D = \limsup_{n\to\infty} \langle T(x_{n_k}) - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H = \langle z - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H \leq 0.$$

Siamo arrivati ad una contraddizione, quindi abbiamo verificato la (9).

(6). Dimostriamo la tesi, avendo supposto $0 \in Fix(T)$.

La (9) ci dice che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\langle T(x_{n_k}) - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_1,$$

inoltre, per la (i), esiste $n_2 \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$t_n \|\bar{x} - P(\bar{x})\|_H^2 \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_1.$$

Poniamo allora $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$; per ogni $n \geq n_\varepsilon$, avremo che

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - P(\bar{x})\|_H^2 &= \|t_{n+1}\bar{x} + (1 - t_{n+1})T(x_n) - P(\bar{x})\|_H^2 \\
&= \|t_{n+1}(\bar{x} - P(\bar{x})) + (1 - t_{n+1})(T(x_n) - P(\bar{x}))\|_H^2 \\
&= t_{n+1}^2 \|\bar{x} - P(\bar{x})\|_H^2 + (1 - t_{n+1})^2 \|T(x_n) - P(\bar{x})\|_H^2 \\
&\qquad +2t_{n+1}(1 - t_{n+1})\langle T(x_n) - P(\bar{x}), \bar{x} - P(\bar{x})\rangle_H \\
&\leq t_{n+1}^2 \|\bar{x} - P(\bar{x})\|_H^2 + 2t_{n+1}(1 - t_{n+1})\,\varepsilon \\
&\qquad +(1 - t_{n+1})^2 \|T(x_n) - P(\bar{x})\|_H^2 \\
&\leq t_{n+1}\,\varepsilon + 2t_{n+1}\,\varepsilon + (1 - t_{n+1})^2 \|T(x_n) - T(P(\bar{x}))\|_H^2 \\
&\leq 3t_{n+1}\,\varepsilon + (1 - t_{n+1})^2 \|x_n - P(\bar{x})\|_H^2,
\end{aligned}$$

e quindi per ogni $m > n_\varepsilon$, riapplicandola $(m - n_\varepsilon + 1)$ volte, si avrà

$$\|x_m - P(\bar{x})\|_H^2 \leq 3 \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{m} t_k \prod_{j=k+1}^{m} (1-t_j)^2 + \prod_{j=n_\varepsilon+1}^{m} (1-t_j)^2 \|x_{n_\varepsilon} - P(\bar{x})\|_H^2.$$

Proviamo che

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{m} t_k \prod_{j=k+1}^{m} (1-t_j)^2 \leq 1 \qquad \forall m > n_\varepsilon, \tag{10}$$

da ciò segue

$$\|x_m - P(\bar{x})\|_H^2 \leq 3\varepsilon + \prod_{j=n_\varepsilon+1}^{m} (1-t_j)^2 \|x_{n_\varepsilon} - P(\bar{x})\|_H^2$$

e dunque, per la (1)

$$\limsup_{m\to\infty} \|x_m - P(\bar{x})\|_H^2 \leq 3\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

e ciò prova il teorema nel caso in cui $0 \in F$.
Dimostriamo la (10) per induzione su m: se $m = n_\varepsilon + 1$ si ha banalmente

$$t_{n_\varepsilon+1} \leq 1.$$

Se la tesi vale per m, proviamola per $m+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{m+1} t_k \prod_{j=k+1}^{m+1} (1-t_j)^2 &= \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{m} t_k \prod_{j=k+1}^{m} (1-t_j)^2 (1-t_{m+1})^2 + t_{m+1} \\
&\leq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{m} t_k \prod_{j=k+1}^{m} (1-t_j)^2 (1-t_{m+1}) + t_{m+1} \\
&\leq 1 - t_{m+1} + t_{m+1} = 1,
\end{aligned}$$

e la (10) è provata.

(7). Dimostriamo la tesi in generale.
Poiché per ipotesi $F \neq \emptyset$, possiamo scegliere un arbitrario $z \in F$ e definire

$$\tilde{C} = \{x - z \,\big|\, x \in C\} \quad \text{ e } \quad \tilde{f}(x) = T(x+z) - z \quad \forall x \in \tilde{C}.$$

Ovviamente $\tilde{C}$ è ancora un sottoinsieme chiuso e convesso di H e $\tilde{f} : \tilde{C} \to \tilde{C}$ è una mappa non espansiva:

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|_H = \|T(x+z) - T(y+z)\|_H \leq \|x - y\|_H.$$

Avremo inoltre che $\tilde{f}(0) = T(z) - z = 0$, quindi $0 \in Fix(\tilde{f})$.
Allora se denotiamo con $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione di Halpern rispetto alla mappa $\tilde{f}$, possiamo facilmente mostrare per induzione, posto $\tilde{x}_1 = \bar{x}$, che

$$\tilde{x}_n = x_n - z, \qquad \forall n \geq 1,$$

con $x_1 = \bar{x} + z$.
Il caso $n = 1$ è banale, infatti $\bar{x} = \tilde{x}_1 = x_1 - z = \bar{x} + z - z = \bar{x}$.
Supponiamo che $\tilde{x}_n = x_n - z$ per $n > 1$ e dimostriamolo per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{n+1} &= t_{n+1}\tilde{x}_1 + (1 - t_{n+1})\tilde{f}(\tilde{x}_n) \\
&= t_{n+1}\bar{x} + (1 - t_{n+1})\tilde{f}(x_n - z) \\
&= t_{n+1}\bar{x} + (1 - t_{n+1})\Big(T(x_n - z + z) - z\Big) \\
&= t_{n+1}(\bar{x} + z) + (1 - t_{n+1})T(x_n) - z \\
&= t_{n+1}x_1 + (1 - t_{n+1})T(x_n) - z \\
&= x_{n+1} - z.
\end{aligned}$$

Applicando alla $\tilde{f}$ il caso speciale dell'asserzione appena dimostrata si ottiene il caso generale.

□

3.2.3 Convergenza in spazi di Banach uniformemente lisci con condizioni di controllo (C1), (C2) e (C5)

Un altro importante risultato relativo al processo iterativo di Halpern è ottenuto da Xu [19], [20] nel 2002. Prima però vediamo alcuni strumenti che ci serviranno per la dimostrazione del teorema di convergenza.

Mappa di dualità

Definizione 3.13. *Sia X uno spazio normato reale e sia X^* il suo duale. Chiameremo* ***mappa di dualità*** *di X in X^* l'applicazione $F : X \to P(X^*)$ definita da*

$$F(x) = \left\{\psi \in X^* \,\middle|\, f(x) = \langle \psi, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|\psi\|_{X^*}^2\right\} \qquad \forall x \in X.$$

Definizione 3.14. *Sia X uno spazio normato reale, sia X^* il suo duale e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa. Chiameremo* ***sottodifferenziale*** *di f la funzione $\partial f : X \to P(X^*)$ definita da*

$$\partial f(x_0) = \left\{\psi \in X^* \,\middle|\, f(x) - f(x_0) \geq \langle \psi, x - x_0\rangle \; \forall x \in X\right\} \qquad \forall x_0 \in X.$$

Come prima cosa osserviamo che la mappa di dualità è equivalente al sottodifferenziale della funzione convessa $\frac{\|\cdot\|_X^2}{2} : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 3.15. *Sia X uno spazio normato reale e sia X^* il suo duale. Allora*

$$F(x) = \partial \frac{\|x\|_X^2}{2} \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. $\subseteq$: Sia $x_0 \in X$ e supponiamo che $\psi \in F(x_0)$, cioè $\langle \psi, x_0\rangle = \|x_0\|_X^2 = \|\psi\|_{X^*}^2$. Dimostriamo che questo implica $\psi \in \partial\frac{\|x_0\|_X^2}{2}$. Infatti, sfruttando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e ricordando che $2\|x\|_X\|y\|_X \leq \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2$, risulta che per ogni $x \in X$

$$\begin{aligned}\langle \psi, x\rangle &\leq \|\psi\|_{X^*}\|x\|_X = \|x_0\|_X\|x\|_X \leq \frac{\|x_0\|_X^2 + \|x\|_X^2}{2} \\ &= \|x_0\|_X^2 - \frac{\|x_0\|_X^2}{2} + \frac{\|x\|_X^2}{2} = \langle \psi, x_0\rangle + \frac{1}{2}(\|x\|_X^2 - \|x_0\|_X^2).\end{aligned}$$

In altre parole

$$\langle \psi, x\rangle - \langle \psi, x_0\rangle \leq \frac{1}{2}(\|x\|_X^2 - \|x_0\|_X^2),$$

il che mostra che $\psi \in \partial\frac{\|x_0\|_X^2}{2}$.

$\supseteq$: Sia $x_0 \in X$ e supponiamo $\psi \in \partial\frac{\|x_0\|_X^2}{2}$, cioè

$$\langle \psi, x - x_0\rangle \leq \frac{1}{2}(\|x\|_X^2 - \|x_0\|_X^2), \qquad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Prendiamo $x = x_0 + \lambda v$, dove $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $v \in X$. La disuguaglianza (3.3) diventa

$$\begin{aligned} \lambda\langle\psi, v\rangle &\leq \frac{1}{2}(\|x_0 + \lambda v\|_X^2 - \|x_0\|_X^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\big[(\|x_0\|_X + \lambda\|v\|_X)^2 - \|x_0\|_X^2\big] \\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda^2\|v\|_X^2 + 2\lambda\|v\|_X\|x_0\|_X\big), \end{aligned}$$

e quindi

$$\langle\psi, v\rangle \leq \frac{1}{2}\lambda\|v\|_X^2 + \|v\|_X\|x_0\|_X.$$

Con $-v$ al posto di v si deduce allora

$$|\langle\psi, v\rangle| \leq \frac{1}{2}\lambda\|v\|_X^2 + \|v\|_X\|x_0\|_X,$$

e per $\lambda \to 0^+$

$$|\langle\psi, v\rangle| \leq \|x_0\|_X\|v\|_X, \qquad \forall v \in X. \tag{3.4}$$

Se invece poniamo nella (3.3) $x = (1-\lambda)x_0$ si ricava

$$\begin{aligned} -\lambda\langle\psi, x_0\rangle &\leq \frac{1}{2}(\|(1-\lambda)x_0\|_X^2 - \|x_0\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2}((1-\lambda)^2\|x_0\|_X^2 - \|x_0\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2}((1-2\lambda+\lambda^2)\|x_0\|_X^2 - \|x_0\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2\|x_0\|_X^2 - \lambda\|x_0\|_X^2. \end{aligned}$$

Dividendo per λ e prendendo $\lambda \to 0^+$ si otterrà

$$\langle\psi, x_0\rangle \geq \|x_0\|_X^2. \tag{3.5}$$

Combinando la (3.4) e la (3.5) abbiamo che

$$\langle\psi, x_0\rangle = \|x_0\|_X^2 = \|\psi\|_{X^*}^2,$$

cioè $\psi \in F(x_0)$.

□

Nel nostro caso stiamo considerando non generici spazi di Banach, bensì spazi di Banach uniformemente lisci, definizione 1.6, quindi ci interessa conoscere le proprietà della mappa di dualità F quando il suo dominio è uno spazio di questo tipo.
Avremo che F è a valore singolo, cioè, per ogni $x \in X$, $F(x) = \{\psi\}$, e inoltre è una funzione uniformemente continua su ogni sottoinsieme limitato $C \subseteq X$, cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x,\, y \in C, \quad \|x - y\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(x) - F(y)\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Lemma 3.16. *Sia X uno spazio di Banach uniformemente liscio. Allora la mappa di dualità F è a valore singolo.*

Dimostrazione. Ricordiamo intanto che se X è uniformemente liscio allora, per il teorema 1.12, X^* è uniformemente convesso.
Vogliamo dimostrare che, per ogni $x \in X$, l'insieme

$$F(x) = \left\{ f \in X^* \mid \langle f, x \rangle = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X^*}^2 \right\}$$

è composto da un unico elemento.
Se $x = 0$, per definizione, abbiamo che $F(0) = \{0\}$.
Supponiamo allora $x \neq 0$ e siano $f,\, g \in F(x)$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|f + g\|_{X^*} \|x\|_X \geq \langle f + g, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle = 2\|x\|_X^2.$$

Essendo $\|x\|_X > 0$, da questa si ottiene che

$$\|f + g\|_{X^*} \geq 2\|x\|_X = \|f\|_{X^*} + \|g\|_{X^*}.$$

Ne segue, poiché la disuguaglianza opposta non è altro che la disuguaglianza triangolare e quindi è sempre vera, che

$$\|f + g\|_{X^*} = \|f\|_{X^*} + \|g\|_{X^*}.$$

Supponiamo per assurdo che $\|f - g\|_{X^*} > \varepsilon$ per un certo $\varepsilon > 0$. Poniamo $\bar{f} = \frac{f}{\|f\|_{X^*}}$ e $\bar{g} = \frac{g}{\|g\|_{X^*}}$. Avremo allora che

$$\|\bar{f}\|_{X^*} = 1, \quad \|\bar{g}\|_{X^*} = 1, \qquad \|\bar{f} - \bar{g}\|_{X^*} > \frac{\varepsilon}{\|x\|_X}.$$

Allora, per uniforme convessità, dovrebbe esistere un certo $\delta > 0$ tale che

$$\left\| \frac{\bar{f} + \bar{g}}{2} \right\|_{X^*} < 1 - \delta,$$

mentre, per quanto visto, si ha che

$$\left\| \frac{\bar{f}+\bar{g}}{2} \right\|_{X^*} = \frac{1}{2}\big(\|\bar{f}\,\|_{X^*} + \|\bar{g}\,\|_{X^*}\big) = 1.$$

Ciò è assurdo, quindi $\|f-g\|_{X^*} = 0$.

□

Lemma 3.17. *Sia X uno spazio di Banach uniformemente liscio e sia C un suo sottoinsieme limitato. Allora la mappa di dualità F è uniformemente continua su C.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che la mappa di dualità è a singolo valore. Senza perdere in generalità possiamo considerare $C = \{x \in X |\, \|x\|_X = 1\}$. Ricordiamo che X^* è uniformemente convesso, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta_\varepsilon > 0$ il corrispondente numero reale della definizione di uniforme convessità. Siano $x,\, y \in C$ tali che $\|x-y\|_X < 2\delta_\varepsilon$. Allora, per definizione di F e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|F(x)+F(y)\|_{X^*} &= \sup_{\|u\|_X \le 1} \big\{ \langle F(x)+F(y), u\rangle \big\} \\
&\ge \langle F(x)+F(y), x\rangle = \langle F(x), x\rangle + \langle F(y), x\rangle \\
&= \langle F(x), x\rangle + \langle F(y), y\rangle + \langle F(y), x-y\rangle \\
&\ge \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 - \|x-y\|_X \|F(y)\|_{X^*} \\
&\ge 2 - 2\delta_\varepsilon \|y\|_X = 2(1-\delta_\varepsilon).
\end{aligned}$$

In altre parole abbiamo trovato che, dati $F(x),\, F(y) \in X^*$, tali che $\|F(x)\|_{X^*} = 1$ ed $\|F(y)\|_{X^*} = 1$, si ha che

$$\frac{\|F(x)+F(y)\|_{X^*}}{2} \ge 1 - \delta_\varepsilon,$$

quindi, per definizione di uniforme convessità, si deve avere

$$\|F(x)-F(y)\|_{X^*} < \varepsilon.$$

□

Osservazione 3.18. La disuguaglianza del sottodifferenziale

$$\|u\|_X^2 - \|v\|_X^2 \ge 2\,\langle F(v), u-v\rangle\,, \qquad \forall u,\, v \in X$$

implica la disuguaglianza

$$\|x+y\|_X^2 - \|x\|_X^2 \le 2\langle F(x+y), y\rangle, \qquad \forall x,\, y \in X.$$

Basta infatti porre $u = x+y+h$, con $h \in C$, $v = x+y$ e si avrà

$$\|x+y+h\|_X^2 - \|x+y\|_X^2 \ge 2\langle F(x+y), h\rangle, \qquad \forall x,\, y,\, h \in X.$$

Allora prendendo $h = -y$ si ottiene proprio

$$\|x\|_X^2 - \|x+y\|_X^2 \ge 2\langle F(x+y), -y\rangle, \qquad \forall x,\, y \in X,$$

cioè per ogni $x,\, y \in X$

$$\|x+y\|_X^2 \le \|x\|_X^2 + 2\langle F(x+y), y\rangle. \tag{3.6}$$

Lemmi e proposizioni

Lemma 3.19. *[16] Sia E un sottoinsieme separabile di uno spazio di Banach X e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata contenuta in E.*
Allora vi è una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\exists f(z) = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z\|_X \qquad \forall z \in E.$$

Dimostrazione. E è separabile, quindi esiste una successione $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ densa in E; cioè, per ogni $z \in E$, esiste una sottosuccessione $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ di $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{k\to\infty} z_{m_k} = z$.
Essendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, si ha che $(\|x_n - z_1\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che la successione reale $(\|x_n^{(1)} - z_1\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(1)} - z_1\|_X = \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Anche $(\|x_n^{(1)} - z_2\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$, quindi, ripetendo gli stessi argomenti, avremo che esiste una sottosuccessione $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(2)} - z_2\|_X = \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

ma avremo anche

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(2)} - z_1\|_X = \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Al passo k-esimo avremo che esisterà una sottosuccessione

$$(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n^{k-1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ldots \subseteq (x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

tale che
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(k)} - z_i\|_X = \lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Consideriamo la successione diagonale $(x_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, la quale è definitivamente contenuta in $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$; dunque si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z_i\|_X = \lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^+.$$

Possiamo dunque definire una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$f(z_i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z_i\|_X, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sia ora $z \in E$. Allora, essendo $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ densa in E, esiste una sottosuccessione $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} z_{m_k} = z.$$

Vogliamo dimostrare che esiste il $\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X = f(z)$.
Per prima cosa mostriamo che la successione $\big(f(z_{m_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{R}$. Faremo infatti vedere che è una successione di Cauchy su $\mathbb{R}$, cioè che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che:

$$\forall h,\, k \geq \nu \qquad \big|f(z_{m_h}) - f(z_{m_k})\big| < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \big|f(z_{m_h}) - f(z_{m_k})\big| &= \lim_{n\to\infty} \Big| \|x_n^{(n)} - z_{m_h}\|_X - \|x_n^{(n)} - z_{m_k}\|_X \Big| \\ &\leq \|x_n^{(n)} - z_{m_h} - x_n^{(n)} + z_{m_k}\|_X = \|z_{m_h} - z_{m_k}\|_X \to 0, \end{aligned}$$

dunque esiste il
$$\lim_{k\to\infty} f(z_{m_k}) = a \in \mathbb{R}.$$

Tuttavia non sappiamo ancora se esiste il $\lim_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X$; verifichiamolo calcolando il massimo e il minimo limite. Dalla disuguaglianza

$$\Big| \|x_n^{(n)} - z\|_X - \|x_n^{(n)} - z_{m_k}\|_X \Big| \leq \|z - z_{m_k}\|_X,$$

per $n \to \infty$, da come è stata definita f, segue

$$\begin{aligned} f(z_{m_k}) - \|z - z_{m_k}\|_X &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X \leq f(z_{m_k}) + \|z - z_{m_k}\|_X. \end{aligned}$$

Infine, prendendo il limite per $k \to \infty$, si ottiene che:

$$a \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X \le a.$$

Quindi abbiamo trovato che, per ogni $z \in E$, esiste

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^{(n)} - z\|_X.$$

□

Lemma 3.20. *[16] Sia C un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach X uniformemente liscio e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione contenuta in C tale che per ogni $z \in C$ esiste*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|_X.$$

Se f ha minimo su C in u allora

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n - u), z - u\rangle \le 0, \qquad \forall z \in C,$$

ove F è la mappa di dualità.

Dimostrazione. Siano $z \in C$ e $t \in [0, 1[$. Poiché X è uniformemente liscio, la mappa di dualità F è a valore singolo e coincide con il sottodifferenziale $\partial\frac{\|\cdot\|^2}{2}$. Quindi, se consideriamo $x_0 = x_n - tu - (1-t)z \in C$, si ha per definizione di sottodifferenziale

$$2F\left(x_n - tu - (1-t)z\right) \in \partial\|x_n - tu - (1-t)z\,\|^2;$$

ponendo $x = x_n - tu - (1-t)z + (1-t)(z-u)$, si trova $x - x_0 = (1-t)(z-u)$, da cui

$$\begin{aligned} 2\left\langle F(x_0), x - x_0\right\rangle &= 2\left\langle F(x_n - tu - (1-t)z), (1-t)(z-u)\right\rangle \le \\ &\le \|x_n - tu - (1-t)z + (1-t)(z-u)\|_X^2 - \|x_n - tu - (1-t)z\|_X^2 \\ &= \|x_n - u\|_X^2 - \|x_n - tu - (1-t)z\|_X^2, \end{aligned}$$

ovvero

$$\langle F(x_n - tu - (1-t)z), z - u\rangle \le \frac{1}{2(1-t)}\Big[\|x_n - u\|_X^2 - \|x_n - tu - (1-t)z\|_X^2\Big].$$

Per uniforme continuità, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$1 - t < \delta_\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \|F(x_n - tu - (1-t)z) - F(x_n - u)\|_{X^*} < \varepsilon;$$

perció, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per $z \in C$ fissato, si ha per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\big| \langle F(x_n - tu - (1-t)z) - F(x_n - u), z - u \rangle \big| \le \\ \le \|F(x_n - tu - (1-t)z) - F(x_n - u)\|_{X^*} \, \|z - u\|_X < \varepsilon \|z - u\|_X,\end{aligned}$$

per cui per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [1 - \delta_\varepsilon, 1[$

$$\begin{aligned}\langle F(x_n - u), z - u \rangle &\le \varepsilon \|z - u\|_X + \langle F(x_n - tu - (1-t)z), z - u \rangle \\ &\le \varepsilon \|z - u\|_X + \frac{1}{2(1-t)} \Big[\|x_n - u\|_X^2 - \|x_n - tu - (1-t)z\|_X^2 \Big]\end{aligned}$$

Per $n \to \infty$, ricordando che per ipotesi $f(u) = \min_C f$, si ottiene

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n - u) - z - u \rangle \le \\ \le \varepsilon \|z - u\|_X + \frac{1}{2(1-t)} \Big[f(u)^2 - f(tu + (1-t)z)^2 \Big] \le \varepsilon \|z - u\|_X,\end{aligned}$$

e poiché questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, la tesi è dimostrata.

□

Lemma 3.21. *Sia C un sottoinsieme, non vuoto, chiuso e convesso di uno spazio di Banach X uniformemente liscio e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva tale che $F = Fix(T) \neq \emptyset$.*
Per ogni $x \in C$ e $k \in (0, 1)$, la contrazione $T_k : C \to C$ definita da

$$T_k(u) = kx + (1 - k)T(u),$$

ha un'unica soluzione u_k, dipendente da x.
Consideriamo una successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$, tale che $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, e la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} = (u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^+}$, contenuta in

$$K = \big\{ u_k \in C \,\big|\, T_k(u_k) = u_k \text{ per un certo } k \in (0, 1) \big\} \subseteq C.$$

Se $v \in Fix(T)$ allora, per ogni $x \in C$, si ha

$$\langle u_n - x, F(u_n - v) \rangle \le 0.$$

Dimostrazione. Osservo che essendo T non espansiva, per ogni y, $w \in C$, otteniamo

$$\begin{aligned}\langle T(y) - T(w), F(y - w) \rangle &\le \|T(y) - T(w)\|_X \|F(y - w)\|_{X^*} \\ &\le \|y - w\|_X \|y - w\|_X = \|y - w\|_X^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

Allora, se $v \in Fix(T)$, e si ha che

$$\begin{aligned}\langle u_n - x, F(u_n - v)\rangle &= \langle k_n x + (1-k_n)T(u_n) - x, F(u_n - v)\rangle \\ &= (1-k_n)\langle T(u_n) - x, F(u_n - v)\rangle \\ &= (1-k_n)\langle T(u_n) - T(v), F(u_n - v)\rangle \\ &\qquad +(1-k_n)\langle v - x, F(u_n - v)\rangle.\end{aligned}$$

Dunque applicando la (3.7)

$$\begin{aligned}\langle u_n - x, F(u_n - v)\rangle &\leq (1-k_n)\|u_n - v\|_X^2 + (1-k_n)\langle v - x, F(u_n - v)\rangle \\ &= (1-k_n)\|u_n - v\|_X^2 + (1-k_n)\langle v - u_n, F(u_n - v)\rangle \\ &\qquad + (1-k_n)\langle u_n - x, F(u_n - v)\rangle \\ &= (1-k_n)\|u_n - v\|_X - (1-k_n)\|u_n - v\|_X^2 \\ &\qquad + (1-k_n)\langle u_n - x, F(u_n - v)\rangle\end{aligned}$$

Pertanto per ogni $x \in C$

$$k_n\langle u_n - x, F(u_n - v)\rangle \leq 0.$$

Essendo $0 < k_n < 1$ si ottiene la tesi. □

Proposizione 3.22. *[15]*
Sia C un sottoinsieme, non vuoto, chiuso e convesso di uno spazio di Banach X uniformemente liscio e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva tale che $F = Fix(T) \neq \emptyset$.
Per ogni $x_1 \in C$ e $k \in (0,1)$, sia $T_k : C \to C$ la contrazione definita da

$$T_k(x) = kx_1 + (1-k)T(x) \quad \forall x \in C.$$

Allora, se chiamiamo $u_k \in C$ l'unico punto fisso della mappa T_k, si ha

$$\lim_{k\to 0} u_k = z, \qquad \textit{con } z \in Fix(T).$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione per passi.

(1). Verifichiamo che l'enunciato abbia senso, cioè che $T_k(x) \in C$, per ogni $x \in C$, e che T_k sia effettivamente una contrazione per ogni $k \in (0,1)$. Per ogni $x \in C$, poiché C è chiuso e convesso e $T(x) \in C$ per ipotesi, $T_k(x)$

è combinazione convessa di elementi di C e quindi $T_k(x) \in C$.
Inoltre

$$\|T_k(x) - T_k(y)\|_X = (1-k)\|T(x) - T(y)\|_X \leq \lambda \|x - y\|_X,$$

con $\lambda = (1-k) \in (0,1)$.

Consideriamo l'insieme dei punti fissi delle mappe T_k al variare di k in $(0,1)$, cioè

$$K = \left\{ u_k \in C \,\middle|\, T_k(u_k) = u_k \text{ per un certo } k \in (0,1) \right\} \subseteq C.$$

(2). Sia $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione contenuta in $(0,1)$, con $\lim_{n\in\infty} k_n = 0$.
Consideriamo la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} = (u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^+}$, contenuta in K.
Verifichiamo che è limitata, in particolare dimostriamo che

$$\|u_n\|_X \leq \|x_1\|_X, \qquad \forall n \geq 1.$$

Per cominciare osserviamo che:

$$\|T(x)\|_X \leq \|x\|_X, \quad \forall x \in C.$$

Infatti, poiché $Fix(T) \neq \emptyset$, possiamo supporre, a meno di una traslazione, che $0 \in Fix(T)$, quindi

$$\|T(x)\|_X = \|T(x) - 0\|_X = \|T(x) - T(0)\|_X \leq \|x\|_X.$$

Da ciò, ricordando che, per ogni $n \geq 1$, u_n è punto fisso della contrazione T_{k_n}, ricaviamo che

$$\begin{aligned} \|u_n\|_X &= \|T_{k_n}(u_n)\|_X = \|k_n x_1 + (1-k_n)T(u_n)\|_X \\ &\leq k_n\|x_1\|_X + (1-k_n)\|T(u_n)\|_X \leq k_n\|x_1\|_X + (1-k_n)\|u_n\|_X. \end{aligned}$$

Essendo $k_n \neq 0$ per ogni $n \geq 1$, ottengo che

$$\|u_n\|_X \leq \|x_1\|_X.$$

(3). Dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} \|u_n - T(u_n)\|_X = 0$.
Intanto osserviamo che, essendo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione limitata ed avendo visto che $\|T(x)\|_X \leq \|x\|_X$ per ogni $x \in C$, anche la successione $\big(T(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sarà limitata.
Si ha inoltre, essendo $T_{k_n}(u_n) = u_n$, che

$$\begin{aligned} u_n - T(u_n) &= u_n - \big(k_n x_1 + (1-k_n)T(u_n)\big) + k_n x_1 + (1-k_n)T(u_n) - T(u_n) \\ &= u_n - T_{k_n}(u_n) + k_n x_1 - k_n T(u_n) \\ &= k_n x_1 - k_n T(u_n). \end{aligned}$$

Poiché$(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima e la successione $(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}^+}$ è limitata, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - T(u_n)\|_X = 0.$$

(4). Il convesso C verifica le ipotesi del lemma 3.19, dunque esiste una sottosuccessione $(u_{n_h})_{h\in\mathbb{N}^+} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ tale che

$$\forall z \in C, \qquad \exists \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - z\|_X.$$

Allora definiamo la funzione $f : C \to \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$f(z) = \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - z\|_X, \qquad \forall z \in C.$$

Questa funzione è continua e convessa, infatti per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni z_1, $z_2 \in C$, si ha:

$$\begin{aligned} f\big((1-t)z_1 + tz_2\big) &= \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - (1-t)z_1 - tz_2\|_X \\ &\leq \lim_{h\to\infty} \|(1-t)u_{n_h} - (1-t)z_1\|_X + \lim_{k\to\infty} \|tu_{n_h} - tz_2\|_X \\ &= (1-t)\lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - z_1\|_X + t\lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - z_2\|_X \\ &= (1-t)f(z_1) + tf(z_2). \end{aligned}$$

Ma una funzione, definita in un insieme C, chiuso e convesso, continua, convessa, limitata inferiormente e che tende a $+\infty$ per $\|z\|_X \to \infty$, ha minimo in C. Poniamo quindi

$$C_0 = \big\{x \in C \,\big|\, f(x) = \inf_{z\in C} f(z)\big\}.$$

(5). Vogliamo applicare il teorema 1.16 alla mappa $T\big|_{C_0} : C_0 \to X$.
Per essere nelle ipotesi del teorema dobbiamo mostrare che C_0 è un sottoinsieme di X, chiuso, convesso limitato e T-invariante. L'ipotesi di minimalità non crea problemi, infatti, anche se C_0 non fosse minimale, conterrà, per il lemma di Zorn, un sottoinsieme $C' \subseteq C_0$ convesso, chiuso, invariante e minimale. Allora per il teorema 1.16, esiste $u \in C'$ tale che $T(u) = u$. In particolare $u \in C_0$.
Verifichiamo che C_0 è convesso.
Siano x, $y \in C_0$, dunque $f(x) = f(y) = \inf_{z\in C} f(z)$, e sia $0 < \lambda < 1$, avremo che $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_0$, infatti essendo f convessa

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = \inf_{z\in C} f(z).$$

Vediamo inoltre che è T-invariante. Sia $u \in C_0$, vogliamo dimostrare che $T(u) \in C_0$. Poiché $\lim_{h\to\infty} k_{n_h} = 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(T(u)) &= \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - T(u)\|_X = \lim_{h\to\infty} \|T_{k_{n_h}}(u_{n_h}) - T(u)\|_X \\ &= \lim_{h\to\infty} \|k_{n_h} x_1 + (1 - k_{n_h})T(u_{n_h}) - T(u)\|_X \\ &\leq \lim_{h\to\infty} k_{n_h} \|x_1 - T(u_{n_h})\|_X + \lim_{h\to\infty} \|T(u_{n_h}) - T(u)\|_X \\ &\leq \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - u\|_X = f(u). \end{aligned}$$

Ma $f(u) = \inf_{z\in C} f(z)$, quindi abbiamo verificato che $T(u) \in C_0$.
Dunque siamo nelle ipotesi del teorema di Baillon, questo ci assicura che esiste $\bar{u} \in C$ tale che

$$\bar{u} \in C_0, \text{ cioè } f(\bar{u}) = \inf_{z\in C} f(z) \qquad \text{e} \qquad \bar{u} \in Fix(T), \text{ cioè } T(\bar{u}) = \bar{u}.$$

(6). Infine dimostriamo che $\lim_{k\to 0} u_k = \bar{u}$.
Possiamo utilizzare il lemma 3.20, infatti abbiamo che C è sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X uniformemente liscio. Inoltre abbiamo una $(u_{n_h})_{h\in\mathbb{N}^+} \subseteq C$ tale che, per ogni $z \in C$, esiste

$$f(z) = \lim_{h\to\infty} \|u_{n_h} - z\|_X.$$

Allora, dato $\bar{u} \in C$ elemento minimo in f, per il lemma 3.20 abbiamo che

$$\limsup_{h\to\infty} \langle z - \bar{u}, F(u_{n_h} - \bar{u})\rangle \leq 0, \qquad \forall z \in C.$$

D'altra parte, per il lemma 3.21 abbiamo che

$$\langle u_n - z, F(u_n - \bar{u})\rangle \leq 0, \qquad \forall z \in C.$$

Da queste due disuguaglianze otteniamo che

$$\lim_{h\to\infty} u_{n_h} = \bar{u}.$$

Per completare la dimostrazione, supponiamo che u_{m_t} sia un'altra sottosuccessione tale che

$$\lim_{t\to\infty} u_{m_t} = w,$$

con $w \in Fix(T)$. Ma allora

$$\langle \bar{u} - z, F(\bar{u} - w)\rangle \leq 0,$$

$$\langle w - z, F(w - \bar{u})\rangle \leq 0,$$

pertanto $\bar{u} = w$. □

Lemma 3.23. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali non negativi che soddisfa*

$$a_{n+1} \leq (1-\alpha_{n+1})a_n + \alpha_{n+1}\beta_{n+1} \qquad \forall n \geq 0, \tag{3.8}$$

dove $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* $(0,1)$ *che verifica la condizione di controllo (C2), cioè*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty, \quad \textit{o equivalentemente,} \quad \prod_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_i) = 0,$$

e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione tale che*

$$\limsup_{n\to\infty} \beta_n \geq 0.$$

Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi, esiste un intero N tale che $\beta_n \leq \varepsilon$, per ogni $n \geq N$.
Allora per ogni $n > N$ avremo che:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq (1-\alpha_{n+1})a_n + \alpha_{n+1}\beta_{n+1} \leq (1-\alpha_{n+1})a_n + \alpha_{n+1}\varepsilon \\
&\leq (1-\alpha_{n+1})\big((1-\alpha_n)a_{n-1} + \alpha_n\varepsilon\big) + \alpha_{n+1}\varepsilon \\
&= (1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n)a_{n-1} \\
&\qquad - (1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n-1)\varepsilon + \alpha_{n+1}\varepsilon \qquad (3.9)\\
&= (1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n)a_{n-1} - (1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n)\varepsilon \\
&\qquad + (1-\alpha_{n+1})\varepsilon + \alpha_{n+1}\varepsilon \\
&= (1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n)a_{n-1} + \varepsilon(1-(1-\alpha_{n+1})(1-\alpha_n)).
\end{aligned}$$

Riapplicando $(n+1-N)$ volte la (3.9) otteniamo che

$$a_{n+1} \leq \left(\prod_{i=N}^{n+1}(1-\alpha_i)\right) a_N + \left(1 - \prod_{i=N}^{n+1}(1-\alpha_i)\right)\varepsilon,$$

ma, per ipotesi, $\prod_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_i) = 0$, quindi ricaviamo che

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \varepsilon.$$

Questo completa la dimostrazione.

$\square$

Teorema di convergenza

Ora abbiamo tutti gli strumenti per mostrare che l'iterazione di Halpern rispetto alla mappa non espansiva T, definita in un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach uniformemente liscio, converge ad un punto fisso di T se la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ soddisfa le condizioni di controllo (C1), (C2) e (C5).

Teorema 3.24. *[19], [20]*
Sia C un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso di uno spazio di Banach X uniformemente liscio e sia $T : C \to C$ una mappa non espansiva tale che

$$F = Fix(T) = \{x \in C \,\big|\, T(x) = x\} \neq \emptyset.$$

Sia inoltre $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione in $[0, 1]$ tale che

$$(C1): \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0, \tag{i}$$

$$(C2): \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty, \tag{ii}$$

$$(C5): \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{t_{n+1}} = 0. \tag{iii}$$

Allora per ogni $\bar{x} \in C$, posto $x_1 = \bar{x}$, la successione (3.1) di Halpern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, definita da

$$x_{n+1} = t_{n+1}x_1 + (1 - t_{n+1})T(x_n),$$

converge ad un punto fisso di T.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione per passi.

(1). Dimostriamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è limitata.
Per cominciare osserviamo che abbiamo che:

$$\|T(x)\|_X \leq \|x\|_X, \quad \forall x \in C.$$

Infatti, poiché $Fix(T) \neq \emptyset$, possiamo supporre, a meno di traslare tutto, che $0 \in Fix(T)$, quindi

$$\|T(x)\|_X = \|T(x) - 0\|_X = \|T(x) - T(0)\|_X \leq \|x\|_X.$$

Dimostriamo per induzione che:

$$\|x_n\|_X \leq \|x_1\|_X, \qquad \forall n \geq 1.$$

Il caso $n = 1$ è banale.
Supponiamo che $\|x_n\|_X \leq \|x_1\|_X$ con $n \geq 1$ e dimostriamolo per $n+1$. Per la disuguaglianza triangolare abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}\|_X &= \|t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n)\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|T(x_n)\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|x_n\|_X \\
&\leq t_{n+1}\|x_1\|_X + (1-t_{n+1})\|x_1\|_X = \|x_1\|_X.
\end{aligned}$$

Abbiamo si verifica subito che anche la successione $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, infatti si ha che $\|T(x_n)\|_X \leq \|x_n\|_X \leq \|x_1\|$ per ogni $n \geq 1$.
(2). Dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\|_X$.
Dalla definizione si ricava

$$\|x_{n+1}-T(x_n)\|_X = \|t_{n+1}x_1+(1-t_{n+1})T(x_n)-T(x_n)\|_X = t_{n+1}\|x_1-T(x_n)\|_X,$$

allora, essendo $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, dalla (ii), segue che

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T(x_n)\|_X = 0. \tag{3.10}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\|_X &= \|t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n) - t_nx_1 - (1-t_n)T(x_{n-1})\|_X \\
&= \|t_{n+1}x_1 + (1-t_{n+1})T(x_n) - t_nx_1 - (1-t_{n+1})T(x_{n-1}) \\
&\qquad -(t_{n+1}-t_n)T(x_{n-1})\|_X \\
&\leq |t_{n+1}-t_n|\,\|x_1 - T(x_{n-1})\|_X \\
&\qquad +(1-t_{n+1})\|T(x_n) - T(x_{n-1})\|_X \\
&\leq |t_{n+1}-t_n|\,\|x_1 - T(x_{n-1})\|_X + (1-t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Poniamo $M = \sup_{n>1} \|x_1 - T(x_{n-1})\|_X$, dunque, essendo $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, $M < \infty$. Allora la precedente disequazione diventa

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X \leq |t_{n+1}-t_n|\,M + (1-t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_X \tag{3.11}$$

Poniamo ora

$$\beta_{n+1} = \frac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}M, \qquad \forall n > 1,$$

Avremo, dalla (iii), che $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Allora la (3.11) diventa

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X \leq (1 - t_{n+1})\|x_n - x_{n-1}\|_X + t_{n+1}\beta_{n+1}.$$

Allora per il lemma 2.7 si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_X = 0. \tag{3.12}$$

Mettendo insieme l'equazione (3.10) e (3.12) si ottiene la tesi, infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T(x_{n+1})\|_X &= \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T(x_n) + T(x_n) - T(x_{n+1})\|_X \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - T(x_n)\|_X + \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\|_X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(3). Sia $k \in (0,1)$ e $z_k \in C$ il punto fisso della contrazione $T_k : C \to C$ definita da

$$T_k(x) = kx_1 + (1-k)T(x) \quad \forall x \in C,$$

allora per il lemma 3.17, esiste $\lim_{k\to 0} z_k = z$, con $z \in Fix(T)$.
Verifichiamo che

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n - z), x_1 - z\rangle \leq 0.$$

Poiché $z_k = kx_1 + (1-k)T(z_k)$ si ha che

$$\|z_k - x_n\|_X^2 = \|k(x_1 - x_n) + (1-k)(T(z_k) - x_n)\|_X^2.$$

Pertanto, utilizzando la disuguaglianza (3.6) con

$$x = (1-k)(T(z_k) - x_n), \quad y = k(x_1 - x_n), \quad \Rightarrow \quad x + y = z_k - x_n,$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\|z_k - x_n\|_X^2 &\leq (1-k)^2 \|T(z_k) - x_n\|_X^2 + 2k \langle F(z_k - x_n), x_1 - x_n \rangle \\
&\leq (1-k)^2 \Big[\|T(z_k) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X \Big]^2 \\
&\quad + 2k \langle F(z_k - x_n), (x_1 - z_k) + (z_k - x_n) \rangle \\
&\leq (1-k)^2 \Big[\|z_k - x_n\|_X + \|T(x_n) - x_n\|_X \Big]^2 \\
&\quad + 2k \Big[\|z_k - x_n\|_X^2 + \langle F(z_k - x_n), x_1 - z_k \rangle \Big] \\
&= (1+k^2) \|z_k - x_n\|_X^2 + 2k \langle F(z_k - x_n), x_1 - z_k \rangle \\
&\quad + (1-k)^2 2 \|z_k - x_n\|_X \|T(x_n) - x_n\|_X \\
&\quad + (1-k)^2 \|T(x_n) - x_n\|_X^2 \\
&\leq (1+k^2) \|z_k - x_n\|_X^2 + 2k \langle F(z_k - x_n), x_1 - z_k \rangle \\
&\quad + \|T(x_n) - x_n\|_X \Big[\|T(x_n) - x_n\|_X + 2 \|z_k - x_n\|_X \Big].
\end{aligned}$$

Quindi svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned}
2k \langle F(x_n - z_k), x_1 - z_k \rangle &\leq k^2 \|z_k - x_n\|_X^2 \\
&\quad + \|T(x_n) - x_n\|_X \Big[\|T(x_n) - x_n\|_X + 2 \|z_k - x_n\|_X \Big],
\end{aligned}$$

pertanto, dividendo per $2k \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\langle F(x_n - z_k), x_1 - z_k \rangle &\leq \frac{k}{2} \|z_k - x_n\|_X^2 \\
&\quad + \frac{\|T(x_n) - x_n\|_X}{2k} \Big[\|T(x_n) - x_n\|_X + 2 \|z_k - x_n\|_X \Big].
\end{aligned}$$

Prendendo il massimo limite per $n \to \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n - z_k), x_1 - z_k \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{t}{2} \|z_k - x_n\|_X^2. \tag{3.13}$$

Per il lemma 3.17 sappiamo che la mappa di dualità F è uniformemente continua su ogni sottoinsieme limitato di X, mentre per il lemma 2.6 abbiamo che

$$\lim_{k\to 0} z_k = z, \qquad \text{con } z \in Fix(T).$$

Dunque la (3.13) diventa

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n - z), x_1 - z\rangle \leq 0.$$

(4). Verifichiamo infine che $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.
Per definizione

$$x_{n+1} - z = t_{n+1}(x_1 - z) + (1 - t_{n+1})(T(x_n) - z).$$

Pertanto, utilizzando la disuguaglianza (3.6) con

$$x = (1 - t_{n+1})(T(x_n) - z), \quad y = t_{n+1}(x_1 - z), \quad \Rightarrow \quad x + y = x_{n+1} - z,$$

si ricava

$$\|x_{n+1} - z\|_X^2 \leq (1 - t_{n+1})^2 \|T(x_n) - z\|_X^2 + 2t_{n+1} \langle F(x_{n+1} - z), x_1 - z\rangle .$$

Poniamo

$$\beta_n := 2 \langle F(x_{n+1} - z), x_1 - z\rangle .$$

Per quanto visto nel punto precedente, vale che

$$\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0,$$

quindi possiamo applicare il lemma 3.23 alla successione $(\|x_n - z\|)_{n\in\mathbb{N}}$, infatti si ha che

$$\|x_{n+1} - z\|_X^2 \leq (1 - t_{n+1})\|x_n - z\|_X^2 + 2t_{n+1}\beta_{n+1}.$$

Pertanto si ha la tesi, cioè

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z \in Fix(T).$$

$\square$

Bibliografia

[1] P. Acquistapace, *Appunti di analisi convessa*, http://www.dm.unipi.it/ acquistp/anacon.pdf (2009), 49-50.

[2] P. Acquistapace, *Appunti di analisi funzionale*, http://www.dm.unipi.it/ acquistp/anafun.pdf (2011), 199-202.

[3] J.B. Baillon, *Quelques aspects de la théorie des points fixed dans les espaces de Banach I*, Séminaire d'analyse fonctionnelle, (1978-1979), 1-13.

[4] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore, 1986, 50-80.

[5] F.E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 53 (1965), 1041-1044.

[6] L. Deng, *Convergence of the Ishikawa iteration process for nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 199 (1996), 769-775.

[7] D. Göhde, *Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), 251-258.

[8] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 957- 961.

[9] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 147-150.

[10] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 65-71.

[11] W.A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

[12] M. A. Krasnoselski, *Two remarks on the method of successive approximation*, Usp. Math. Nauk (N.S.) 10 (1955), 123-127 (in Russian).

[13] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, Berlin-New York (1985), 288-289.

[14] P.L. Lions, *Approximation de points fixes de contractions*, C. R. Acad. Sci. Paris S´erie A 284 (1977), 1357-1359.

[15] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 287-292.

[16] S. Reich, *Product Formulas, Nonlinear Semigroups, and Accretive Operators*, J.Functional Analysis 36 (1980), 147-168.

[17] K.-K. Tan, H.-K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. 178 (1993), 301-308.

[18] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. 58 (1992), 486-491.

[19] H.-K. Xu, *Iterative algorithms for nonlinear operators*, J. London Math. Soc. 66 (2002), 240-256.

[20] H.-K. Xu, *Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc. 65 (2002), 109-113.