L'insieme di divergenza delle serie di Fourier

Elisabetta Biondi

30 novembre 2012

Indice

Introduzione

Il punto di partenza di questa tesi è il celebre teorema di Carleson e Hunt [15] e [16], secondo il quale, posto $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e scelto $p \in (1, +\infty)$, la serie di Fourier di ogni funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$ converge puntualmente quasi ovunque a f. Sotto certi aspetti, questo risultato è il migliore che si possa ottenere, poiché è noto che esistono funzioni p-sommabili su $\mathbb{T}$, la cui serie di Fourier diverge in almeno un punto.
Tuttavia l'insieme dei punti di divergenza di una funzione p-sommabile, seppure di misura nulla, può essere analizzato più dettagliatamente da diversi punti di vista: se ne può indagare la dimensione di Hausdorff, e se ne possono classificare i punti x a seconda di quanto rapidamente le somme parziali $S_n f(x)$ divergono in valore assoluto: un classico risultato di S. M. Nikolsky ([9] teorema 6.35 pag. 154) assicura, ad esempio, che $|S_n f(x)| \leq c n^{1/p} \|f\|_p$ per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$ e per ogni $x \in \mathbb{T}$, ma per certi punti la divergenza delle somme parziali potrebbe essere di ordine minore di $1/p$.
L'oggetto di questa tesi è esattamente lo studio dell'insieme

$$\{x \in \mathbb{T} : |S_n f(x)| \to +\infty\},$$

seguendo le linee di due articoli di Bayart e Heurteaux [1] e [2]. In questa direzione vi è un risultato di Aubry [3] che afferma i due fatti seguenti:

(i) Se $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, e $\beta \geq 0$, per l'insieme

$$\mathcal{E}(\beta, f) = \left\{ x \in \mathbb{T} : \limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n f(x)|}{n^\beta} > 0 \right\}$$

si ha $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}(\beta, f)) \leq 1 - \beta p$;

(ii) viceversa, per ogni $E \subset \mathbb{T}$ tale che $\dim_{\mathcal{H}}(E) < 1 - \beta p$ esiste $f \in L^p(\mathbb{T})$ tale che $\limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n f(x)|}{n^\beta} = +\infty$ per ogni $x \in E$.

Il teorema di Aubry induce a definire l'*indice di divergenza* di un punto $x_0 \in \mathbb{T}$ rispetto a una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$:

$$\beta(x_0) = \inf\{\gamma \geq 0 : |S_n f(x_0)| = O(n^\gamma)\}.$$

Per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$, il teorema di Carleson e Hunt garantisce che $\beta(x) = 0$ quasi ovunque, mentre il teorema di S. M. Nikolsky dice che $0 \leq \beta(x) \leq 1/p$; si possono dunque analizzare attraverso l'uso della misura di Hausdorff gli insiemi di livello

$$E(\beta, f) = \{x \in \mathbb{T} : \beta(x) = \beta\} = \left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to\infty} \frac{|\log S_n f(x)|}{\log n} = \beta\right\},$$

e chiameremo *spettro delle singolarità* di una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$ l'applicazione $\beta \mapsto E(\beta, f)$. Nel capitolo 1 dimostreremo che per $1 < p < \infty$ e $\beta \in [0, 1/p]$ risulta $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$ per ogni f al di fuori di un insieme (dipendente da β) di prima categoria in $L^p(\mathbb{T})$. In particolare, risulterà $|S_n f(x)| \simeq n^{1/p}$ al più su un insieme di dimensione di Hausdorff nulla.
Quando $p = 1$ il teorema di Carleson-Hunt non vale, e addirittura vi è un teorema di Kolmogorov, riportato nel capitolo 2, che garantisce l'esistenza di una funzione di $L^1(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier diverge in ogni punto di $\mathbb{T}$. Nello stesso capitolo dimostreremo che per $\beta \in [0, 1]$ risulta $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta$ per ogni f al di fuori di un insieme (dipendente da β) di prima categoria in $L^1(\mathbb{T})$.
Nel caso $p = \infty$ si considera lo spazio $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, e qui le cose cambiano. Anzitutto, in questo spazio si ha $|S_n f(x)| \leq c\|f\|_\infty \log n$ per ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ e per ogni $x \in \mathbb{T}$: siamo dunque alla presenza di singolarità di tipo logaritmico, e di conseguenza siamo ricondotti allo studio degli insiemi

$$\mathcal{F}(\beta, f) = \left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^\beta} > 0\right\},$$

$$F(\beta, f) = \left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log\log n} = \beta\right\}, \qquad \beta \in [0, 1].$$

In $C(\mathbb{T})$ l'analogo del teorema di Aubry non vale: dimostreremo nel capitolo 3 che $\dim_{\mathcal{H}}(F(\beta, f)) = 1$ per ogni $\beta \in [0, 1]$, e per ogni f al di fuori di un insieme (dipendente da β) di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Ne deriva che le misure di Hausdorff $\mathcal{H}^s$, $s \geq 0$, non sono adatte a misurare la grandezza degli insiemi $F(\beta, f)$. Occorre considerare misure di Hausdorff $\mathcal{H}^\phi$ associate a funzioni $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continue, crescenti in un intorno di zero e nulle in 0 (le *funzioni dimensione*) di tipo particolare, vale a dire della forma

$$\phi_{s,t}(x) = x^s \exp\left[\left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{1-t}\right], \qquad x \geq 0,$$

ove $s > 0$ e $t \in (0,1]$. Diremo allora che E ha *dimensione di Hausdorff precisata* (α, β) se $\alpha = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ e se

$$\beta = \begin{cases} \sup\{t \in (0,1) : \mathcal{H}^{\phi_{\alpha,t}}(E) > 0\} & \text{se tale insieme non è vuoto,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostreremo nel capitolo 3 che per $\beta \in [0,1]$ l'insieme $F(\beta, f)$ ha dimensione precisata $(1, 1-\beta)$ per ogni f al di fuori di un insieme (dipendente da β) di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
La "grandezza" di un insieme di funzioni di $L^p(\mathbb{T})$ o $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ può essere valutata anche da un altro punto di vista. Diciamo che un sottoinsieme boreliano A di uno spazio vettoriale metrico completo X è *timido*, secondo la graziosa definizione di Hunt, Sauer e Yorke [14], se esiste una misura di probabilità μ, avente supporto compatto, tale che $\mu(x + A) = 0$ per ogni $x \in X$; un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice timido se esiste un boreliano timido che lo contiene. Un sottoinsieme $F \subseteq X$ è invece detto *prevalente* se F^c è timido. L'essere un insieme timido generalizza la definizione di insieme trascurabile secondo Lebesgue negli spazi euclidei, nel senso che se X ha dimensione finita gli insiemi timidi sono tutti e soli gli insiemi trascurabili. Le principali proprietà degli insiemi timidi, che sono essenzialmente estensioni di quelle classiche degli insiemi trascurabili, sono le seguenti:

(1) se F è timido, anche $x + F$ è timido;

(2) ogni insieme prevalente è denso in X;

(3) l'intersezione numerabile di insiemi prevalenti è prevalente;

(4) se $\dim(X) = \infty$, i compatti sono timidi.

Discuteremo questa nozione nel capitolo 4, e la applicheremo nel capitolo 5, dove dimostreremo che, se $1 \leq p < \infty$, per ogni $\beta \in [0, 1/p]$ l'insieme delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{T})$ tali che $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$ è prevalente.
Nel caso di $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, risultati classici assicurano che $\|S_n f\|_\infty = \mathrm{o}(\log n)$ per ogni $f \in C(\mathbb{T})$, ma per ogni successione infinitesima δ_n di numeri positivi esiste $f \in C(\mathbb{T})$ tale che

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n f(0)|}{\delta_n \log n} = +\infty.$$

Nel capitolo 6 proveremo che, fissata δ_n infinitesima e positiva, la relazione

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\delta_n \log n} = +\infty \qquad \forall x \in E$$

vale su un insieme E (dipendente da f) con $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 1$, per ogni f al di fuori di un insieme di prima categoria e timido in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Capitolo 1

Divergenza della serie di Fourier di funzioni in $L^p(\mathbb{T})$ per $1 < p < +\infty$

Prima di cominciare, enunciamo in modo preciso i risultati che utilizzeremo e di cui abbiamo già parlato nel corso dell'introduzione. Per primo il famoso teorema di Carleson e Hunt [15] e [16]:

Teorema 1 (Teorema di Carleson, Hunt)**.** *Sia $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 < p < +\infty$. Allora la serie di Fourier converge quasi ovunque a f in $\mathbb{T}$.*

L'altro teorema che richiamiamo è il risutato di J.-M. Aubry [3].

Teorema 2. *Sia $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < +\infty$. Per $\beta \geq 0$, definiamo*

$$\mathcal{E}(\beta, f) = \{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} n^{-\beta}|S_n f(x)| > 0\}.$$

Allora $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}(\beta, f)) \leq 1 - \beta p$. Viceversa, dato un insieme E tale che $\dim_{\mathcal{H}}(E) < 1 - \beta p$, esiste una funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$ tale che, per ogni $x \in E$,

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{-\beta}|S_n f(x)| = +\infty.$$

1.1 Ipotesi e notazioni

Introduciamo anzitutto le notazioni che ci saranno utili in tutta la tesi. Tratteremo, salvo eccezioni che verranno opportunamente segnalate, di funzioni periodiche che considereremo definite sul toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Indicheremo con $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ le funzioni trigonometriche definite su $\mathbb{T}$ da

$$e_k(t) = e^{2\pi ikt}$$

per cui il k-esimo coefficiente della serie di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ sarà

$$c_k = \int_0^1 f(t) e_k(-t) dt = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt.$$

Indicheremo con $S_N f$ la N-esima somma di Fourier, cioè

$$S_N f(t) = \sum_{|k| \leq N} c_k e_k(t).$$

La serie di Fourier è definita da

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikt} = \lim_{N \to +\infty} S_N f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

quando il limite esiste. Se f e g sono due funzioni in $L^1(\mathbb{T})$, il prodotto di convoluzione è definito come

$$f * g(\theta) = \int_0^1 f(t) g(\theta - t) dt.$$

Ricordiamo che se $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, e $g \in L^1(\mathbb{T})$, allora $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$. Indicato con

$$D_N(t) = \sum_{|k| \leq N} e^{2\pi ikt} = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)},$$

l'N-nucleo di Dirichlet, risulta $S_N(t) = f * D_N(t)$.

La media delle prime N somme di Fourier è la N-esima somma di Fejér

$$\sigma_N(t) = \frac{S_0 f(t) + \cdots + S_{N-1} f(t)}{N}.$$

La N-sima somma di Fejér è il risultato della convoluzione di f con il nucleo di Fejér

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2.$$

Se g appartiene a $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, $(\sigma_N g)_{N \geq 1}$ converge uniformemente a g.

Invece le somme di Fourier non è detto che convergano in ogni punto, ragione per cui il teorema di Carleson e Hunt è ottimale addirittura per funzioni continue, come illustrato nell'esempio che segue.

Esempio di Fejér

Questo esempio è dovuto a Fejér e prova l'esistenza di una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto, che senza perdita di generalità possiamo supporre sia l'origine. Per comodità, descriveremo la funzione sul periodo $[0, 2\pi]$ e considereremo la serie di Fourier reale della funzione trovata. Ci sarà utile il seguente lemma.

Lemma 3. (i) *Siano $p < q$ due interi e sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \not\equiv 0$ (mod 2π). Allora*

$$\left|\sum_{p \leq n \leq q} e^{inx}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin x/2}\right|.$$

(ii) *Siano $c_p \geq c_{p+1} \geq \cdots \geq 0$. Se $x \not\equiv 0$ (mod 2π), allora*

$$\left|\sum_{p \leq n \leq q} c_n e^{inx}\right| \leq \frac{2c_p}{|\sin x/2|}.$$

(iii) *Siano $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ e $nc_n \leq A$. Allora*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx\right| \leq A(\pi + 2).$$

Dimostrazione. (i) Siccome $D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$, allora si ha

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} e^{inx}\right| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=-q}^{q} e^{inx} - \sum_{n=-p+1}^{p-1} e^{inx}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(q+1/2)x}{\sin(x/2)} - \frac{\sin(p+1+1/2)x}{\sin(x/2)}\right| \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|\sin(x/2)|} \\
&= \frac{1}{|\sin(x/2)|}.
\end{aligned}$$

(ii) L'identità di Abel (si veda [13] Lemma 1.1 pag. 453), garantisce che per due successioni di numeri complessi (a_k) e (b_k), posto $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k),$$

da cui segue facilmente che se $p \leq q$ sono due numeri naturali, allora

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = a_q B_q - a_p B_{p-1} - \sum_{k=p}^{q-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Perciò, fissato $x \in \mathbb{R}$, usando (i) e la decrescenza della successione c_p, si trova

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=p}^{q} c_k e^{ikx} \right| &= \left| c_q \sum_{k=0}^{q} e^{ikx} - c_p \sum_{k=0}^{p-1} e^{ikx} - \sum_{k=p}^{q-1} \left[(c_{k+1} - c_k) \sum_{h=0}^{k} e^{ikx} \right] \right| \\
&\leq \frac{c_q}{|\sin(x/2)|} + \frac{c_p}{|\sin(x/2)|} + \frac{c_p - c_q}{|\sin(x/2)|} \\
&= \frac{2c_p}{|\sin(x/2)|}.
\end{aligned}$$

(iii) Cominciamo con l'osservare che, grazie a (ii), si ha

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=p}^{q} c_k \sin nx \right| &= \left| \sum_{k=p}^{q} c_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left| \sum_{k=p}^{q} c_k e^{ikx} \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{k=p}^{q} c_k e^{-ikx} \right| \\
&\leq \frac{2c_p}{|\sin(x/2)|}.
\end{aligned}$$

Possiamo supporre che $0 < x < \pi$ e poniamo $m = \min\{N, [\pi/x]\}$. Dividiamo la somma in due parti. Per la prima si ottiene

$$\left| \sum_{n=1}^{m} c_n \sin nx \right| \leq \sum_{n=1}^{m} c_n nx \leq Amx \leq A\frac{\pi}{x} \cdot x = A\pi.$$

Per quanto riguarda la seconda parte, poiché $x/2 \in (0, \pi/2)$, per convessità si ha $\sin(x/2) \geq x/\pi$. Perciò

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=m+1}^{N} c_n \sin nx \right| &\leq \frac{2c_{m+1}}{\sin(x/2)} \\
&\leq 2c_{m+1} \cdot \frac{\pi}{x} \leq 2c_{m+1} \cdot (m+1) \\
&\leq 2A,
\end{aligned}$$

dove nella seconda disuguaglianza abbiamo usato (ii). Perciò si ha la tesi.

$\square$

Consideriamo ora due interi $p \geq q \geq 1$ e consideriamo il polinomio trigonometrico

$$\begin{aligned}
t_{p,q}(x) &= \frac{\cos(p-q)x}{q} + \frac{\cos(p-(q-1))x}{q-1} + \cdots + \frac{\cos(p-1)x}{1} - \\
&\quad - \frac{\cos(p+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos(p+(q-1))x}{q-1} - \frac{\cos(p+q)x}{q} \\
&= \sum_{s=0}^{q-1} \frac{\cos[p-(q-s)]x}{q-s} - \sum_{s=0}^{q-1} \frac{\cos[p+(q-s)]x}{q-s} \\
&= 2 \sin px \sum_{k=1}^{q} \frac{\sin kx}{k},
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Werner. In virtù del Lemma 3(iii), i polinomi $t_{p,q}$ sono uniformemente limitati.

Supponiamo ora che $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ siano successioni di interi che verifichino:

$$\begin{cases} 1 \leq q_k \leq p_k \\ p_k + q_k < p_{k+1} - q_{k+1}, \end{cases}$$

e supponiamo poi che $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ sia una successione di numeri complessi tali che

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < +\infty \\ \liminf_{k\to+\infty} |\alpha_k| \log q_k > 0. \end{cases}$$

Tali successioni esistono: ad esempio si può prendere

$$p_k = 2^{k^3+1}, \qquad q_k = 2^{k^3}, \qquad \alpha_k = k^{-2}.$$

Indichiamo con I_k gli intervalli di interi definiti da

$$I_k = [p_k - q_k, p_k + q_k] \cap \mathbb{N},$$

che, per le ipotesi fatte sulle successioni (p_k) e (q_k), sono a due a due disgiunti, e sia $I = \bigcup_{r=1}^{+\infty} I_r$.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, t_{p_k,q_k}(x).$$

Per l'ipotesi fatta sugli α_k e per la uniforme limitatezza dei polinomi t_{p_k,q_k}, la serie converge uniformemente, perciò la funzione è ben definita e continua. Inoltre, per convergenza uniforme, possiamo calcolare i coefficienti di Fourier termine a termine. In particolare, se scriviamo la serie di Fourier come

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{+\infty}(a_r(f)\cos(rx) + b_n(f)\sin(rx)),$$

allora

$$a_r(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(rx)dx = \lim_{M\to+\infty}\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha_k}{\pi}\int_0^{2\pi} t_{p_k,q_k}(x)\cos(rx)dx,$$

$$b_r(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(rx)dx = \lim_{M\to+\infty}\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha_k}{\pi}\int_0^{2\pi} t_{p_k,q_k}(x)\sin(rx)dx.$$

Siccome i t_{p_k,q_k} sono polinomi nel coseno, si ha $b_r = 0$. Mentre per a_r, il solo contributo non nullo proviene dal termine

$$\int_0^{2\pi} t_{p_k,q_k}(x)\cos(rx)dx$$

tale che il polinomio trigonometrico t_{p_k,q_k} contiene il termine $\cos(rx)$ e quindi si trova

$$a_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \notin I \\ \frac{\alpha_k}{p_k - r} & \text{se } r = p_k - (q_k - s), \text{ dove } s \in \{0, \dots, q_k - 1\} \\ -\frac{\alpha_k}{p_k - r} & \text{se } r = p_k + (q_k - s), \text{ dove } s \in \{0, \dots, q_k - 1\} \end{cases}$$

Allora, se prendiamo le somme parziali e le valutiamo in zero, otteniamo

$$\begin{aligned} |S_{p_k+q_k}(f)(0) - S_{p_k}(f)(0)| &= \left|\sum_{r=p_k+1}^{p_k+q_k}\alpha_k\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q_k}\right)\right| \\ &= |\alpha_k|\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q_k}\right), \end{aligned}$$

quindi,

$$|S_{p_k+q_k}(f)(0) - S_{p_k}(f)(0)| > |\alpha_k| \log q_k.$$

Perciò se si scelgono i numeri α_k in modo che $\limsup_{k\to+\infty}|\alpha_k|\log q_k = +\infty$ ne segue che le somme di Fourier di f non sono limitate nell'origine.

1.2 Risultati preliminari

In questo paragrafo, raggruppiamo alcuni risultati che ci serviranno nel seguito. Il primo di essi ci permette di stimare la velocità di convergenza delle somme di Fejér.

Lemma 4. *Sia θ una funzione lipschitziana su $\mathbb{T}$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in \mathbb{T}$. Supponiamo che $\|\theta'\|_\infty \leq n$ e che $\theta(x) = 0$. Sussistono le seguenti disuguaglianze:*

(i) $|\sigma_n\theta(x)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\|\theta\|_\infty$ *per ogni* $n \geq 8$,

(ii) $|\sigma_n\theta(x)| \leq 4 + \frac{1}{4}\|\theta\|_\infty$ *per ogni* $n \geq 4$.

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che basta dimostrare la tesi per $x = 0$. Supponiamo infatti di aver dimostrato la tesi per una funzione η come nelle ipotesi con $x = 0$. Consideriamo poi $x \neq 0$ e sia θ la funzione traslata $\theta(t) = \eta(t-x)$, per cui $\theta(x) = 0$. Ora, siccome vale la formula $\hat{\theta}(j) = e^{-2\pi ijx}\hat{\eta}(j)$, allora

$$S_k\theta(t) = \sum_{|j|\leq k} \hat{\theta}(j)e^{2\pi jt} = \sum_{|j|\leq k} \hat{\eta}(j)e^{2\pi ij(t-x)} = S_k\eta(t-x).$$

Dunque la somma di Fejér

$$\sigma_n\theta(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k\theta(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k\eta(t-x) = \sigma_n\eta(t-x).$$

Perciò $|\sigma_n\theta(x)| = |\sigma_n\eta(0)|$ e qui vale la tesi.

Quindi basta dimostrare la tesi per $x = 0$, cioè si tratta di stimare

$$\sigma_n\theta(0) = \int_0^1 \theta(y)F_n(y) = \int_{-1/2}^{1/2} \theta(y)F_n(y)dy,$$

dove l'uguaglianza segue dalla 1-periodicità delle funzioni θ e F_n.
Procederemo nel seguente modo: divideremo l'integrale in due parti, una "lontana" da 0, dove potremo liberarci dalla presenza del seno al denominatore e che ci darà la parte di dipendenza da $\|\theta\|_\infty$; l'altra, che comprende 0, che maggioreremo con una costante. Siano allora $\delta \in (0, 2]$ e $n \geq 4$: i due insiemi in cui spezzeremo l'integrale saranno $\{y : \frac{\delta}{n} < |y| \leq \frac{1}{2}\}$ e l'intervallo $[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}]$. Nell'intervallo $0 \leq y \leq 1/2$ la funzione $\sin(\pi y)$ è concava, per cui $\sin(\pi y) \geq 2y$; utilizzando la parità della funzione F_n, possiamo utilizzare questa disuguaglianza nel primo insieme, quello lontano da 0, e quindi ottenere

$$0 \leq F_n(y) = \frac{\sin^2(n\pi y)}{n\sin^2(\pi y)} \leq \frac{1}{n(2y)^2} = \frac{1}{4ny^2},$$

se $\frac{\delta}{n} < |y| \le \frac{1}{2}$. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\{y:\delta/n<|y|\le 1/2\}} \theta(y) F_n(y) dy \right| &\le \int_{\{y:\delta/n<|y|\le 1/2\}} |\theta(y)|\, |F_n(y)| dy \\
&\le \|\theta\|_\infty \int_{\{y:\delta/n<|y|\le 1/2\}} |F_n(y)| dy \\
&= 2\|\theta\|_\infty \int_{\{y:\delta/n<y\le 1/2\}} |F_n(y)| dy \\
&\le \frac{2\|\theta\|_\infty}{4n} \int_{\{y:\delta/n<y\le 1/2\}} \frac{dy}{y^2} \\
&\le \frac{1}{2n} \|\theta\|_\infty \int_{\delta/n}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \\
&= \frac{\|\theta\|_\infty}{2n} \cdot \frac{n}{\delta} = \frac{\|\theta\|_\infty}{2\delta}.
\end{aligned}$$

Nell'altro insieme, siccome θ è lipschitziana, per il teorema di Lagrange $|\theta(y)| = |\theta(y) - \theta(0)| \le \|\theta'\|_\infty \cdot |y| \le n\,|y|$. Qui non riusciamo ad eliminare la dipendenza da n. Si ha:

$$\left| \int_{-\delta/n}^{\delta/n} \theta(y) F_n(y) dy \right| \le 2 \int_0^{\delta/n} \left(\frac{\sin(n\pi y)}{\sin(\pi y)} \right)^2 y\, dy.$$

Per i nostri scopi, basterà dimostrare la decrescenza della successione

$$u_n = 2 \int_0^{\delta/n} \left(\frac{\sin(n\pi y)}{\sin(\pi y)} \right)^2 y\, dy$$

e quindi maggiorare l'integrale a seconda del valore n da cui partiremo (4 per (i) e 8 per (ii)). Utilizzando prima un cambio di variabili $y = \frac{n}{n+1}\, z$ e poi ancora la disuguaglianza di convcavità $\sin\left(\frac{n}{n+1}\, \pi z\right) \ge \frac{n}{n+1}\, \sin(\pi z)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{2} &= \int_0^{\delta/n+1} \left(\frac{\sin[(n+1)\pi y]}{\sin(\pi y)} \right)^2 y\, dy \\
&= \int_0^{\delta/n} \left(\frac{\sin(n\pi z)}{\sin\left(\frac{n}{n+1}\pi z\right)} \right)^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 z\, dz \\
&\le \int_0^{\delta/n} \frac{\sin^2(n\pi z)}{\sin^2(\pi z) \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 z\, dz \\
&= \int_0^{\delta/n} \left(\frac{\sin(n\pi z)}{\sin(\pi z)} \right)^2 z\, dz \\
&= \frac{u_n}{2}.
\end{aligned}$$

Scegliamo $\delta = 1$ e $n = 8$ e, usando il programma Matlab, calcoliamo una approssimazione numerica di u_8, utilizzando per la quadratura i due metodi disponibili di default `quad` e `quald`, come in figura.

```
>> r=quad('2.*((sin(8.*pi.*x)./sin(pi.*x)).^2).*x',0,1/8);
>> r

r =

    0.2496

>>  r=quadl('2.*((sin(8.*pi.*x)./sin(pi.*x)).^2).*x',0,1/8);
>> r

r =

    0.2496
```

Si trova dunque che $u_8 = 0.2496... \leq \frac{1}{4}$, quindi $|\sigma_n\theta(x)| \leq \frac{\|\theta\|_\infty}{2} + \frac{1}{4}$ per $n \geq 8$ e questo prova (i).
Per provare (ii) utilizziamo che il massimo di F_n è $F_n(0) = n$ e quindi $\frac{\sin(n\pi z)}{\sin(\pi z)} \leq n^2$. Scegliamo $\delta = 2$, dunque

$$|u_n| = 2\int_0^{\delta/n} \left(\frac{\sin(n\pi y)}{\sin(\pi y)}\right)^2 y dy \leq n^2 \int_0^{2/n} y dy = 4,$$

da cui $|\sigma_n\theta(x)| \leq \frac{\|\theta\|_\infty}{4} + 4$ per $n \geq 8$.

$\square$

Veniamo ora ad enunciare il secondo risultato, che invece ci permetterà di costruire insiemi di divergenza con dimensione di Hausdorff grande. Questo teorema, di dimostrazione complicata, è dovuto a Beresnevich e Velani [4].

Teorema 5 (Principio di trasferimento della massa). *Sia $(x_n)_{n\geq 0}$ una successione di punti in $[0,1]^d$e sia $(r_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri positivi reali decrescenti a zero. Sia inoltre $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione dimensione tale che $s^{-d}\phi$ sia monotona e $s^{-d}\phi \longrightarrow +\infty$ per $s \longrightarrow 0$. Definiamo*

$$E = \limsup_n B(x_n, r_n)$$

$$E^\phi = \limsup_n B(x_n, \phi^{-1}(r_n^d))$$

e supponiamo che quasi ogni punto di $[0,1]^d$ (nel senso della misura di Lebesgue) giaccia in E. Allora, $\mathcal{H}^\phi(E^\phi) = +\infty$.

Questo teorema ci serve per il seguente corollario, che è quello che useremo nel seguito:

Corollario 6. *Sia (q_n) una successione di interi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $k \leq q_n$, sia $B_{k,n} = B(x_{k,n}, r_{k,n})$ la palla di centro $x_{k,n} \in [0,1]^d$ e con raggio $r_{k,n}$ tale che $\lim_{n\to\infty} \max_k(r_{k,n}) = 0$. Sia poi $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione dimensione tale che $s^{-d}\phi$ sia monotona e $s^{-d}\phi \longrightarrow +\infty$ per $s \longrightarrow 0$. Definiamo*

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{q_n} B_{k,n} \qquad E = \limsup_n B_n$$

$$B_n^\phi = \bigcup_{k=1}^{q_n} B_n^\phi \qquad E^\phi = \limsup_n B_n^\phi.$$

Supponiamo che quasi ogni punto di $[0,1]^d$ (nel senso della misura di Lebesgue) stia in E. Allora $\mathcal{H}^\phi(E^\phi) = +\infty$.

Dimostrazione. Riordiniamo le successioni $(B_{k,n})$ e $(B_{k,n}^\phi)$ come (C_j) e (C_j^ϕ), possiamo osservare che

$$\limsup_n B_n = \limsup_j C_j = E$$

$$\limsup_n B_n^\phi = \limsup_j C_j^\phi = E^\phi.$$

Quindi il corollario segue direttamente dal teorema 5.

□

Richiamiamo poi il lemma di ricoprimento di Vitali di cui faremo largo uso, la cui dimostrazione si trova ad esempio in [5] (teorema 4.8 pag. 60).

Teorema 7 (Lemma di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $\mathscr{B}$ una famiglia di palle in $\mathbb{R}^n$ contenute in una regione limitata. Allora esiste una sottofamiglia numerabile $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, detta* sottoricoprimento di Vitali*, tale che*

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{4B_n} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 5B_n,$$

dove, con una notazione imprecisa, indichiamo con αB_n la palla concentrica a B_n e di raggio α volte il raggio di B_n.

Infine, un altro risultato che utilizzeremo è la disuguaglianza di Bernstein.

Disuguaglianza di Bernstein

Come prima cosa, dimostriamo il seguente classico risultato:

Lemma 8. *Un polinomio trigonometrico di grado n, $P = \sum_{|k|\leq N} c_k e^{ikx}$ ha al più $2n$ zeri in $[0, 2\pi)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da

$$Q(z) = z^{-N} \sum_{|k|\leq N} c_k z^{N+k} = z^{-N} p(z),$$

dove $p(z) = \sum_{|k|\leq N} c_k z^{N+k}$. Allora è chiaro che $P(x)$ è la restrizione di $Q(z)$ alla circonferenza unitaria in $\mathbb{C}$, $T = \{|z| = 1\}$. Ora, per il teorema fondamentale dell'algebra, $p(z)$ ammette al più $2N$ radici in $\mathbb{C}$ e quindi, a maggior ragione, al più $2N$ radici in T. Poiché z^{-N} è non nullo in T, l'equazione sopra ci dice che $Q(z)$ ha al più $2N$ zeri in T, che è la tesi. □

Veniamo ora alla disuguaglianza.

Proposizione 9 (Disuguaglianza di Bernstein)**.** *Se $P = \sum_{|k|\leq N} c_k e^{ikx}$ è un polinomio trigonometrico di grado al più N, allora*

$$\|P'\|_\infty \leq N\|P\|_\infty.$$

Dimostrazione. Poniamo $M = \|P\|_\infty$ e $L = \frac{1}{N}\|P'\|_\infty$. Siccome la funzione reale $x \mapsto |P'(x)|$ assume massimo in $[0, 2\pi]$, possiamo supporre, a meno di traslazioni, che tale massimo sia raggiunto in 0; inoltre, a meno di una rotazione, possiamo anche supporre che $P'(0)$ sia reale e positivo. In definitiva, cioè, possiamo assumere che $P'(0) = NL$ senza ledere la generalità.

La tesi allora è $M \geq L$. Suppponiamo allora per assurdo che $M < L$ e consideriamo la funzione

$$S(x) = L \sin(Nx) - \Re e\, P(x).$$

Dimostreremo i seguenti fatti:

(i) $(-1)^r S\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) > 0$ per $r \in \{0, \dots, 2N-1\}$;

(ii) S e S' hanno $2N$ zeri distinti in $(0, 2\pi)$;

(iii) $S'(0) = 0$ e $S''(0) = 0$;

(iv) S'' ha più di $2N$ zeri distinti in $[0, 2\pi)$.

Cominciamo con (i). Si ha

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) &= L\sin\left(N\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) - \Re e\, P\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) \\
&= (-1)^r L - \Re e\, P\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right),
\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}
(-1)^r S\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) &= L + (-1)^{r+1}\Re e\, P\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) \\
&\geq L - \Re e\, P\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}\right) \\
&> L - M > 0.
\end{aligned}$$

(ii) Siccome $S(0) = S(2\pi)$, possiamo considerare la funzione S sulla circonferenza $T = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Per il punto (i), la funzione S cambia segno in ogni intervallo $\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}, \frac{(2(r+1)+1)\pi}{2N}\right)$ di T, per $r \in \{0, \dots, 2N-1\}$. Quindi, per il teorema degli zeri, ha almeno uno zero all'interno di ciascun intervallo, quindi S ha almeno $2N$ zeri distinti in $[0, 2\pi)$ ciascuno in $\left(\frac{(2r+1)\pi}{2N}, \frac{(2(r+1)+1)\pi}{2N}\right)$, per $r \in \{0, \dots, 2N-1\}$. Applicando allora il teorema di Rolle a ciascuno zero, otteniamo anche $2N$ zeri distinti per S'.

(iii) Siccome $S'(x) = NL\cos(Nx) - P'(x)$, per l'ipotesi fatta per $x = 0$, si ha $S'(0) = NL - NL = 0$. Inoltre, poiché la funzione $x \mapsto P'(x)$ ha massimo in zero, allora $P''(0) = 0$, quindi $S''(0) = 0 - P''(0) = 0$.

(iv) Applicando, come in (ii), il teorema di Rolle agli zeri di S', otteniamo uno zero all'interno di ciascun intervallo aperto che ha come estremi due zeri consecutivi di S'. Quindi otteniamo $2N$ zeri distinti di S''. Poiché $S'(0) = 0$, abbiamo due possibilità: o $x = 0$ era uno dei $2N$ zeri trovati con il teorema di Rolle in (ii), oppure è un $2N + 1$-esimo zero di S'. Nel secondo caso, otteniamo, usando ancora il teorema di Rolle, anche $2N + 1$ zeri di S''; nel primo caso, $x = 0$ sicuramente non è uno dei $2N$ zeri che si trovano applicando il teorema di Rolle a S'. In entrambi i casi troviamo $2N + 1$ zeri distinti.

Perciò abbiamo ottenuto che S'', pur essendo un polinomio trigonometrico di grado N, ha $2N + 1$ zeri distinti. Questo è in contraddizione con il lemma 8, per cui abbiamo trovato un assurdo. Quindi $L \leq M$ come volevamo.

$\square$

1.3 Funzione di saturazione

Vogliamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 10. *Siano* $1 < p < +\infty$ *e* $\beta \in [0, 1/p]$*. Per ogni* f *in* $L^p(\mathbb{T})$*, ad eccezione di un insieme* B *di prima categoria in* $L^p(\mathbb{T})$*, risulta* $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$.

Tenendo in mente questo obiettivo costruiremo, per ogni $\beta \in [0, 1/p]$, dapprima una funzione g che verifica le tesi, cioè una funzione $g \in L^p(\mathbb{T})$ per cui $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, g)) = 1 - \beta p$. In corrispondenza di tale funzione, l'insieme $E(\beta, g)$ è più grande possibile (in virtù del teorema di Aubry, teorema 2), pertanto la chiameremo *funzione di saturazione.* La funzione g che cerchiamo sarà tale che le sue n-esime somme di Fourier saranno grandi nei punti "vicini" a numeri diadici.
Per prima cosa cerchiamo di formalizzare il concetto di "vicinanza" a numeri diadici.

Definizione 1. Un numero reale x si dice *α-approssimabile da diadici,* $\alpha \geq 1$, se esistono due successioni di interi (k_n) e (j_n) tali che

$$\left| x - \frac{k_n}{2^{j_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha j_n}}$$

e (j_n) tende all'infinito. L'*esponenente diadico di* x è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri reali α tali che x è α-approssimabile da diadici.

Se chiamiamo

$$I^{\alpha}_{k,j} = \left[\frac{k}{2^j} - \frac{1}{2^{\alpha j}}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{\alpha j}} \right].$$

possiamo osservare che per $\alpha = 1$, per ogni j, al variare di $k \in \mathbb{Z}$ questi intervalli sono un ricoprimento di $\mathbb{R}$. Pertanto ogni numero reale è sempre 1-approssimabile da diadici e quindi l'esponente diadico sarà sempre almeno 1. In generale, se $\alpha > 1$, invece gli $I^{\alpha}_{k,j}$ non ricoprono la retta reale e quindi, in generale, non possiamo stabilire se un numero sia α-approssimabile da diadici. Sicuramente possiamo dirlo in un caso banale: ogni numero diadico è approssimabile da diadici. Sia infatti $x = \frac{k}{2^j}$ dove $k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$; allora basta prendere $j_n = j + n$ e $k_n = k2^n$ per ogni n e si ha

$$\left| \frac{k}{2^j} - \frac{k2^n}{2^{j+n}} \right| = 0 \leq \frac{1}{2^{\alpha(j+n)}},$$

per ogni $\alpha \geq 1$. Quindi l'esponente diadico è in questo caso $+\infty$.

Denoteremo con

$$D_\alpha = \{x \in [0,1] : x \text{ è } \alpha\text{-approssimabile da diadici}\}.$$

È facile verificare che $\mathcal{H}^\beta(D_\alpha) = 0$ per $\beta > 1/\alpha$. Infatti

$$D_\alpha \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{2^j} \left[\frac{k}{2^j} - \frac{1}{2^{\alpha j_n}}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{\alpha j_n}}\right]$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\beta(D_\alpha) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j} 2\left(\frac{1}{2^{\alpha j_n}}\right)^\beta \\ &= 2\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^j \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\alpha\beta} = 2\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{j(1-\alpha\beta)}\end{aligned}$$

e questa serie è convergente per $\alpha\beta > 1$, ossia $\beta > 1/\alpha$. Perciò $\dim_{\mathcal{H}}(D_\alpha) \leq 1/\alpha$.
Grazie al corollario 6 otteniamo anche la disuguaglianza opposta. Infatti, D_α può essere descritto come

$$D_\alpha = \limsup_{j\to\infty} \bigcup_{k=0}^{2^j} I_{k,j}^\alpha$$

dove $I_{k,j}$ sono gli intervalli diadici

$$I_{k,j} = \left[\frac{k}{2^j} - \frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^j}\right]$$

e

$$I_{k,j}^\alpha = \left[\frac{k}{2^j} - \frac{1}{2^{\alpha j}}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{\alpha j}}\right].$$

Poiché $\bigcup_{k=0}^{2^j-1} I_{k,j} \supset [0,1]$, il corollario 6 implica che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha) = +\infty$ e perciò $\dim_{\mathcal{H}}(D_\alpha) = 1/\alpha$.

Ciò che vogliamo fare è costruire la funzione di saturazione in modo che il suo indice di divergenza in un punto x dipenda da quanto x è “vicino” ad un numero diadico, ossia in termini formali, dal suo esponente diadico in x: in particolare vogliamo che più grande è il suo esponente diadico e più grande sia il suo indice di divergenza.

A questo scopo sarà utile classificare gli intervalli diadici a partire dai loro centri. Facciamo variare $J \in \mathbb{N}$: ad ogni passo J i centri sono definiti da

$$\mathcal{I}_J = \{K/2^J : K \notin 2\mathbb{Z}, 1 \leq K \leq 2^J - 1\};$$

in particolare, secondo la nostra definizione, al passo J abbiamo $\frac{2^J}{2} = 2^{J-1}$ centri che distano a due a due $\frac{2}{2^J} = \frac{1}{2^{J-1}}$.Pertanto più grandi sono i centri e più essi sono numerosi e vicini fra loro.
Adesso, per ogni $j \geq J$ definiamo

$$\mathbf{I}_{J,j} = \bigcup_{\frac{k}{2^j} \in \mathcal{I}_J} I_{k,j} \quad \text{e} \quad \mathbf{I'}_{J,j} = \bigcup_{\frac{k}{2^j} \in \mathcal{I}_J} 2I_{k,j},$$

perciò mentre J seleziona il centro, j seleziona l'ampiezza dell'intervallo, $\frac{2}{2^j} = \frac{1}{2^{j-1}}$ nel caso di $\mathbf{I}_{J,j}$ e $\frac{4}{2^j} = \frac{1}{2^{j-2}}$ nel caso di $\mathbf{I'}_{J,j}$. In particolare, osserviamo che se $j = J$, l'ampiezza degli intervalli $\mathbf{I}_{j,j}$ è pari alla distanza di due centri e quindi

$$\mathbf{I}_{J,J} = \bigcup_{\frac{k}{2^J} \in \mathcal{I}_J} I_{k,J} = \bigcup_{k \notin 2\mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2^j - 1} \left[\frac{k}{2^J} - \frac{1}{2^J}, \frac{k}{2^J} + \frac{1}{2^J}\right] = [0,1].$$

Invece, $\mathbf{I}_{J,j}$ copre l'intervallo [0,1] se $j = J$ (nel qual caso gli intervalli si sovrappongono a due a due su sottointervalli propri) oppure $j = J + 1$. Quando $j \geq J + 1$ allora le misure degli insiemi $\mathbf{I}_{J,j}$ e $\mathbf{I'}_{J,j}$ sono

$$|\mathbf{I}_{J,j}| = 2^{J-1} \cdot \frac{1}{2^{j-1}} = 2^{J-j} \text{ e } |\mathbf{I'}_{J,j}| = 2^{J-1} \cdot \frac{1}{2^{j-2}} = 2^{J-j+1}. \qquad (1.1)$$

Facciamo qualche esempio numerico.

Esempio 1. Scegliamo $J = 3$ e scriviamoci per esempio $\mathbf{I}_{3,4}, \mathbf{I'}_{3,4}$ e $\mathbf{I}_{3,5}, \mathbf{I'}_{3,5}$. Innanzi tutto

$$\mathcal{I}_3 = \left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\},$$

quindi gli elementi $\frac{k}{2^4} \in \mathcal{I}_3$ sono $\frac{2}{16}, \frac{6}{16}, \frac{10}{16}, \frac{14}{16}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{3,4} &= I_{2,4} \cup I_{6,4} \cup I_{10,4} \cup I_{14,4} \\ &= \left[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right] \cup \left[\frac{5}{16}, \frac{7}{16}\right] \cup \left[\frac{9}{16}, \frac{11}{16}\right] \cup \left[\frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{I'}_{3,4} &= 2I_{2,4} \cup 2I_{6,4} \cup 2I_{10,4} \cup 2I_{14,4} \\
&= \left[\frac{0}{16}, \frac{4}{16}\right] \cup \left[\frac{4}{16}, \frac{8}{16}\right] \cup \left[\frac{8}{16}, \frac{12}{16}\right] \cup \left[\frac{12}{16}, \frac{17}{16}\right] \\
&= \left[0, \frac{17}{16}\right].
\end{aligned}$$

Come già osservato, siccome 3 e 4 sono consecutivi, $\mathbf{I'}_{3,4}$ copre tutto [0,1].

Calcoliamo ora $\mathbf{I}_{3,5}$ e $\mathbf{I'}_{3,5}$. Osserviamo che gli elementi $\frac{k}{2^5} \in \mathcal{I}_3$ sono $\frac{4}{32}, \frac{12}{32}, \frac{20}{32}, \frac{28}{32}$. Allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{3,5} &= I_{4,5} \cup I_{12,5} \cup I_{20,5} \cup I_{28,5} \\
&= \left[\frac{3}{32}, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{11}{32}, \frac{13}{32}\right] \cup \left[\frac{19}{32}, \frac{21}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, \frac{29}{32}\right].
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{I'}_{3,5} &= 2I_{4,5} \cup 2I_{12,5} \cup 2I_{20,5} \cup 2I_{28,5} \\
&= \left[\frac{2}{32}, \frac{6}{32}\right] \cup \left[\frac{10}{32}, \frac{14}{32}\right] \cup \left[\frac{18}{32}, \frac{22}{32}\right] \cup \left[\frac{26}{32}, \frac{30}{32}\right].
\end{aligned}$$

Notiamo quindi, come già osservato, che con valore fissato $J = 3$ e variando $j \geq J$, i centri rimangono gli stessi, cioè quelli di $\mathcal{I}_3$, ma i raggi degli intervalli diminuiscono, essendo, al passo j, $\frac{1}{2^j}$. Le misure di $\mathbf{I}_{3,5}$ e di $\mathbf{I'}_{3,5}$ sono $4 \cdot \frac{2}{32} = \frac{1}{4}$ e $4 \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{2}$, come si ottiene dalle formule (1.1).

Il prossimo passo è quello di costruire dei polinomi trigonometrici g_j, al variare di j, che abbiano norma L^p non superiore a 1 e che siano sufficientemente grandi sugli insiemi diadici $\mathbf{I}_{J,j}$. Questo basterà ad ottenere minorazioni sulle somme di Fourier.

Prima di farlo, introduciamo una definizione:

Definizione 2. Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$. Chiameremo *spettro* di f, e scriveremo $\text{spec}(f)$, l'insieme dei valori interi k i cui corrispondenti coefficienti di Fourier c_k siano non nulli, ossia

$$\text{spec}(f) = \left\{ k \in \mathbb{Z} : c_k = \hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k t} \neq 0 \right\}.$$

Osservazione 11. Siccome per ogni funzione f si ha che

$$\langle e_h f, e_k \rangle = \langle f, e_{k-h} \rangle,$$

lo spettro di $e_h f$ si ottiene dallo spettro di f per traslazione: se $\text{spec}(f) \subset [k_1, k_2] \cap \mathbb{Z}$ allora $\text{spec}(f) \subset [k_1 + h, k_2 + h] \cap \mathbb{Z}$.

Osservazione 12. La n-esima somma di Fourier di $f \in L^1(\mathbb{T})$, e quindi anche la $(n+1)$-esima somma di Fejér definisce un polinomio trigonometrico di grado n e pertanto con spettro contenuto in $[-n, n]$.

A questo punto siamo pronti per enunciare il seguente lemma:

Lemma 13. *Sia $j \geq 1$. Esiste un polinomio trigonometrico $g_j \in L^p(\mathbb{T})$ con spettro contenuto in $[0, j2^{j+1})$ tale che*

(i) $\|g_j\|_p \leq 1$;

(ii) *per ogni $1 \leq J \leq j$ e ogni $x \in \mathbf{I}_{J,j}$ esistono due interi n_1 e n_2 tali che $0 \leq n_1 < n_2 < j2^{j+1}$ e tali che*

$$|S_{n_2} g_j(x) - S_{n_1} g_j(x)| \geq \frac{1}{4j} 2^{(j-J-1)/p}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un intero J un intero tale che $1 \leq J \leq j$ e consideriamo una funzione $\chi_{J,j}$ lineare a tratti, che valga 1 su $\mathbf{I}_{J,j}$, 0 sul complementare di $\mathbf{I'}_{J,j}$ e verifichi $0 \leq \chi_{J,j} \leq 1$ e $\|\chi'_{J,j}\|_\infty \leq 2^j$. Una tale funzione esiste sempre, basta considerare la funzione identicamente 1 su $\mathbf{I}_{J,j}$, 0 sul complementare di $\mathbf{I'}_{J,j}$ e che si raccorda con linearità fra gli estremi degli intervalli corrispondenti.
Siamo in grado di stimare la norma L^p di una generica funzione $\chi_{J,j}$, perché, grazie a (1.1) si ha $\|\chi_{J,j}\|_p^p \leq \int_{\mathbf{I'}_{J,j}} |\chi_{J,j}(t)|^p \, dt \leq |\mathbf{I'}_{J,j}| = 2^{J-j+1}$, per cui $\|\chi_{J,j}\|_p \leq 2^{(J-j+1)/p}$.

Utilizziamo le $\chi_{J,j}$ per ottenere polinomi trigonometrici $g_{J,j}$ con spettro contenuto in opportuni intervalli:

$$g_{J,j} = e_{(2J-1)2^j} \sigma_{2^j} \chi_{J,j}.$$

In base a quanto osservato nell'osservazione 12, lo spettro di $\sigma_{2^j} \chi_{J,j}$ varia in $[-2^j + 1, 2^j - 1]$ e quindi, in base all'osservazione 12, lo spettro di $g_{J,j}$ varia fra

$$n_{J,j} = (2J-1)2^j - 2^j + 1 = (2J-1)2^j - (2^j - 1)$$

e

$$m_{J,j} = (2J-1)2^j + 2^j - 1 = (2J-1)2^j + (2^j - 1).$$

Pertanto lo spettro di $g_{J,j}$ è contenuto in un intervallo di centro $(2J-1)2^j$ e raggio $2^j - 1$. In particolare, al variare di J, gli intervalli $[n_{J,j}, m_{J,j}]$ non si sovrappongono mai, quindi, prendendo $H \neq J$, gli spettri di $g_{H,j}$ e di $g_{J,j}$ sono disgiunti.

Vogliamo ottenere g_j come combinazione lineare dei polinomi trigonometrici $g_{J,j}$, cioè come

$$g_j = \sum_{J=1}^{j} c_{J,j} g_{J,j}.$$

In tal caso infatti otteniamo che lo spettro di g_j è contenuto in $\bigcup_{J=1}^{j} \operatorname{spec}(g_{J,j})$, che è contenuto in $[n_{1,j}, m_{j,j}] = [1, j2^{j+1} - 1]$ che a sua volta è contenuto in $[0, j2^{j+1})$ come richiesto.

Per ottenere $\|g_j\|_p \leq 1$ dobbiamo prima stimare le norme di $g_{J,j}$.
Come già osservato, $\mathbf{I}_{j,j} = [0, 1]$; quindi $\chi_{j,j}$ è la funzione costante 1 e pertanto $\sigma_n \chi_{j,j} = \sigma_n 1 = e_0$ da cui

$$\|g_{j,j}\|_p^p = \|e_{(2j-1)2^j} e_0\|_p^p = \int_0^1 \left| e^{2\pi i((2j-1)2^j)t} \right|^p dt = 1.$$

Invece, se $1 \leq J < j$,

$$\begin{aligned}
\|g_{J,j}\|_p &= \left(\int_0^1 \left| e^{2\pi i((2j-1)2^j)t} \sigma_{2^j} \chi_{J,j}(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_0^1 |\sigma_{2^j} \chi_{J,j}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \|\sigma_{2^j} \chi_{J,j}\|_p \\
&= \|\chi_{J,j} * F_{2^j}\|_p \leq \|\chi_{J,j}\|_p \|F_{2^j}\|_1 = \|\chi_{J,j}\|_p \cdot 1 \leq 2^{(J-j+1)/p}.
\end{aligned}$$

Perciò, se scegliamo $c_{J,j} = \frac{1}{j} 2^{(j-J-1)/p}$, si trova

$$\|g_j\|_p \leq \sum_{J=1}^{j} |c_{J,j}| \, \|g_{J,j}\|_p = \sum_{J=1}^{j} \frac{1}{j} \, 2^{(j-J-1)/p} \, \|g_{J,j}\|_p \leq 1$$

e cioè g_j verifica (i).

Vediamo ora se tali polinomi verificano anche (ii) e dunque fissiamo $x \in \mathbf{I}_{J,j}$.
Abbiamo osservato prima che, se $H \neq J$, gli spettri di $g_{H,j}$ e di $g_{J,j}$ sono disgiunti; pertanto, per ogni J, la differenza delle somme di Fourier $S_{m_{J,j}} g_j - S_{n_{J,j}-1} g_j$, che tiene conto solo dei coefficienti di Fourier di g_j nell'intervallo $[n_{J,j}, m_{J,j}]$, seleziona solo il contributo di $g_{J,j}$ e lo seleziona tutto. In altre parole, osservando anche che $g_{J,j}$ essendo un polinomio trigonometrico

coincide con la sua serie di Fourier, si ha:

$$\begin{aligned}
|S_{m_{J,j}} g_j - S_{n_{J,j}-1} g_j| &= \left| \sum_{H=1}^{j} c_{H,j} (S_{m_{J,j}} g_{H,j} - S_{n_{J,j}-1} g_{H,j}) \right| \\
&= \left| c_{J,j} (S_{m_{J,j}} g_{J,j} - S_{n_{J,j}-1} g_{J,j} \right| \\
&= \left| c_{J,j} g_{J,j} \right| \\
&= \frac{1}{j} 2^{(j-J-1)/p} | \sigma_{2^j} \chi_{J,j} |.
\end{aligned}$$

Usiamo ora il fatto che $x \in \mathbf{I}_{J,j}$; per tale x, $\chi_{J,j}(x) = 1$ e quindi possiamo applicare la prima disuguaglianza del lemma 4 a $1 - \chi_{J,j}$ e troviamo

$$|\sigma_{2^j} \chi_{J,j}(x)| \geq 1 - |\sigma_{2^j}(1 - \chi_{J,j}(x))| \geq \frac{1}{4}.$$

Quindi,

$$|S_{m_{J,j}} g_j(x) - S_{n_{J,j}-1} g_j(x)| \geq \frac{1}{4j} 2^{(j-J-1)/p} \tag{1.2}$$

e la conclusione segue con $n_2 = m_{J,j}$ e $n_1 = n_{J,j}$.

□

Siamo ora pronti a costruire la funzione di saturazione. Poniamo

$$g = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} e_{j2^{j+1}} g_j.$$

Questa è una serie di funzioni totalmente convergente in $L^p(\mathbb{T})$, perché si maggiora con la serie $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2}$ che converge. Quindi g è ben definita come elemento di $L^p(\mathbb{T})$.
Osserviamo che, in base al lemma 13 e all'osservazione 12 gli spettri di $e_{j2^{j+1}} g_j$ sono disgiunti, essendo lo spettro di $e_{j2^{j+1}} g_j$ contenuto in $[j2^{j+1}, j2^{j+2})$.

Affinché g sia la funzione di saturazione, deve verificare la tesi del teorema 2. Ciò è vero, ma procediamo per passi.

Proposizione 14. *Sia $\alpha > 1$. Per ogni $x \in D_\alpha$,*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in D_\alpha$ e $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha - \varepsilon > 1$. Vogliamo scegliere opportunamente J e j tali che $x \in \mathbf{I}_{J,j}$ e in modo da poter sfruttare la disuguaglianza (ii) del lemma 13.

Per definizione di D_α, possiamo trovare due interi K e J, con J grande a piacere e $K \notin 2\mathbb{Z}$ tale che

$$\left| x - \frac{K}{2^J} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha J}}.$$

Posto $j = [\alpha J]$, si trova dunque

$$\left| x - \frac{K}{2^J} \right| \leq \frac{1}{2^j},$$

cioè possiamo affermare che $x \in \mathbf{I}_{J,j}$. Applicando allora il lemma 13 con questi valori di j e J, troviamo un polinomio trigonometrico g_j, con spettro in $[0, j2^{j+1})$ e due interi m_1 e m_2 tali che $0 \leq m_1 < m_2 < j2^{j+1}$ e tali che $|S_{m_2}g_j(x) - S_{m_1}g_j(x)| \geq \frac{1}{4j}2^{(j-J-1)/p}$. Pertanto la funzione $e_{j2^{j+1}}g_j$ che compare nella definizione di g, ha spettro contenuto in $[j2^{j+1}, j2^{j+2})$ e, posto $n_1 = m_1 + j2^{j+1}$ e $n_2 = m_2 + j2^{j+2}$, si ha $j2^{j+1} \leq n_1 < n_2 < j2^{j+2}$ e

$$\left| S_{n_2}e_{j2^{j+1}}g_j(x) - S_{n_1}e_{j2^{j+1}}g_j(x) \right| = |S_{m_2}g_j(x) - S_{m_1}g_j(x)| \geq \frac{1}{4j}2^{(j-J-1)/p}.$$

Adesso, ricordando che le funzioni che compongono g hanno spettri disgiunti, e che, per definizione di j, $J \leq \frac{j+1}{\alpha}$, si ha

$$\begin{aligned}
|S_{n_2}g(x) - S_{n_1}g(x)| &= \left| \sum_{h \geq 1} \frac{1}{h^2} \left(S_{n_2}(e_{h2^{h+1}}g_h)(x) - S_{n_1}(e_{h2^{h+1}}g_h)(x) \right) \right| \\
&= \frac{1}{j^2} \left| S_{n_2}(e_{j2^{j+1}}g_j)(x) - S_{n_1}(e_{j2^{j+1}}g_j)(x) \right| \\
&\geq \frac{1}{4j^3}\, 2^{(j-J-1)/p} \\
&\geq \frac{2^{-\frac{1}{p}}}{4j^3}\, 2^{\frac{1}{p}\left(j - \frac{j+1}{\alpha}\right)} = \frac{2^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha}}}{4j^3}\, 2^{\frac{j}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} \\
&\geq C 2^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\right)j},
\end{aligned}$$

per una costante $C > 0$. L'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione $j \mapsto j^3 2^{\frac{j}{p}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\right)}$ è infinitesima.

La disuguaglianza dice che per $n = n_1$ oppure per $n = n_2$, si ha $|S_n g(x)| \geq \frac{C}{2}2^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha-\varepsilon}\right)j}$. Perciò

$$\log |S_n g(x)| \geq \log \frac{C}{2} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha - \varepsilon}\right) j \log 2$$

e, siccome $n_1, n_2 < j2^{j+2}$, si ha

$$\log n \leq \log j + (j+2)\log 2.$$

Mettendo insieme le due stime, e tenendo presente che J può essere preso grande a piacere e quindi anche j e n, che crescono al crescere di J, otteniamo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha - \varepsilon}\right).$$

Poichè $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo quindi che

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \qquad \forall x \in D_\alpha.$$

□

Siamo ad un buon punto perché abbiamo un insieme D_α che ha dimensione di Hausdorff "grande", cioè $\dim_{\mathcal{H}}(D_\alpha) = 1/\alpha$ e su cui la funzione g assume valori "grandi". Siamo in grado di concludere che g è la funzione di saturazione cercata.

Proposizione 15. *La funzione g è la funzione di saturazione cercata, cioè*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, g)) = \dim_{\mathcal{H}}\left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} = \beta\right\} = 1 - \beta p$$

per ogni $\beta \in [0, 1/p]$.

Dimostrazione. Sia $\alpha > 1$. Utilizziamo il teorema 2 con β tale che $1 - \beta p = 1/\alpha$, si ottiene che

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E\left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), g\right)\right) \leq 1 - \beta p = \frac{1}{\alpha},$$

quindi basta dimostrare l'altra disuguaglianza.

Se fossimo in grado di ottenere per ogni $x \in D_\alpha$ anche la disuguaglianza $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} \leq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, avremmo che $D_\alpha \subset E\left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), g\right)$ e perciò $\dim_{\mathcal{H}} E\left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), g\right) \geq \dim_{\mathcal{H}} D_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, che darebbe la tesi. Tuttavia non si riesce a dare la stima dal basso e quindi dobbiamo procedere utilizzando un argomento che riguarda le dimensioni di Hausdorff. Definiamo:

$$D_\alpha^1 = \left\{x \in D_\alpha : \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

$$D_\alpha^2 = \left\{ x \in D_\alpha : \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n g(x)|}{\log n} > \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\}.$$

Abbiamo già osservato che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^1 \cup D_\alpha^2) = \mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha) = +\infty$. Basta allora provare che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^2) = 0$. Sia (β_n) una successione di numeri reali tali che $\beta_n > \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ e che $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Osserviamo che

$$D_\alpha^2 \subset \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}(\beta_n, g).$$

Il teorema 2 dice che

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}(\beta_n, g)) = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(\mathcal{E}(\beta_n, g)) > 0\} \leq 1 - \beta_n p < \frac{1}{\alpha};$$

pertanto necessariamente $\mathcal{H}^{1/\alpha}(\mathcal{E}(\beta_n, g)) = 0$ per ogni n. Quindi $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^2) = 0$ e $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^1) = +\infty$, il che prova che

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E\left(\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), g\right)\right) \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Per quanto osservato all'inizio, questo è esattamente quello che ci basta. Quindi abbiamo ottenuto la tesi.

□

1.4 La dimensione di Hausdorff degli spettri delle singolarità

Concludiamo dunque con la dimostrazione del teorema 10.

Teorema 10. *Siano* $1 < p < +\infty$ *e* $\beta \in [0, 1/p]$. *Per ogni* f *in* $L^p(\mathbb{T})$, *ad eccezione di un insieme* B *di prima categoria in* $L^p(\mathbb{T})$, *risulta* $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$.

Dimostrazione. Come preannunciato, vogliamo costruire l'insieme denso $A = B^C$ replicando la costruzione della funzione di saturazione g trovata, su cui valga la tesi del teorema 10. Per costruire l'insieme denso, l'idea è quella che ogni funzione i cui coefficienti di Fourier siano sufficientemente vicini a quelli della funzione di saturazione g su infiniti intervalli del tipo $[j2^{j+1}, j2^{j+2})$, soddisfino le conclusioni del teorema 10.

Più precisamente, consideriamo una successione di polinomi $(f_j)_{j\geq 1}$ densa in $L^p(\mathbb{T})$ con $\mathrm{spec}(f_j) \subset [-j, j]$. Definiamo la successione $(h_j)_{j\geq 1}$ come segue:

$$h_j = f_j + \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j,$$

dove le funzioni g_j sono quelle definite in precedenza. In particolare, le funzioni $e_{j2^{j+1}}g_j$ sono quelle che compongono la funzione di saturazione g. La norma $\|h_j - f_j\|_p$ tende a zero quando j tende a $+\infty$ e pertanto la successione $(h_j)_{j\geq 1}$ rimane densa in $L^p(\mathbb{T})$.
Osserviamo inoltre che gli spettri di f_j e di $h_j - f_j$ non si sovrappongono, perché gli spettri di $h_j - f_j = e_{j2^{j+1}}g_j$ sono contenuti in $[j2^{j+1}, j2^{j+2})$.

Infine sia $(r_j)_{j\geq 1}$ una successione di numeri reali positivi sufficientemente piccoli affinché, per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$ tale che $\|f\|_p \leq r_j$, si abbia $\|S_n f\|_\infty \leq 1$ per ogni $n \leq j2^{j+2}$. Questo è possibile, prendendo ad esempio $r_j = \frac{1}{j2^{j+4}}$, infatti il k-esimo coefficiente di Fourier di f è

$$|\hat{f}(k)| = |\langle f, e_k\rangle| \leq \int_0^1 \left|f(t)e^{-2\pi ikt}\right| dt = \|f\|_1 \leq \|f\|_p,$$

per la disuguaglianza di Hölder. Dunque, per ogni $n \leq j2^{j+2}$,

$$\begin{aligned}
\|S_n f\|_\infty &\leq \sum_{|k|\leq n} |\langle f, e_k\rangle| \\
&\leq (2n+1)\frac{1}{j2^{j+4}} \\
&\leq \frac{2j2^{j+2}}{j2^{j+4}} + \frac{1}{2^{j+4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{j+4}} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

Consideriamo

$$A = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq l} B(h_j, r_j) = \limsup_{j\to+\infty} B(h_j, r_j)$$

e dimostriamo che A è l'insieme denso cercato. Siccome le funzioni h_j sono dense in $L^p(\mathbb{T})$ allora gli insiemi $\bigcup_{j\geq l} B(h_j, r_j)$ sono densi per ogni $l \in \mathbb{N}$. Quindi per il teorema di Baire, A è denso. Dobbiamo far vedere che ogni funzione di A verifica l'uguaglianza voluta.

Fiassiamo allora $f \in A$; in corrispondenza possiamo trovare una successione crescente di interi j_l tale che $f \in B(h_{j_l}, r_{j_l})$ per ogni l. Poi, per ogni $\alpha > 1$, definiamo $J_l = [j_l/\alpha] + 1$. Siccome, per l che tende a $+\infty$, j_l tende a $+\infty$, definitivamente si ha $j_l > \frac{1}{1-1/\alpha} > 1$; perciò, per l grande,

$$J_l \leq (j_l/\alpha) + 1 < j_l. \tag{1.3}$$

Vogliamo utilizzare questi j_l e J_l trovati a partire da f per selezionare gli insiemi $\mathbf{I}_{J_l, j_l}$ su cui possiamo avere una stima delle somme di Fourier delle funzioni g_{j_l}. Poniamo a tale scopo

$$\tilde{E} = \limsup_{l \longrightarrow +\infty} \mathbf{I}_{J_l, j_l}.$$

Per ogni $x \in \tilde{E}$ è possibile trovare $j = j_l$ grande a piacere, in modo che verifichi anche la proprietà (1.3) e degli interi corrispondenti $J = J_l$ e k (con $1 \leq k \leq 2^j - 1$) in modo che x appartenga a $I_{k,j} \subset \mathbf{I}_{J,j}$ con $k/2^j \in \mathcal{I}_J$.

Scomponiamo f come somma di funzioni: $f = f_j + \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j + (f - h_j)$. Riusciamo in questo modo a stimare dal basso le somme parziali. Infatti, per il lemma 13, procedendo esattamente come nella dimostrazione della proposizione 14, possiamo trovare due interi n_1 e n_2 che soddisfano $j2^{j+1} \leq n_1 < n_2 < j2^{j+2}$ e tali che

$$|S_{n_2}(e_{j2^{j+1}} g_j)(x) - S_{n_2}(e_{j2^{j+1}} g_j)(x)| \geq \frac{1}{4j} 2^{(j-J-1)/p}.$$

Siccome vogliamo utilizzare questa disuguaglianza per minorare le somme di Fourier di f, vediamo di minorare a pezzi la quantità $|S_{n_2} f - S_{n_1} f|$.
Per prima f_j: essa ha spettro in $[-j, j]$ che è disgiunto da $[n_1, n_2]$ e quindi $|S_{n_2} f - S_{n_1} f| = 0$.
Poi $f - h_j$: per come abbiamo preso gli r_j, dato che $\|f - h_j\|_p < r_j$, si ha $\|S_n(f - h_j)\|_\infty \leq 1$ per ogni $n \leq j2^{j+2}$, quindi anche per n_1 e n_2. Otteniamo, mettendo tutto insieme,

$$\begin{aligned}
&|S_{n_2} f(x) - S_{n_1} f(x)| \\
&\geq \left| (S_{n_2} f_j(x) - S_{n_1} f_j(x)) + \left(S_{n_2} \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j(x) - S_{n_1} \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j)(x) \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \big(S_{n_2}(f - h_j)(x) - S_{n_1}(f - h_j)(x) \big) \right| \\
&\geq |S_{n_2} f_j(x) - S_{n_1} f_j(x)| + \left| S_{n_2} \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j(x) - S_{n_1} \frac{1}{j} e_{j2^{j+1}} g_j(x) \right| - \\
&\qquad - |S_{n_2}(f - h_j)(x)| - |S_{n_1}(f - h_j)(x)| \\
&\geq \frac{1}{4j^2} 2^{(j-J-1)/p} - |S_{n_2}(f - h_j)(x)| - |S_{n_1}(f - h_j)(x)| \\
&\geq \frac{1}{4j^2} 2^{(j-J-1)/p} - 2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Osserviamo che, la funzione $j \mapsto \frac{1}{j^2} 2^{\frac{j-J}{p} - \frac{1}{p}}$ tende a $+\infty$, per $j \longrightarrow +\infty$. Perciò affermiamo che definitivamente

$$|S_{n_2} f(x)| \geq \frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p} \quad \text{oppure} \quad |S_{n_1} f(x)| \geq \frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p}, \tag{1.5}$$

per una costante $C > 0$. Se così non fosse, avremmo che

$$|S_{n_2} f(x) - S_{n_1} f(x)| \leq |S_{n_2} f(x)| + |S_{n_1} f(x)| \leq 2\frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p};$$

ma, poiché

$$\lim_{j\to+\infty} \left(\frac{1}{4j^2} - \frac{2C}{j^2} \right) 2^{\frac{j-J}{p}+\frac{1}{p}} = +\infty,$$

otterremmo, per j grande,

$$|S_{n_2} f(x) - S_{n_1} f(x)| \leq 2\frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p} \leq \frac{1}{4j^2} 2^{(j-J-1)/p} - 2$$

che è in contraddizione con quanto trovato in (1.4).

Perciò, grazie a (1.5), otteniamo che per $\overline{n} = n_1$ oppure per $\overline{n} = n_2$, si ha

$$\log |S_{\overline{n}} f(x)| \geq \log \left(\frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p} \right) = C' - 2 \log j + \frac{j - J - 1}{p} \log 2;$$

per come abbiamo preso J, risulta $\frac{j}{\alpha} + 2 \leq J \leq \frac{j}{\alpha} + 1$, per cui

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p} \right) &\geq C' - 2 \log j - \frac{j/\alpha + 1 - j + 1}{p} \log 2 \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) j \log 2 + O(\log j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{C}{j^2} 2^{(j-J-1)/p} \right) &\leq C' - 2 \log j - \frac{j/\alpha + 2 - j + 1}{p} \log 2 \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) j \log 2 + O(\log j). \end{aligned}$$

Diamo una stima del numero $\overline{n}$. Poiché $j2^{j+1} \leq n_1 < n_2 \leq j2^{j+2}$, si ha

$$\log n_1 \geq \log j + (j + 1) \log 2 = j \log 2 + O(\log j)$$

$$\log n_2 \leq \log j + (j + 2) \log 2 = j \log 2 + O(\log j.)$$

Pertanto

$$\begin{cases} \log \overline{n} = & j \log 2 + O(\log j) \\ \log |S_{\overline{n}} f(x)| \geq & \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{\alpha}) j \log 2 + O(\log j) \end{cases}$$

e quindi, per ogni $x \in \tilde{E}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \tag{1.6}$$

Quindi abbiamo provato che per ogni $f \in A$ e per ogni $x \in \tilde{E}$ vale (1.6). Per concludere, usiamo un ragionamento sulla dimensione di Hausdorff.
L'insieme

$$\mathbf{I}_{J_l,j_l} = \bigcup_{1\leq K\leq 2^{J_l}, K\notin 2\mathbb{Z}} \left[\frac{K}{2^{J_l}} - \frac{1}{2^{j_l}}, \frac{K}{2^{J_l}} + \frac{1}{2^{j_l}}\right]$$

è unione di intervalli di diametro $2/2^{j_l}$ e i cui centri distano fra loro $2/2^{J_l}$. Inoltre, per ogni l, poiché $J_l \geq j_l/\alpha$, gli $\mathbf{I}_{J_l,j_l}$ ricoprono $[0,1]$. Possiamo applicare il corollario 6 con i seguenti dati:

- $q_l = J_l$
- $x_{k,l} = \frac{K}{2^{J_l}} \in [0,1]$ se k è dispari, $x_{k,l} = \frac{K+1}{2^{J_l}} \in [0,1]$ se k è pari.
- $r_{k,l} = \frac{1}{2^{j_l/\alpha}}$
- $d = 1$
- $\phi(x) = x^{1/\alpha}$

Con queste ipotesi, abbiamo che

$$\begin{aligned}
B_n &= \bigcup_{1\leq K\leq 2^{J_l}, K\notin 2\mathbb{Z}} \left[\frac{K}{2^{J_l}} - \frac{1}{2^{j_l/\alpha}}, \frac{K}{2^{J_l}} + \frac{1}{2^{j_l/\alpha}}\right] \supset [0,1] \\
B_n^\phi &= \mathbf{I}_{J_l,j_l} = \bigcup_{1\leq K\leq 2^{J_l}, K\notin 2\mathbb{Z}} \left[\frac{K}{2^{J_l}} - \frac{1}{2^{j_l}}, \frac{K}{2^{J_l}} + \frac{1}{2^{j_l}}\right] \\
E &= \limsup_{l\to\infty} \bigcup_{1\leq K\leq 2^{J_l}, K\notin 2\mathbb{Z}} \left[\frac{K}{2^{J_l}} - \frac{1}{2^{j_l/\alpha}}, \frac{K}{2^{J_l}} + \frac{1}{2^{j_l/\alpha}}\right] \supset [0,1] \\
E^\phi &= \limsup_{l\to\infty} \mathbf{I}_{J_l,j_l} \tilde{E}
\end{aligned}$$

e quindi sono verificate le ipotesi:

- $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{1}{x^{1-1/\alpha}}$ è monotona e tende a $+\infty$ per $x \to 0$,
- $\phi(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ è una funzione dimensione, perché è non decrescente e $\phi(0) = 0$,

- l'intervallo $[0,1]$ è contenuto in E.

Dunque otteniamo che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(\tilde{E}) = +\infty$.

Usando lo stesso argomento di prima, possiamo concludere che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(\tilde{E}^1) = +\infty$, con

$$\tilde{E}^1 = \left\{ x \in \tilde{E} : \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\},$$

e quindi necessariamente $\dim_{\mathcal{H}}\left(E\left(\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right), f\right)\right) \geq \frac{1}{\alpha}$, per ogni $f \in A$. Allora, usando ancora una volta il teorema 2, si ottiene che questa disuguaglianza è in realtà una uguaglianza e quindi otteniamo la tesi del teorema 10 ponendo $1 - \beta p = 1/\alpha$.

$\square$

Osservazione 16. La costruzione sopra può essere trasportata in $L^1(\mathbb{T})$. Cioè per quasi ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, cioè eccetto un insieme B di prima categoria in $L^1(\mathbb{T})$

$$\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) \geq 1 - \beta, \quad \forall \beta \in [0,1], \, \forall f \in B^C.$$

Tuttavia, non posssiamo andare avanti perché il teorema di Carleson è falso in $L^1(\mathbb{T})$ e non abbiamo un teorema 2 da poter applicare in questo contesto. Vedremo nel prossimo capitolo come risolvere la questione.

Capitolo 2

Divergenza della serie di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{T})$

È naturale chiedersi come è fatto l'insieme di divergenza per le funzioni di $L^1(\mathbb{T})$, perché qui il teorema di Carleson e Hunt è falso, anzi il teorema di Kolmogorov ([9] teorema 4.1 pag. 310) ci assicura l'esistenza di funzioni la cui serie di Fourier diverge ovunque.

Teorema 17 (Teorema di Kolmogorov)**.** *Esiste una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier diverge ovunque.*

Notiamo tuttavia che ripercorrendo la dimostrazione nel caso $L^p(\mathbb{T})$ consiste di due passi: il primo è la ricerca di un insieme A che sia complementare di un insieme di prima categoria di $L^p(\mathbb{T})$, le cui funzioni f verificano $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) \geq 1 - \beta p$, e funziona allo stesso modo; nel secondo si utilizza il teorema di Aubry (che a sua volta utilizza il risultato di Carleson e Hunt) per concludere che vale l'uguaglianza.

Pertanto a priori non è affatto detto che esista una generalizzazione del teorema 10 ad $L^1(\mathbb{T})$; vedremo che però ciò è vero:

Teorema 18. *Sia $\beta \in [0, 1/p]$. Per ogni f in $L^1(\mathbb{T})$, ad eccezione di un insieme B di prima categoria in $L^1(\mathbb{T})$, risulta* $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta$.

Ciò che faremo sarà rimpiazzare il teorema di Carleson e Hunt con una opportuna disuguaglianza integrale. Prima di procedere sarà utile fare una piccola digressione.

2.1 Risultati preliminari

In questa sezione dimostreremo l'esistenza di funzioni le cui trasformate di Fourier si maggiorano con un opportuno esponenziale negativo. Ricordiamo innanzi tutto un risultato classico sull'analisi di Fourier, per la cui dimostrazione rimandiamo a [10] pag. 272:

Teorema 19 (Teorema di Paley-Wiener)**.** *Sia $F \in L^2(\mathbb{R})$. Allora F è la trasformata di Fourier di una funzione f con supporto contenuto in $[-\sigma, \sigma]$ se e solo se F ha un'estensione olomorfa su $\mathbb{C}$ e tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $M_\varepsilon > 0$ per cui valga*

$$|F(z)| \leq M_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Per la costruzione della funzione con le caratteristiche annunciate all'inizio del paragrafo, utilizzeremo la funzione complessa $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ prolungata in modo analitico in zero con valore 1. Vediamone una proprietà interessante.

Lemma 20. *Per ogni $z \in \mathbb{C}$, vale la disuguaglianza*

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leq C\, \frac{e^{|\Im m\, z|}}{1+|z|}.$$

Dimostrazione. Se scriviamo z come $z = x + iy$ e il seno in termini dell'esponenziale, si trova

$$\begin{aligned} |\sin z| = |\sin(x+iy)| &= \left|\frac{e^{i(x+iy)} - e^{i(x-iy)}}{2i}\right| \\ &= \left|\frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i}\right| \leq \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \\ &\leq e^{|y|} = e^{|\Im m\, z|}. \end{aligned}$$

Inoltre, per $|z|$ che tende a 0, $|\frac{\sin z}{z}|$ tende a 1, per cui esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} |\frac{\sin z}{z}| \leq 2 & \text{se } |z| \leq \delta \\ |\frac{\sin z}{z}| \geq \frac{e^{|\Im m\, z|}}{|z|} & \text{se } |z| > \delta \end{cases}$$

Allora

$$(1+|z|)\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leq \begin{cases} 2(1+|z|) \leq 2(1+\delta) & \text{se } |z| \leq \delta \\ e^{|\Im m\, z|}\,\frac{1+|z|}{|z|} \leq e^{|\Im m\, z|}\left(1+\frac{1}{\delta}\right) & \text{se } |z| > \delta \end{cases}$$

dunque vale la tesi con $C = \max\{2(1+\delta), 1+\frac{1}{\delta}\}$.

□

Veniamo ora alla costruzione della funzione.

Teorema 21. *Per ogni $\gamma > 0$, sia*

$$H(\gamma) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |\hat{f}(\zeta)| \leq Ce^{-D|\zeta|^\gamma} \text{ per ogni } \zeta \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\gamma < 1$, allora $H(\gamma)$ contiene una funzione non nulla a supporto compatto.

Dimostrazione. Partiamo dall'ipotesi $\gamma < 1$ e consideriamo la funzione χ definita tramite la sua trasformata di Fourier

$$\hat{\chi}(\zeta) = \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta}\right)^2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\zeta/k^{1/\gamma})}{\zeta/k^{1/\gamma}}.$$

Ciò è sempre possibile perché la trasformata di Fourier è un isomorfismo in $L^2(\mathbb{R})$. Grazie al lemma 20 applicato con $z = \zeta$ e $z = \zeta/k^{1/\gamma}$ si ha che

$$|\hat{\chi}(z)| \leq \frac{e^{2|\Im m\, z|}}{(1+|z|)^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\left(\frac{|\Im m\, z|}{k^{1/\gamma}}\right)}}{1+\frac{|z|}{k^{1/\gamma}}} = \frac{e^{(2|\Im m\, z|)}}{(1+|z|)^2} \frac{e^{\left(|\Im m\, z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/\gamma}}\right)}}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{|z|}{k^{1/\gamma}}\right)}.$$

Adesso osserviamo che, siccome $1/\gamma > 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/\gamma}}$ converge, mentre al denominatore c'è un prodotto di termini maggiori di 1, per cui

$$|\hat{\chi}(z)| \leq e^{A|\Im m\, z|} \leq e^{A|z|}.$$

Quindi χ verifica le ipotesi del teorema di Paley- Wiener con $\sigma = A$ e pertanto χ ha supporto contenuto in $[-A, A]$.
Verifichiamo che $\chi \in H(\gamma)$. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $n = [|x|^\gamma]$; si ha

$$\begin{aligned}
|\hat{\chi}(x)| &\leq 1 \prod_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(x/k^{1/\gamma})}{x/k^{1/\gamma}}\right| \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{k^{1/\gamma}}{|x|} = \frac{(n!)^{1/\gamma}}{|x|^n} \\
&\leq \frac{(n!)^{1/\gamma}}{n^{n/\gamma}} = \left(n!n^{-n}\right)^{1/\gamma} \\
&= \left(\frac{n!n^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}}\right)^{1/\gamma} \left(\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\right)^{1/\gamma}.
\end{aligned}$$

In virtù della formula di Stirling, il primo fattore ha limite 1 per n che tende all'infinito, da cui per ogni x vale

$$\begin{aligned}
|\hat{\chi}(x)| &\leq C\left(\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\right)^{1/\gamma} = C\left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{\frac{n-1}{2}}}\, e^{\frac{-n+1}{2}}\right)^{1/\gamma} \\
&\leq C' e^{-\frac{n+1}{2\gamma}} \\
&\leq K e^{-\frac{|x|^\gamma}{2\gamma}},
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $n \leq |x|^\gamma < n+1$. Perciò $\chi \in H(\gamma)$ per ogni $\gamma < 1$.

$\square$

2.2 Stima della misura dell'insieme di divergenza

Il seguente lemma ci sarà utile per controllare i nuclei di Dirichlet.

Lemma 22. *Esiste una costante $A > 0$ tale che, per ogni $N \geq 2$, per ogni fuzione misurabile $n : \mathbb{T} \to \{1, \dots, N\}$ e per ogni $t \in \mathbb{T}$, si ha*

$$\int_{\mathbb{T}} |D_{n(x)}(x-t)|\, dx \leq A \log N.$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che, siccome il nucleo di Dirichlet è 1-periodico, allora il valore dell'integrale non cambia se lo calcoliamo, anziché su $[0,1]$, su $[-\frac{1}{2}+t, \frac{1}{2}+t]$.
Vogliamo trovare maggiorazioni opportune per $|D_n|$. Innanzi tutto osserviamo che, per ogni u si ha

$$|D_n(u)| \leq \sum_{|k| \leq n} \left| e^{2\pi i k u} \right| \leq (2n+1) \leq 3n.$$

Invece per $u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ possiamo usare la disuguaglianza di convessità $|\sin(\pi u)| \geq |2u|$ e ottenere

$$|D_n(u)| = \left| \frac{\sin(\pi(2n+1)u)}{\sin(\pi u)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi u)|} \leq \frac{1}{2|u|}.$$

Adesso dividiamo l'integrale in due pezzi e su ciascun pezzo usiamo una delle due stime trovate:

$$\begin{aligned} \int_{\{x : 0 \leq |x-t| \leq 1/N\}} |D_{n(x)}(x-t)|\, dx &= 2 \int_{\{x: 0 \leq x-t \leq 1/N\}} |D_{n(x)}(x-t)|\, dx \\ &\leq 2 \cdot 3N \cdot \frac{1}{N} = 6, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\{x:1/N<|x-t|\leq 1/2\}} |D_{n(x)}(x-t)|\,dx &= 2\int_{\{x:1/N<x-t\leq 1/2\}} |D_{n(x)}(x-t)|\,dx \\ &\leq 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\{x:1/N<x-t\leq 1/2\}} \frac{dx}{x-t} \\ &= \log N - \log 2 \leq \log N.\end{aligned}$$

Quindi in definitiva

$$\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}+t} |D_{n(x)}(x-t)|\,dx \leq 6+\log N \leq \log N\left(1+\frac{6}{\log N}\right) \leq 7\log N,$$

quindi la tesi è verificata con $A = 7$.

□

Come conseguenza si ha il seguente lemma.

Lemma 23. *Esiste una costante assoluta A, tale che per ogni $N \geq 2$, per ogni funzione misurabile $n : \mathbb{T} \to \{1, \ldots, N\}$, per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, si ha*

$$\int_{\mathbb{T}} |S_{n(x)}f(x)|\,dx \leq A\log N\|f\|_1.$$

Dimostrazione. Poiché $S_{n(x)}f(x) = (f*D_{n(x)})(x)$, usando il teorema di Fubini si trova

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |S_{n(x)}f(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{T}} |f*D_{n(x)}(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{T}} dx \int_{\mathbb{T}} dt\,|f(t)|\,|D_{n(x)}(x-t)| \\ &= \int_{\mathbb{T}} dt\,|f(t)| \int_{\mathbb{T}} dx\,|D_{n(x)}(x-t)| \leq A\log N \int_{T} |f(t)|\,dt \\ &= A\log N\|f\|_1.\end{aligned}$$

□

Siamo pronti a dimostrare la seguente disuguaglianza integrale di Carleson e Hunt in $L^1(\mathbb{T})$.

Corollario 24. *Sia $\alpha > 0$. Esiste $C := C_\alpha$ tale che per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\int_{\mathbb{T}} \sup_{n\geq 2} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^{1+\alpha}} dx \leq C\|f\|_1.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Beppo Levi, basta provare che, per ogni $N \geq 2$ esiste una costante C indipendente da N tale che

$$\int_{\mathbb{T}} \sup_{2 \leq n \leq N} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^{1+\alpha}} dx \leq C\|f\|_1. \tag{2.1}$$

Consideriamo una funzione misurabile $n : \mathbb{T} \to \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ non necessariamente limitata; se proviamo che esiste una costante C, indipendente da n per cui vale

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|S_{n(x)} f(x)|}{(\log n(x))^{1+\alpha}} dx \leq C\|f\|_1,$$

allora la (2.1) è una conseguenza. Concentriamoci dunque su quest'ultima disuguaglianza.
Definiamo per ogni $k \geq 0$ gli insiemi

$$A_k = \{x \in \mathbb{T} : 2^{2^k} \leq n(x) \leq 2^{2^{k+1}}\}.$$

Essi ricoprono $\mathbb{T}$, cioè $\bigcup_{k \geq 0} A_k = \mathbb{T}$. In particolare, su ciascun A_k si ha che

$$2^k \log 2 \leq \log n(x) \leq 2^{k+1} \log 2$$

e inoltre, per il lemma 23, si ha

$$\begin{aligned} \int_{A_k} |S_{n(x)} f(x)| \, dx &\leq \int_{\mathbb{T}} |S_{n(x)} f(x)| \, dx \leq A \cdot \max\{\log n(x) : x \in A_k\} \cdot \|f\|_1 \\ &\leq A 2^{k+1} \log 2 \cdot \|f\|_1. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \frac{|S_{n(x)} f(x)|}{(\log n(x))^{1+\alpha}} \, dx &= \sum_{k \geq 0} \int_{A_k} \frac{|S_{n(x)} f(x)|}{(\log n(x))^{1+\alpha}} \, dx \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2^k \log 2)^{1+\alpha}} \int_{A_k} |S_{n(x)} f(x)| \, dx \\ &\leq \sum_{k \geq 0} A \, \frac{2^{k+1} \log 2}{2^{k(1+\alpha)} (\log 2)^{1+\alpha}} \, \|f\|_1 \\ &= \frac{2A}{(\log 2)^{\alpha}} \, \|f\|_1 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{k\alpha}} \leq C_\alpha \, \|f\|_1, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che, essendo $\alpha > 0$, la serie è convergente.

□

2.3 La dimensione di Hausdorff degli spettri delle singolarità

Andiamo verso la dimostrazione del teorema 18. Il seguente lemma ci dice che non appena un polinomio trigonometrico è grande in un punto $a \in \mathbb{T}$, è grande anche in piccoli intervalli aperti intorno ad a, con una stima piuttosto buona in norma L^p, con $p \geq 1$. Prima di enunciarlo ricordiamo il seguente teorema di Riesz, per la cui dimostrazione si rimanda a [8], paragrafo 12.10, pag 100-102:

Teorema 25 (Teorema di Riesz). (i) *Sia $p \in (1, +\infty)$. Esiste una costante $C = C_p$ tale che per ogni $f \in L^p$ si ha*

$$\|S_N f\|_p \leq C\|f\|_p$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$.

(ii) *Esistono due costanti A e B tali che per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$ tale che $f \cdot \log^+ |f| \in L^1(\mathbb{T})$ si ha*

$$\|S_N f\|_1 \leq \frac{A}{2\pi} \int |f| \log^+ |f| \, dx + B$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Lemma 26. *Sia $p \geq 1$ e $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che, se n è abbastanza grande, se P è un polinomio trigonometrico su $\mathbb{T}$ di grado n e se $a \in \mathbb{T}$ è tale che $|P(a)| \geq \|P\|_p$, allora per ogni intervallo I con centro in a e con ampiezza $|I| \leq \frac{1}{n}$ si ha*

$$\|P\|_{L^p(I)} \geq \delta |P(a)| \cdot |I|^{1/p} \cdot \begin{cases} \frac{1}{(\log n)^{(1+\varepsilon)/p}} & \text{se } p > 1, \\ \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon} \log(1/|I|)} & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è di localizzare P intorno a 0 e usare la disuguaglianza di Nikolsky e il teorema di Riesz per stimare la norma L^p conoscendo la norma L^∞.

Siccome la tesi è invariante per traslazioni, possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $a = 0$ e perciò I sarà un intervallo centrato nell'origine di ampiezza non superiore a $1/n$. Sia $\gamma \in (0, 1)$ tale che $\gamma(1 + \varepsilon) > 1$. Consideriamo infine una funzione w con supporto in $[-1, 1]$ e che soddisfa $0 \leq w \leq 1$, $w(0) = 1$ e tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |\hat{w}| \leq D e^{-E|\xi|^\gamma}, \tag{2.2}$$

per opportune costanti positive D ed E, la cui esistenza è garantita dal teorema 21. Poniamo allora $w_I(x) = w(x/|I|)$, in modo che w_I sia nulla fuori di I e $w_I(0) = w(0) = 1$, e sia $N = [|I|^{-1}(\log n)^{1+\varepsilon}]$. Se $p > 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\|S_N(Pw_I)\|_\infty &\leq N^{1/p}\|S_N(Pw_I)\|_p \text{ (disuguaglianza di Nikolsky)} \\
&\leq C_p N^{1/p}\|Pw_I\|_p \text{ (teorema di Riesz)} \\
&= C_p N^{1/p}\|Pw_I\|_{L^p(I)} \\
&\leq C_p N^{1/p}\|P\|_{L^p(I)} \cdot \|w\|_\infty \\
&\leq C_p N^{1/p}\|P\|_{L^p(I)}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Invece, se $p = 1$ il teorema di Riesz fornisce una stima peggiore: infatti

$$\begin{aligned}
\|S_N(Pw_I)\|_\infty &\leq N\,\|S_N(Pw_I)\| \text{ (disuguaglianza di Nikolsky)} \\
&\leq N\left\{A\big\|Pw_I \log^+|Pw_I|\big\|_1 + B\right\} \text{ (teorema di Riesz)} \\
&= N\left\{A\int_{\mathbb{R}} |P(x)|\,|w_I(x)|\,\log^+(|P(x)|\,|w_I(x)|)\,dx + B\right\} \\
&= N\left\{A\int_I |P(x)|\,|w_I(x)|\,\log^+(|P(x)|\,|w_I(x)|)\,dx + B\right\} \\
&\leq N\left\{A\int_I |P(x)|\,[\log^+|P(x)| + \log^+|w_I(x)|]\,dx + B\right\} \\
&= N\left\{A\int_I |P(x)|\,\log^+|P(x)|\,dx + B\right\},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà di subadditività di $\log^+$, cioè $\log^+(a\,b) = \log^+ a + \log^+ b$ e il fatto che, essendo w_I compresa fra 0 e 1, $\log^+|w_I(x)| = 0$ per ogni x. Per ogni $t > 0$, mettendo tP al posto di P, si ha

$$\frac{1}{N}\|S_N(tPw_I)\|_\infty \leq At\int_I |P(x)|\,[\log^+|tP(x)| + \log^+|w_I(x)|]\,dx + B,$$

ovvero

$$\frac{1}{N}\|S_N(Pw_I)\|_\infty \leq A\int_I |P(x)|\,\log^+|tP(x)|\,dx + \frac{B}{t}.$$

Scegliamo

$$t = \frac{B}{A\int_I |P(y)|dy};$$

allora

$$\frac{1}{N}\|S_N(Pw_I)\|_\infty \leq A\int_I |P(x)|\,\log^+\frac{B|P(x)|}{A\int_I |P(y)|dy}\,dx + A\int_I |P(y)|dy.$$

Se n è abbastanza grande, per continuità di P, vale $|P(x) - P(0)| < \frac{1}{2}|P(0)|$ su I; perciò si ha

$$|P(x)| \leq |P(x) - P(0)| + |P(0)| \leq \frac{3}{2}|P(0)|$$

e

$$\begin{aligned}\int_I |P(y)|\, dy &= \int_I |P(y) - P(0) + P(0)|\, dy \\ &\geq |I|\, |P(0)| - |I|\, \frac{1}{2}\, |P(0)|.\end{aligned}$$

Essendo poi $\log^+$ crescente e subadditivo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\|S_N(Pw_I)\|_\infty &\leq A \int_I |P(x)|\, \log^+ \left[\frac{B}{A}\, \frac{\frac{3}{2}|P(0)|}{|I|\frac{1}{2}|P(0)|}\right] dt + A \int_I |P| dx \\ &= A \int_I |P(x)|\, dx \left\{1 + \log^+ \left[\frac{B}{A}\, \frac{\frac{3}{2}|P(0)|}{|I|\frac{1}{2}|P(0)|}\right]\right\} \\ &\leq C \int_I |P(x)|\, dx \left(1 + \log \frac{1}{|I|}\right) \qquad (2.4) \\ &\leq D \int_I |P(x)|\, dx \log \frac{1}{|I|} \\ &= D\|P\|_{L^1(I)} \log \frac{1}{|I|}. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Quindi rispetto al caso $p > 1$ abbiamo un fattore $\log \frac{1}{|I|}$ in più.

Vogliamo adesso controllare la differenza $Pw_I - S_N(Pw_I)$. Facciamo una piccola parentesi e consideriamo un polinomio trigonometrico Q di grado r. Possiamo pensarlo come una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$; per esso vale quindi

$$\begin{aligned}\hat{Q}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle Q, e_k\rangle\, \delta(\xi - k) = \sum_{|k|\leq r} \langle Q, e_k\rangle\, \delta(\xi - k) \\ &= \mathrm{I}_{[-r,r]}(\xi) \sum_{|k|\in\mathbb{Z}} \langle Q, e_k\rangle\, \delta(\xi - k) \\ &= \mathrm{I}_{[-r,r]}(\xi)\, \hat{Q}(\xi).\end{aligned}$$

Con la stessa catena di uguaglianze, se $Q = \sum_{|k|\geq r} c_k e_k$, si trova allo stesso modo che

$$\hat{Q}(\xi) = \mathrm{I}_{\{|\xi|>r\}}(\xi)\,\hat{Q}(\xi).$$

Sia ora $f = Pw_I - S_N Pw_I = \sum_{|k|\geq N+1} \langle Pw_I, e_k\rangle e_k$; ad essa possiamo applicare quanto appena detto. Se poi ricordiamo che per due distribuzioni temperate u e v vale la regola $\mathfrak{F}(u\cdot v) = \mathfrak{F}(u) * \mathfrak{F}(v)$, e che, inoltre P è un polinomio trigonometrico di grado n, per cui $\hat{P}(\xi) = \sum_{|j|\leq n} \hat{P}(j)\delta(\xi - j)$, allora si trova

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\mathfrak{F}(Pw_I)(\xi)\\
&= \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\mathfrak{F}(P) * \mathfrak{F}(w_I)(\xi)\\
&= \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(P)(\xi-\eta)\,\mathfrak{F}(w_I)(\eta)\,d\eta\\
&= \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\sum_{|j|\leq n} \mathfrak{F}(P)(j)\,\langle \delta(\xi-\eta-j), \mathfrak{F}(w_I)(\eta)\rangle\\
&= \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\sum_{|j|\leq n} \mathfrak{F}(P)(j)\,\mathfrak{F}(w_I)(\xi - j).
\end{aligned}$$

Cerchiamo di controllare la norma $L^1(\mathbb{T})$ della funzione $\mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}\ \mathfrak{F}(w_I)(\xi - j)$.

Sia dunque j un intero fissato in $[-n, n]$. La trasformata di Fourier agisce sulle omotetie in questo modo: se $\phi(t) = \psi(\frac{t}{\alpha})$ dove α è una costante positiva, allora $\hat{\phi}(\tau) = \alpha\hat{\psi}(\alpha\tau)$; perciò $\mathfrak{F}(w_I)(\eta) = |I|\,\mathfrak{F}(w)(|I|\eta)$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>N} |\mathfrak{F}(w_I)(\xi - j)|\,d\xi &= |I| \int_{|\xi|>N} |\mathfrak{F}(w)((\xi-j)|I|)|\,d\xi\\
&= |I| \int_{|\xi|>N} |\hat{w}((\xi-j)|I|)|\,d\xi\\
&= |I| \int_{|\sigma+j|>N} |\hat{w}(\sigma|I|)|\,d\sigma\\
&\leq |I| \int_{|\sigma+j|>\frac{1}{2}|I|^{-1}(\log n)^{1+\varepsilon}} |\hat{w}(\sigma|I|)|\,d\sigma\\
&= \int_{|x+j|>\frac{1}{2}|I|^{-1}(\log n)^{1+\varepsilon}} |\hat{w}(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Chiamiamo per comodità $A = \frac{1}{2}(\log n)^{1+\varepsilon} - 1$. Se $\big|x + j|I|\big| > A + 1$ allora $|x| \geq \big|x + j|I|\big| - \big|j|I|\big| > A + 1 - |j|\,|I| \geq A$; quindi si ha

$$\{x : \big|x + j|I|\big| > A + 1\} \subset \{x : |x| > A\},$$

perciò, utilizzando anche la (2.2), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>N} |\mathfrak{F}(w_I)(\xi-j)|\,d\xi &\leq \int_{|x|>A} |\hat{w}(x)|\,dx \\
&\leq D\int_{|x|>A} e^{-E|x|^\gamma}\,dx = 2\int_{x>A} e^{-E|x|^\gamma}\,dx \\
&= 2\int_{t>A^\gamma} \frac{D}{\gamma} e^{-Et} t^{\frac{1}{\gamma}-1}\,dt \\
&= \frac{2D}{\gamma} e^{-\frac{EA^\gamma}{2}} \int_{t>A^\gamma} \frac{D}{\gamma} e^{-\frac{Et}{2}} t^{\frac{1}{\gamma}-1}\,dt \\
&= Fe^{-\frac{EA^\gamma}{2}} = Fe^{-\frac{E}{2}\left(\frac{1}{2}(\log n)^{1+\varepsilon}\right)^\gamma} \\
&= Ge^{-H(\log n)^{(1+\varepsilon)\gamma}}.
\end{aligned}$$

Poiché la funzione in n data da $n^2 e^{-H(\log n)^{(1+\varepsilon)\gamma}} = e^{2\log n - H(\log n)^{(1+\varepsilon)\gamma}}$ tende a 0 per $n \longrightarrow \infty$ (perché $(1+\varepsilon)\gamma > 1$), per n abbastanza grande si ha

$$\int_{|\xi|>N} |\mathfrak{F}(w_I)(\xi-j)|d\xi \leq \frac{C}{n^2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leq \|\mathfrak{F}(f)\|_1 \\
&= \left\| \sum_{j=-n}^{n} \mathrm{I}_{\{|\xi|>N\}}(\xi)\,\hat{P}(j)\,\hat{w}_I(\xi-j) \right\|_1 \\
&\leq \frac{C}{n^2} \sum_{j=-n}^{n} |\hat{P}(j)| \\
&\leq \frac{C}{n^2}(2n+1)\|P\|_1.
\end{aligned}$$

Se $p = 1$ allora la relazione sopra mostra direttamente che, per n grande, $\|S_N(Pw_I) - Pw_I\|_\infty = \|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|P\|_1$.
Se invece $p > 1$, per la disuguaglianza di Jensen si trova, per n grande,

$$\|S_N(Pw_I) - Pw_I\|_\infty = \|f\|_\infty \leq \frac{C}{n^2}(2n+1)\|P\|_1 \leq \frac{C}{n^2}(2n+1)\|P\|_p \leq \frac{1}{2}\|P\|_p.$$

In entrambi i casi, cioè per $p \geq 1$, ricordando che $P(0) \geq \|P\|_p$ si ha

$$\begin{aligned}\|S_N(Pw_I)\|_\infty &\geq \|Pw_I\|_\infty - \|S_N(Pw_I) - Pw_I\|_\infty \\ &\geq |P(0)w_I(0)| - \frac{1}{2}\|P\|_p \geq |P(0)| - \frac{1}{2}|P(0)| \\ &= \frac{1}{2}|P(0)|.\end{aligned}$$

Siamo ora in grado di concludere. Se $p > 1$, ricordando la (2.3) e la definizione di N,

$$\begin{aligned}\|P\|_{L^p(I)} &\geq \frac{1}{C_p N^{1/p}}\|S_N(Pw_I)\|_\infty \\ &\geq \frac{1}{2C_p N^{1/p}}|P(0)| \\ &\geq \frac{|I|^{1/p}}{2C_p(\log n)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}|P(0)|,\end{aligned}$$

quindi la tesi vale con $\delta = \frac{1}{2C_p}$. Invece per $p = 1$, ricordando la (2.5), si ha

$$\begin{aligned}\|P\|_{L^1(I)} &\geq \frac{1}{ND\log\frac{1}{|I|}}\|S_N(Pw_I)\|_\infty \\ &\geq \frac{1}{ND\log\frac{1}{|I|}} \cdot \frac{1}{2}|P(0)| \\ &\geq \frac{|I|}{2D(\log n)^{1+\varepsilon}\log\frac{1}{|I|}}\,|P(0)|,\end{aligned}$$

quindi la tesi vale con $\delta = \frac{1}{2D}$.

□

Siamo adesso in grado di dimostrare la seguente proposizione che ha come conseguenza diretta il teorema 18, alla luce di quanto detto all'inizio del capitolo.

Proposizione 27. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$, sia $\nu > 3$ e sia $\tau : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ una funzione crescente e tale che $\inf_{t>0} \frac{\tau(t)}{(\log t)^\nu} > 0$. Definiamo*

$$E(\tau, f) := \left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\tau(n)} = +\infty\right\}.$$

Se ϕ è una funzione dimensione che soddisfa

$$c_1 s \leq \phi(s) \leq c_2 \frac{s\tau(s^{-1})}{(\log s^{-1})^\nu},$$

per ogni $s > 0$, allora $\mathcal{H}^\phi(E(\tau, f)) = 0$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = \nu - 3 > 0$. Data f, sappiamo che esiste una costante K tale che per ogni n si ha $\|S_n f\|_1 \leq K \log n$. Per ogni $M > 1$ definiamo

$$E_M(\tau, f) = \left\{ x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\tau(n)} > \frac{MKc_2}{c_1} \right\}.$$

Consideriamo ora $x \in E_M(\tau, f)$: è possibile trovare un n_x grande a piacere tale che $|S_{n_x} f(x)| \geq \frac{MKc_2}{c_1}\,\tau(n_x)$. Allora se chiamiamo $I_x = \left[x - \frac{1}{2n_x}, x + \frac{1}{2n_x}\right]$, poiché l'ipotesi sulla funzione τ garantisce che $\log n_x \leq (\log n_x)^\nu \leq \frac{c_2}{c_1}\,\tau(n_x)$, si ha

$$\begin{aligned}\|S_{n_x} f\|_1 &\leq K \log n_x \leq \frac{Kc_2}{c_1}\,\tau(n_x) \leq \frac{Kc_2}{c_1} \cdot \frac{c_1}{MKc_2} |S_{n_x} f(x)| \\ &\leq \frac{1}{M} |S_{n_x} f(x)| \leq |S_{n_x} f(x)|.\end{aligned}$$

Quindi possiamo applicare il lemma 26 con $P = S_{n_x} f$, $a = x$ e $\varepsilon/2$ in luogo di ε e otteniamo che

$$\|S_{n_x} f\|_{L^1(I_x)} \geq \delta\, \frac{|S_{n_x} f(x)|}{n_x (\log n_x)^{2+\varepsilon/2}} \geq \frac{\delta MKc_2}{c_1}\, \frac{\tau(n_x)}{n_x (\log n_x)^{2+\varepsilon/2}}.$$

Siccome $(I_x)_{x\in E_M(\tau,f)}$ è un ricoprimento di $E_M(\tau, f)$, possiamo estrarre un sottoricoprimento di Vitali, cioè una famiglia numerabile di intervalli disgiunti $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di ampiezza $1/n_j$, tale che $E_M(\tau, f) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 5I_j$. Il corollario 24 implica che esiste una costante assoluta C per cui

$$\begin{aligned}C\|f\|_1 &\geq \int_{\mathbb{T}} \sup_{n\geq 2} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^{1+\varepsilon/2}} dx \geq \sum_j \int_{I_j} \sup_{n\geq 2} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^{1+\varepsilon/2}} dx \\ &\geq \sum_j \int_{I_j} \frac{|S_{n_j} f(x)|}{(\log n_j)^{1+\varepsilon/2}} dx = \sum_j \frac{1}{(\log n_j)^{1+\varepsilon/2}} \int_{I_j} |S_{n_j} f(x)|\, dx \\ &\geq \sum_j \frac{1}{(\log n_j)^{1+\varepsilon/2}}\, \frac{\delta MKc_2}{c_1}\, \frac{\tau(n_j)}{n_j (\log n_j)^{2+\varepsilon/2}} \\ &\geq \frac{\delta MKc_2}{c_1} \sum_j \frac{|I_j|\tau(1/|I_j|)}{(\log(1/|I_j|))^{3+\varepsilon}} \\ &\geq \frac{K\delta Mc_2}{c_1} \sum_j \frac{|I_j|\tau(1/|I_j|)}{(\log(1/|I_j|))^{\nu}}.\end{aligned}$$

Utilizzando l'ipotesi che si ha sulla funzione dimensione, si trova

$$\sum_j \phi(5|I_j|) \leq \sum_j c_2 \frac{5|I_j|\tau(1/|I_j|)}{(\log(1/|I_j|))^\nu} \leq \frac{5c_1}{\delta MK} \left(\frac{\delta MKc_2}{c_1} \sum_j \frac{|I_j|\tau(1/|I_j|)}{(\log(1/|I_j|))^\nu} \right)$$
$$\leq \frac{5c_1}{K\delta M} C\|f\|_1 \leq \frac{D}{\delta M} \|f\|_1.$$

Quindi, $\mathcal{H}^\phi(E_M(\tau, f)) \leq \frac{D\|f\|_1}{\delta M}$ per ogni $M > 1$.
Siccome poi $E(\tau, f) = \bigcap_{M>1} E_M(\tau, f)$ allora $\mathcal{H}^\phi(E(\tau, f)) \leq \frac{D\|f\|_1}{\delta M}$ per ogni $M > 1$ per cui necessariamente $\mathcal{H}^\phi(E(\tau, f)) = 0$.

□

Applicando la proposizione precedente con $\tau(s) = s^\beta$, $\phi(s) = \frac{s^{1-\beta}}{(\log s^{-1})^4}$ e $\nu = 4$, otteniamo:

Corollario 28. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$ e ogni $\beta \in [0, 1]$, $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) \leq 1 - \beta$.*

Capitolo 3

Divergenza della serie di Fourier di funzioni in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$

Vogliamo ora passare in rassegna il caso $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{T}$.
Se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ e D_n sono i nuclei di Dirichlet, siccome $\|D_n\|_1 \leq C \log n$, si ha

$$\|S_n f\|_\infty = \|f * D_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \, \|D_n\|_1 \leq C \|f\|_\infty \log n.$$

In realtà si ha qualcosa di più preciso.Vediamo che, fissata $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\|S_n f\|_\infty$ è infinitesima rispetto a $\log n$. Per farlo, introduciamo alcune notazioni che ci saranno utili.

Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$. Chiamiamo *n-esima somma parziale modificata* la somma

$$S_n^* f(x) = \sum_{|k| \leq n-1} c_k \, e^{2\pi i k x} + \frac{1}{2} \, c_n \, e^{2\pi i n x} + \frac{1}{2} \, c_{-n} \, e^{-2\pi i n x},$$

per ogni $x \in \mathbb{T}$, dove c_k è il k-esimo coefficiente di Fourier di f. Chiamiamo poi *n-esimo nucleo di Dirichlet modificato* la somma

$$D_n^* f(x) = \sum_{|k| \leq n-1} e^{2\pi i k x} + \frac{1}{2} e^{2\pi i n x} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i n x} = \frac{\sin 2\pi n x}{\tan \pi x},$$

per ogni $x \in \mathbb{T}$. Osserviamo in particolare che

(i) $D_n^* f$ è dispari;

(ii) $\int_{\mathbb{T}} D_n^* \, dt = 1$;

(iii) $|D_n^*(x)| \leq 2n$;

(iv) $|D_n^*(x)| \leq \frac{1}{x}$ per ogni $x \in (0, 1)$.

Inoltre, non è difficile verificare che

$$S_n^* f(x) = f * D_n^*(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x+t)\, D_n^*(t)\, dt.$$

Poniamo inoltre per ogni $x \in \mathbb{T}$ fissato,

$$\phi_x(t) = \frac{1}{2}\left\{f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)\right\}, \quad t \in \mathbb{T},$$

e

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |\phi_x(t)|\, dt;$$

In particolare, se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ è immediato vedere che $\frac{\Phi_x(h)}{h} \longrightarrow 0$ per $h \longrightarrow 0$, cioè $\Phi_x = o\,(h)$.

Proposizione 29. *Se* $\Phi_x(h) = \mathrm{o}(h)$, *allora* $S_n f(x) = \mathrm{o}(\log n)$ *per* $n \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Le funzioni D_n e f sono 1-periodiche, per cui, ricordando (i) e (ii), si ha

$$\begin{aligned}
S_n^* f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{T}} f(x+t)\, D_n^*(t)\, dt - f(x) \int_{-1/2}^{1/2} D_n^*(t)\, dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t)\, D_n^*(t)\, dt - f(x) \int_{-1/2}^{1/2} D_n^*(t)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} D_n^*(t)\ [f(x+t) - f(x)]\ dt \\
&\qquad + \int_0^{1/2} D_n^*\ [f(x-t) - f(x)]\ dt \\
&= \int_0^{1/2} D_n^*(t)\, \phi_x(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
|S_n^* f(x) - f(x)| &\leq \int_0^{1/2} |D_n^*(t)\, \phi_x(t)|\, dt \\
&\leq 2n \int_0^{1/n} |\phi_x(t)|\, dt + \int_{1/n}^{1/2} \frac{|\phi_x(t)|}{t}\, dt \\
&= 2n\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) + \left[\frac{\Phi_x(t)}{t}\right]_{1/n}^{1/2} + \int_{1/n}^{1/2} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt \\
&= 2\Phi_x\left(\frac{1}{2}\right) + n\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{1/n}^{1/2} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Il primo addendo è una costante e quindi, ovviamente, è $o(\log n)$; il secondo è $o(1)$ per ipotesi, dunque è $o(\log n)$. Per il terzo dobbiamo utilizzare ancora l'ipotesi: fissiamo dunque $\varepsilon > 0$; siano $\delta > 0$ tale che $\frac{\Phi_x(t)}{t} < \varepsilon$ per ogni $|t| < \delta$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{\log n} < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Allora si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1/2} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt &= \int_{1/n}^{\delta} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt + \int_{\delta}^{1/2} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt \\
&\leq \varepsilon \left(\log \delta - \log \frac{1}{n}\right) + 2\|f\|_\infty \left(\frac{1}{\delta} - 2\right) \\
&= \varepsilon \log \delta + \varepsilon \log n + C.
\end{aligned}
$$

Pertanto
$$
\frac{\int_{1/n}^{1/2} \frac{\Phi_x(t)}{t^2}\, dt}{\log n} \leq \varepsilon(\varepsilon \log \delta + 1 + C) \qquad \forall n \geq n_0
$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε, se ne deduce che il terzo addendo di (3.1) è $o(\log n)$, da cui la tesi.

$\square$

Più in generale vale il seguente fatto:

Teorema 30. *Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $(\beta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tali che $\lim_{N\to\infty} \beta_N = 0$. Allora per quasi ogni funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, cioè eccetto che su un insieme di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, si ha*

$$
\limsup_{N\to\infty} \frac{|S_N f(x_k)|}{\beta_N \log(N+1)} = +\infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}
$$

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati di Analisi Funzionale, che richiamiamo di seguito (si veda [7] proposizione B.2.1 pag. 183-184 ed esercizio 3.6 pag. 65).

Proposizione 31. *Sia E uno spazio di Fréchet e sia $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di seminorme semicontinue inferiormente su E a valori in $[0,+\infty]$. Se $\inf_{k\in\mathbb{N}} p_k(x) < \infty$ per ogni x appartenente ad un insieme di prima categoria, allora esiste k tale che p_k è finita e continua su E.*

Proposizione 32. *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ tale che esista una costante m per cui*

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f\, g\, dx\right| \leq m\, \|g\|_p \qquad \forall g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Allora, se q è il coniugato di p, cioè $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, allora $f \in L^q(\mathbb{T})$ e

$$\|f\|_q \leq m.$$

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del teorema 30. Sullo spazio di Banach $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ possiamo considerare la famiglia di seminorme $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definita per ogni k come

$$p_k(f) = \sup_{N\geq 1} \frac{|S_N f(x_k)|}{\beta_N\, \log(N+1)}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Siaccome $f \mapsto S_N f(x_k)$ è un funzionale lineare e continuo, ciascuna p_k è anche semicontinua inferiormente. Pertanto lo spazio $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ munito delle seminorme (p_k) verifica le ipotesi della proposizione 31.

L'insieme delle funzioni che soddisfano (3.2) è il complementare dell'insieme

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \inf_{k\in\mathbb{N}} p_k(f) < +\infty \right\},$$

pertanto basta provare che S è di prima categoria.
Supponiamo per assurdo che S non lo sia. Dunque, in base alla proposizione 31, esiste k tale che p_k è continuo e finito, cioè esiste $C > 0$, tale che

$$p_k(f) \leq C\, \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

Ciò significa che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, si ha

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x_k - y)\, D_N(y)\, dy\right| = |S_N f(x_k)| \leq C\, \|f\|_\infty\, \beta_N \log(N+1).$$

Dunque, in base alla proposizione 32 e per la periodicità del nucleo di Dirichlet, si ha $\|D_N\|_1 \leq C\beta_N \log(N+1)$, per cui

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|D_N\|_1}{\log N} \leq C \lim_{N\to\infty} \frac{\beta_N \log(N+1)}{\log N} = 0,$$

in quanto β_N è infinitesima. Questo è un assurdo, perché è ben noto che $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\log N + \mathrm{o}(1)$; quindi abbiamo dimostrato la tesi.

□

Questi risultati garantiscono che nel caso $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ le somme di Fourier sono controllate da un fattore logaritmico. Procediamo allora in modo analogo al caso $L^p(\mathbb{T})$ cercando di calcolare la grandezza degli insiemi in cui $S_n f(x)$ si comporta male, cioè come $(\log n)^\beta$, per $\beta \in [0,1]$.

A questo scopo introduciamo, per ogni $\beta \in [0,1]$ e ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, i seguenti insiemi:

$$\mathcal{F}(\beta, f) = \{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} (\log n)^{-\beta} |S_n f(x)| > 0\}$$

$$F(\beta, f) = \left\{ x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log\log n} = \beta \right\}.$$

Troveremo subito delle differenze sostanziali rispetto al caso $L^p(\mathbb{T})$. Infatti il teorema 2 ci dice che per ogni funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$, $|S_n f|$ cresce il più rapidamente possibile, cioè come $n^{1/p}$, solo su insiemi “piccoli”, ovvero $\dim_{\mathcal{H}}(E(1/p, f)) = 0$. Invece, se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, l'insieme dove $|S_n f|$ cresce il più rapidamente possibile, cioè come $\log n$, è un insieme “grande” e non solo: qualuque sia $\beta \in [0,1]$ è “grande” anche l'insieme dove $|S_n f|$ cresce come $(\log n)^\beta$.

Teorema 33. *Sia $\beta \in [0, 1/p]$. Per ogni f in $L^p(\mathbb{T})$, ad eccezione di un insieme B di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, $F(\beta, f)$ è non vuoto ed ha dimensione di Hausdorff 1.*

Per capire con maggiore precisione le dimensioni degli insiemi di livello al variare di β, utilizziamo una funzione dimensione più precisa, cioè la funzione

$$\phi_{s,t}(x) = x^s \exp\left[(\log 1/x)^{1-t}\right],$$

dove $s > 0$ e $t \in (0,1]$.

Definizione 3. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$. Siano α la dimensione di Hausdorff di E e β così definito

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{H}^{\phi_{\alpha,t}}(E) = 0 \text{ per ogni } t \in (0,1) \\ \sup\{t \in (0,1) : \mathcal{H}^{\phi_{\alpha,t}}(E) > 0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora la coppia (α, β) è detta *dimensione di Hausdorff precisata* di E.

È facile vedere che $\phi_{s,t}(x) \leq \phi_{s',t'}(x)$ per piccoli valori di x se e solo se

$$s < s' \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} s = s', \\ t \leq t'. \end{cases}$$

L'ordinamento naturale per la dimensione di Hausdorff precisata (s, t) è dunque quello lessicografico e sarà denotato con $\prec$. Inoltre, per quanto osservato, se $(s, t) \prec (s', t')$ e $(s, t) \neq (s', t')$, allora $\phi_{s',t'} < \phi_{s,t}$, e quindi $\mathcal{H}^{\phi_{s',t'}}(E) = 0$ non appena $\mathcal{H}^{\phi_{s,t}}(E) < \infty$.

Il principale teorema su $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, che dimostreremo e che contiene il teorema 33 è il seguente:

Teorema 34. *Per ogni $\beta \in [0, 1]$, per tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ eccetto un insieme di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, la dimensione di Hausdorff precisata di $F(\beta, f)$ è $(1, 1 - \beta)$.*

Successivamente ci occuperemo di analizzare questi insiemi dal punto di vista della prevalenza.

3.1 La dimensione degli insiemi $\mathcal{F}(\beta, f)$

Il nostro primo risultato è una maggiorazione per la dimensione di Hausdorff precisata degli insiemi $\mathcal{F}(\beta, f)$, e quindi degli insiemi $F(\beta, f)$, per ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Lemma 35. *Sia $\beta \in (0, 1)$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Allora, per ogni $\gamma > 1 - \beta$,*

$$\mathcal{H}^{\phi_{1,\gamma}}(\mathcal{F}(\beta, f)) = 0.$$

In particolare, la dimensione di Hausdorff precisata di $\mathcal{F}(\beta, f)$ non può essere superiore a $(1, 1 - \beta)$.

Dimostrazione. Indichiamo con S^*g la funzione così definita

$$S^*g(x) = \sup_{n \geq 0} |S_n g(x)|.$$

Una disuguaglianza di Hunt ([17] Teorema 12.5), afferma che esistono due costanti assolute $A, B > 0$ tali che, per ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ e $y > 0$,

$$\lambda\{x \in \mathbb{T} : S^*f(x) > y\} \leq Ae^{-By/\|f\|_\infty}.$$

dove λ indica la misura di Lebesgue su $\mathbb{T}$. Questa disuguaglianza ci sarà molto utile.

Fissiamo ora $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ e $\beta \in (0,1)$. Se dimostriamo la tesi nel caso in cui $\|f\|_\infty \leq 1$ allora abbiamo concluso. Infatti, se $\|f\|_\infty = M < +\infty$ allora dato che, banalmente, $\langle cf, e_k\rangle = c\langle f, e_k\rangle$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^\beta} &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\|f\|_\infty} \cdot \frac{||S_n(f/\|f\|_\infty)(x)|}{(\log n)^\beta} \\ &= \frac{1}{M} \cdot \limsup_{n\to+\infty} \frac{||S_n(f/\|f\|_\infty)(x)|}{(\log n)^\beta}\end{aligned}$$

quindi $\mathcal{F}(\beta, f) = \mathcal{F}(\beta, \frac{f}{\|f\|_\infty})$.

Dunque possiamo supporre $\|f\|_\infty \leq 1$. Per ogni $M > 0$, introduciamo l'insieme

$$\mathcal{F}(\beta, f, M) = \left\{ x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} (\log n)^{-\beta} |S_n f(x)| > M \right\}.$$

Poiché $\mathcal{F}(\beta, f) = \bigcup_{M\in\mathbb{N}^+} \mathcal{F}(\beta, f, M)$, basterà provare che $\mathcal{H}^{\phi_{1,\gamma}}(\mathcal{F}(\beta, f, M)) = 0$ per ogni $M > 0$.

Fissiamo allora $M > 0$ e consideriamo un generico $x \in \mathcal{F}(\beta, f, M)$. Esiste quindi un n_x grande a piacere tale che

$$|S_{n_x} f(x)| > M(\log n_x)^\beta.$$

Affermiamo che è possibile scegliere opportuni intervalli centrati in x che chiamiamo $I_x = [x-\delta, x+\delta]$ su cui valga, a meno di un fattore moltiplicativo, la stessa disuguaglianza. Prima di procedere con questa verifica ricordiamo che i nuclei di Dirichlet D_n si comportano, per n grande, come $\log n$ e quindi, a patto di prendere n_x grande, si ha

$$\|S_{n_x} f\|_\infty = \|f * D_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|D_n\|_1 \leq \|f\|_\infty \log n_x \leq \log n_x.$$

Inoltre la disuguaglianza di Bernstein, applicata al polinomio trigonometrico $S_n f$ garantisce che

$$\|(S_n f)'\|_\infty \leq n_x \log n_x.$$

Utilizzando le disuguaglianze appena trovate, cerchiamo di determinare un valore di $\delta = |I_x|/2$ opportuno, cioè che ci permetta di minorare le somme di Fourier con $M(\log n)^\beta$. Preso $y \in I_x$ si ha

$$\begin{aligned}|S_{n_x} f(y)| &\geq |S_{n_x} f(x)| - |S_{n_x} f(y) - S_{n_x} f(x)| \\ &\geq M(\log n_x)^\beta - \|(S_{n_x})'\|_\infty |y-x| \\ &\geq M(\log n_x)^\beta - n_x \log n_x |y-x|.\end{aligned}$$

Se imponiamo dunque che δ sia tale che $n_x \log n_x \, \delta = \frac{M}{2}(\log n_x)^\beta$, ovvero $\delta = \frac{M}{2n_x(\log n_x)^{1-\beta}}$, si trova

$$|S_{n_x} f(y)| \geq M(\log n_x)^\beta - \frac{M}{2}(\log n_x)^\beta = \frac{M}{2}(\log n_x)^\beta \quad \forall y \in I_x. \tag{3.3}$$

Ora, gli intervalli I_x coprono tutto $\mathcal{F}(\beta, f, M)$ e quindi possiamo estrarne un sottoricoprimento di Vitali, cioè un sottoricoprimento numerabile di intervalli $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ disgiunti di ampiezza $\frac{M}{n_i(\log n_i)^{1-\beta}}$ tali che

$$\mathcal{F}(\beta, f, M) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} 5I_i.$$

Questo ricoprimento di Vitali, ci basterà a dare maggiorazioni sulla dimensione di Hausdorff precisata di $\mathcal{F}(\beta, f, M)$; ci servono però delle stime sia su $|I_i|$ che su $|\bigcup I_i|$.

Cerchiamo di utilizzare la disuguaglianza di Hunt citata sopra e quindi chiamiamo

$$\mathcal{U}_q = \left\{ i \in \mathbb{N} : 2^q < \frac{M(\log n_i)^\beta}{2} \leq 2^{q+1} \right\}$$

e osserviamo che, a patto che $\frac{M(\log n_i)^\beta}{2} > 1$, cioè che $n_i > \exp\left[(2/M)^{1/\beta}\right]$, risulta che $\bigcup_q \mathcal{U}_q = \mathbb{N}$; siccome però gli n_i possono essere presi grandi arbitrariamente, possiamo supporre sempre che questa condizione sia verificata. Grazie a questa definizione, per ogni $i \in \mathcal{U}_q$ e per ogni $x \in I_i$, vale $S^* f(x) > 2^q$ e cioè

$$\{x : S^* f(x) > 2^q\} \supset \bigcup_{i\in\mathcal{U}_q} I_i.$$

Applicando la disuguaglianza di Hunt e ricordando che gli I_i sono a due a due disgiunti, si ha

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{i\in\mathcal{U}_q} I_i\right) &= \sum_{i\in\mathcal{U}_q} |I_i| \leq \lambda\{x \in \mathbb{T} : S^* f(x) > 2^q\} \\ &\leq A e^{-\frac{B2^q}{\|f\|_\infty}} \leq A e^{-B2^q}. \end{aligned}$$

Per ottenere l'altra disuguaglianza che ci servirà, osserviamo che, fissato $i \in \mathcal{U}_q$, n_i soddisfa $2^{q+1} < M(\log n_i)^\beta \leq 2^{q+2}$, dalla quale si ottiene

$$e^{\left(\frac{2^{q+1}}{M}\right)^{1/\beta}} < n_i \leq e^{\left(\frac{2^{q+2}}{M}\right)^{1/\beta}},$$

Questo ci serve a minorare $|I_i|$: infatti

$$|I_i| = \frac{M}{n_i(\log n_i)^{1-\beta}} \geq \frac{M}{e^{\left(\frac{2^{q+2}}{M}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{2^{q+2}}{M}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}}$$
$$= \frac{M^{\frac{1}{\beta}}}{2^{(q+2)\,\frac{1-\beta}{\beta}}}\, e^{-M^{-\frac{1}{\beta}}\, 2^{\frac{q+2}{\beta}}}.$$

Chiamiamo per comodità $y_q = 2^{\frac{q+2}{\beta}}$ e $C' = M^{-1/\beta}$, per cui $|I_i| \geq \frac{1}{C' y_q^{1-\beta}}\, e^{-C' y_q}$. Consideriamo la funzione $\frac{e^{-C't}}{t^{1-\beta}}$: se $D' \geq C' + 1 - \beta$, si verifica che $\frac{e^{-C't}}{t^{1-\beta}} \geq e^{-D't}$ per ogni $t \geq 1$, in quanto la funzione

$$t \mapsto \frac{e^{D't - C't}}{t^{1-\beta}}$$

in $t = 1$ è maggiore di 1 e la sua derivata prima è sempre positiva per $t \geq 1$. Dal momento che $y_q \geq 1$, possiamo utilizzare questa stima per avere

$$|I_i| \geq \frac{1}{C' y_q^{1-\beta}}\, e^{-C' y_q}$$
$$\geq \frac{1}{C'}\, e^{-D' y_q}$$
$$= C e^{-D 2^{q/\beta}}$$

ove le costanti positive C, D non dipendono da q.

Scelto un qualunque α tale che $1 - \beta < \alpha < \gamma$ (in particolare $\alpha \in (0, 1)$), otteniamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathcal{U}_q}\phi_{1,\alpha}(5|I_i|) &= \sum_{i\in\mathcal{U}_q}5|I_i|\exp\left(\left(\log\left(\frac{1}{5|I_i|}\right)\right)^{1-\alpha}\right)\\
&\le \sum_{i\in\mathcal{U}_q}5|I_i|\exp\left(\left(\log\left(\frac{1}{5Ce^{-D2^{q/\beta}}}\right)\right)^{1-\alpha}\right)\\
&= 5\left(\sum_{i\in\mathcal{U}_q}|I_i|\right)\exp\left(\left(D2^{q/\beta}-\log 5C\right)^{1-\alpha}\right)\\
&\le 5\left(\sum_{i\in\mathcal{U}_q}|I_i|\right)\exp\left(\left(D2^{q/\beta}\right)^{1-\alpha}\right)\\
&\le 5Ae^{-B2^q+D'2^{q(1-\alpha)/\beta}}\\
&= 5Ae^{-B2^q\left[1-\frac{D'}{B}2^{q\left(\frac{1-\alpha}{\beta}-1\right)}\right]}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Poiché $1-\alpha<\beta$, siccome $2^{q\left(\frac{1-\alpha}{\beta}-1\right)}$ è infinitesimo in q, allora in (3.4) compare il termine generale di una serie convergente; quindi esiste $C_0<+\infty$ tale che

$$
\sum_{i\in\mathbb{N}}\phi_{1,\alpha}(5|I_i|)=\sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathcal{U}_q}\phi_{1,\alpha}(5|I_i|)\le C_0.
$$

Pertanto $\mathcal{H}^{\phi_{1,\alpha}}(\mathcal{F}(\beta,f,M))\le C_0$. In particolare $\mathcal{H}^{\phi_{1,\gamma}}(\mathcal{F}(\beta,f,M))=0$, poiché $\phi_{1,\alpha}>\phi_{1,\gamma}$.

□

Osservazione 36. Le funzioni $\phi_{1,\gamma}$, per $\gamma>1-\beta$, non sono ottimali. Possiamo rimpiazzarle con

$$
\phi(x)=x(\exp((\log 1/x)^{\beta}\varepsilon(x)))
$$

con $\varepsilon(x)$ che va a 0 quando $x\longrightarrow 0$.

3.2 La costruzione base

Per ottenere l'esempio di una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto, ad esempio lo zero, il modo più semplice è quello di considerare la successione di polinomi

$$
P_N(x)=e_N(x)\sum_{j=1}^{N}\frac{\sin(2\pi jx)}{j}.
$$

Questa è una successione di polinomi trigonometrici limitati in norma $\|\cdot\|_\infty$; tuttavia si verifica che $|S_N P_N(0)| = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}$ e dunque $|S_N(P_N)(0)|$ si comporta come $\frac{1}{2}\log N$. Questo semplice esempio è, in un certo senso, ottimale, perché sappiamo che $\|S_N f\|_\infty \leq C(\log N)\|f\|_\infty$ per ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Ciò che serve a noi, invece, è un polinomio trigonometrico P dotato di una proprietà simile, ma più forte: vogliamo che la sua serie di Fourier diverga non solo in un punto ma in un insieme di dimensione di Hausdorff 1. Nell'esempio sopra enunciato non è chiaro se questo avvenga perché, siccome $|(S_N P_N)'(0)|$ si comporta come N che è molto maggiore di $|S_N P_N(0)|$ per N grande, a priori $|S_N P(x)|$ potrebbe essere molto piccolo anche per valori di x vicini a 0.

Per costruire una funzione che faccia al caso nostro, dovremmo controllare simultaneamente la misura dell'insieme di divergenza E e l'indice n da cui le somme di Fourier cominciano ad essere abbastanza grandi su ciascun punto di E.

Cominciamo col costruire una funzione olomorfa su un intorno del disco $\overline{\mathbb{D}}$; identificheremo per semplicità $\mathbb{T}$ come il bordo del disco unitario $\mathbb{D}$. Questa costruzione ci sarà utile nel seguito.

Per ogni $k \geq 1$ e $\omega \geq 1$, poniamo

$$J_k^\omega := \bigcup_{j=0}^{k-1}\left[\frac{j}{k} - \frac{1}{2\omega k}, \frac{j}{k} + \frac{1}{2\omega k}\right]$$

e, per comodità, poniamo $\varepsilon = \frac{1}{k\omega}$, in modo che J_k^ω sia unione di intervalli di lunghezza ε. Con la convenzione usata, vediamo tali intervalli come parti di $\partial\mathbb{D}$.

Definiamo poi $z_j = e^{\frac{2\pi i j}{k}}$ per $j = 0, \ldots, k-1$ e consideriamo la funzione f data da

$$f(z) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}.$$

Vale il seguente lemma.

Lemma 37. *La funzione f è olomorfa in un intorno su $\overline{\mathbb{D}}$. Inoltre esistono tre costanti assolute $C_1, C_2, C_3 > 0$ tali che, per ogni $k \geq 3$ e per ogni $\omega \geq \log k$, si può trovare una funzione f che è olomorfa in un intorno di $\mathbb{D}$ e che soddisfa*

(i) $\Re e\, f(z) \geq \frac{C_1}{\omega k}$, *per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$;*

(ii) $|f(z)| \geq C_2\omega$, *per ogni $z \in J_k^\omega$;*

(iii) $|f(z)| \leq C_3\omega$, *per ogni* $z \in \mathbb{T}$;

(iv) $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \omega k$, *per ogni* $z \in \mathbb{T}$.

Dimostrazione. Anzitutto ricordiamo che $\varepsilon = \frac{1}{k\omega} \leq \frac{1}{k \log k}$. Osserviamo poi che se $z \in \overline{\mathbb{D}}$, i denominatori che compongono f verificano

$$|1+\varepsilon - \overline{z_j}z| \geq |1+\varepsilon| - |\overline{z_j}z| \geq 1+\varepsilon-1 = \varepsilon > 0,$$

pertanto sono sempre non nulli; quindi f definisce una funzione olomorfa su un intorno di $\overline{\mathbb{D}}$.
(i) Per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$ e ogni $j \in \{0, \dots, k-1\}$, si ha

$$\Re e\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right) = \frac{1+\varepsilon}{|1+\varepsilon-\overline{z_j}z|^2} \cdot \Re e\,(1+\varepsilon - z_j\overline{z}) \geq \frac{1+\varepsilon}{(2+\varepsilon)^2}\cdot\varepsilon.$$

Poiché la funzione $\varphi(t) = \frac{1+t}{(2+t)^2}$ è tale che $\varphi(0) = 1/4$ e $\varphi'(t) = \frac{-t^2-2t}{(2+t)^4} \leq 0$ per ogni $t \geq 0$, allora 0 è punto di massimo per la funzione φ sulla semiretta positiva, per cui

$$\Re e\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right) \geq \frac{1}{4}\varepsilon; \tag{3.5}$$

quindi la tesi vale con $C_1 = 1/4$.

(ii) Qui ci serve una stima più fine. Osserviamo che se $z \in I_k^\beta$, esiste j_0 tale che $z \in \left[\frac{j_0}{k} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{j_0}{k} + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, per cui $z\overline{z_{j_0}} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Questo ci garantisce che $\Re e\,(z\overline{z_{j_0}})$ è vicino a 1; più precisamente $\Re e\,(z\overline{z_{j_0}}) \geq \cos(\varepsilon/2)$.

Poiché $1 - \cos\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon^2}{8}$ e $\sin\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$, si ha

$$\begin{aligned}|1+\varepsilon-\overline{z_{j_0}}z| &= (1+\varepsilon - \Re e\,\overline{z_{j_0}}z)^2 + (\Im m\,\overline{z_{j_0}}z)^2 \\ &\leq \left(1+\varepsilon-\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ &< \left(\frac{\varepsilon^2}{8}+\varepsilon^2\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \leq 2\varepsilon^2,\end{aligned}$$

e

$$\Re e\,(1+\varepsilon-\overline{z_{j_0}}z) = 1+\varepsilon-\Re e\,\overline{z_{j_0}}z \geq 1+\varepsilon-\cos\frac{\varepsilon}{2} \geq 1+\varepsilon-1 = \varepsilon.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Re e\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_{j_0}}z}\right) &= \frac{1+\varepsilon}{|1+\varepsilon-\overline{z_{j_0}}z|^2}\cdot\Re e\,(1+\varepsilon-z_{j_0}\overline{z}) \\ &\geq \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \\ &> \frac{1}{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Dunque, utilizzando per $j \neq j_0$ la stima (3.5), si trova

$$
\begin{aligned}
|f(z)| \geq \Re e\, f(z) &\geq \frac{1}{2k\varepsilon} + \frac{k-1}{k}.\frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{1}{2k\varepsilon} \\
&= \frac{\omega}{2}.
\end{aligned}
$$

Quindi la tesi vale con $C_2 = 1/2$.
(iii) Dobbiamo controllare f sulla circonferenza.
Innanzi tutto, osserviamo che la tesi è invariante per rotazioni di angoli $\frac{2\pi j}{k}$ per $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, in quanto, per ogni j, $f(e^{2\pi i\theta}) = f(e^{2\pi i(\theta + j/k)})$. Quindi, siccome gli z_j dividono la circonferenza in k archi di lunghezza $2\pi/k$ con centro in z_j, possiamo supporre sempre (a meno di rotazione) che z stia nel settore di centro 0, quindi $z = e^{2\pi i\theta}$ con $|\theta| \leq \frac{1}{2k}$.
Con questa semplificazione, vogliamo stimare i vari addendi che compongono f dividendo la somma in pezzi.
Per $j = 0$, siccome $|1 + \varepsilon - \overline{z_0}z| \geq |1 + \varepsilon| - |\overline{z_0}z|| \geq 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$, si ha

$$
\left| \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon - \overline{z_0}z} \right| \leq \frac{2}{\varepsilon}.
$$

Per ogni $j \in \{1, \ldots, [k/4]-1\}$, poiché $\frac{j}{k} - \theta \in [\frac{1}{2k}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2k}]$ e poiché la funzione $\sin(2\pi x)$ è concava fra 0 e $1/4$, cioè $\sin(2\pi x) \geq 4x$, il denominatore verifica

$$
\begin{aligned}
|1 + \varepsilon - z\overline{z_j}| &\geq |\Im m\, (\overline{z_j}z)| \\
&\geq \sin\left(\frac{2\pi j}{k} - 2\pi\theta\right) \\
&\geq 4 \cdot \left(\frac{j}{k} - \theta\right) \\
&\geq \frac{4}{k}\left(j - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Sommando su tutti i j in questo insieme,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{[k/4]-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right| &\leq \frac{k}{4}\,(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{[k/4]-1}\frac{1}{j-1/2}\\
&= \frac{k}{4}\,(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{[k/4]-1}\frac{2}{2j-1}\\
&\leq \frac{k}{2}\,(1+\varepsilon)\sum_{h=1}^{[k/2]-2}\frac{1}{h}\\
&\leq \frac{k}{2}\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h}\\
&\leq \frac{k}{2}\log k.
\end{aligned}$$

Per $j \in \{[\frac{3}{4}k]+1,\dots,k-1\}$, otteniamo lo stesso risultato. Infatti, in tal caso, poiché $\frac{j}{k}-\theta \in [\frac{3}{4}+\frac{1}{2k}, 1-\frac{1}{k}]$ e poiché la funzione $\sin(2\pi x)$ è convessa fra 3/4 e 1, cioè $\sin(2\pi x) \leq -4(x-1)$, si ha

$$\begin{aligned}
|1+\varepsilon-z\overline{z_j}| &\geq |\Im m\,(\overline{z_j}z)|\\
&\geq \left|\sin\left(\frac{2\pi j}{k}-2\pi\theta\right)\right| = -\sin\left(\frac{2\pi j}{k}-2\pi\theta\right)\\
&\geq -4\cdot\left(\frac{j}{k}-\theta-1\right) = 4\cdot\left(\theta+1-\frac{j}{k}\right)\\
&\geq \frac{4}{k}\left(k-j-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sommando su tutti i j in questo insieme e ragionando esattamente come prima, si trova

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=[\frac{3}{4}k]+1}^{k-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right| &\leq \frac{k}{4}(1+\varepsilon)\sum_{j=[\frac{3}{4}k]+1}^{k-1}\frac{1}{k-j-1/2}\\
&= \frac{k}{4}(1+\varepsilon)\sum_{h=1}^{[k/4]-1}\frac{1}{h-1/2}\\
&\leq \frac{k}{2}\log k.
\end{aligned}$$

Rimane da vedere la somma per $j \in \{[\frac{k}{4}],\dots,[\frac{3}{4}k]\}$. Per tali j, siccome $\overline{z_j}z = e^{2\pi i(\theta-\frac{j}{k})}$ e $(\frac{j}{k}-\theta) \in [\frac{1}{4}-\theta, \frac{3}{4}+\theta]$, per $k \geq 3$, si ha $(\frac{j}{k}-\theta) \in [\frac{1}{12}, \frac{11}{12}]$

(ricordiamo che $|\theta| \leq 1/2k$); quindi

$$|1+\varepsilon-\overline{z_j}z| \geq \Re e\,(1+\varepsilon-\overline{z_j}z) \geq 1+\varepsilon-\cos(\overline{z_j}z) \geq 1+\varepsilon-\sqrt{3}/2 \geq 1-\sqrt{3}/2.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=[k/4]}^{[3k/4]} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right| &\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\sqrt{3}/2}\left|\sum_{j=[k/4]}^{[3k/4]} 1\right| \leq \frac{2}{1-\sqrt{3}/2}\left|\sum_{j=[k/4]}^{[3k/4]} 1\right| \\
&\leq \frac{2}{1-\sqrt{3}/2}\left|\sum_{j=0}^{k} 1\right| = \frac{2(k+1)}{1-\sqrt{3}/2} \\
&< \frac{3k}{1-\sqrt{3}/2}.
\end{aligned}$$

Possiamo mettere insieme le stime, tenendo conto dell'ipotesi $\log k \leq \omega = \frac{1}{k\varepsilon}$ e che $k\varepsilon \leq \frac{1}{\log k} \leq \frac{1}{\log 3}$ per $k \geq 3$: si ha

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right| \\
&\leq \frac{1}{k}\left[\left|\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_0}z}\right| + \left|\sum_{j=1}^{[k/4]-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right|\right. \\
&\qquad \left. + \left|\sum_{j=[\frac{3}{4}k]+1}^{k-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right| + \left|\sum_{j=[k/4]}^{[3k/4]} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}\right|\right] \\
&\leq \frac{1}{k}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{k\log k}{2} + \frac{k\log k}{2} + \frac{3k}{1-\sqrt{3}/2}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{2}{\varepsilon} + k\log k + \frac{3k}{1-\sqrt{3}/2}\right) \\
&\leq \frac{1}{k}\left(\frac{2}{\varepsilon} + k\,\frac{1}{k\varepsilon} + \frac{3k}{1-\sqrt{3}/2}\right) \\
&\leq \frac{3}{k\varepsilon} + \frac{3}{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{k\varepsilon}\,(3+30k\varepsilon) \\
&\leq \frac{1}{k\varepsilon}\left(3+\frac{30}{\log 3}\right) = \omega\left(3+\frac{30}{\log 3}\right).
\end{aligned}$$

Perciò la tesi vale con $C_3 = 3 + \frac{30}{\log 3}$.
(iv) Osserviamo che

$$f'(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(1+\varepsilon)\overline{z_j}}{(1+\varepsilon - \overline{z_j} z)^2},$$

per cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\overline{z_j}}{(1+\varepsilon-\overline{z_j}z)^2}}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+\varepsilon-\overline{z_j}z}}.$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| &\leq \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|1+\varepsilon-\overline{z_j}z|^2}}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Re e\,(1+\varepsilon-z_j\overline{z})}{|1+\varepsilon-\overline{z_j}z|^2}} \\ &\leq \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|1+\varepsilon-\overline{z_j}z|^2}}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varepsilon}{|1+\varepsilon-\overline{z_j}z|^2}} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} = \omega k. \end{aligned}$$

Dunque la tesi è provata.

□

Corollario 38. *Si considerino fissate le ipotesi di questo paragrafo.*

- *Sia $h(z) = \log f(z)$. Allora h è una funzione olomorfa in $\overline{\mathbb{D}}$ tale che $h(0) = 0$ e $|\Im m\, h(z)| < \frac{\pi}{2}$.*
- *La funzione reale $g(x) = h(e^{2\pi i x})$ verifica*
  - (ii') $|g(x)| \geq \log \omega + \log C_2$, *per ogni $x \in J_k^\omega$;*
  - (iii') $|g(x)| \leq \log \omega + \log C_3$, *per ogni $x \in \mathbb{T}$;*
  - (iv') $|g'(x)| \leq 2\pi k \omega$, *per ogni $x \in \mathbb{T}$.*

Dimostrazione. Siccome la proprietà (i) garantisce che $|f(z)| \geq \Re e\, f(z) \geq C_1 \varepsilon > 0$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$, il logaritmo risulta ben definito e pertanto h è una funzione olomorfa su $\overline{\mathbb{D}}$.
In particolare si ha

$$|\Im m\, h(z)| = |\arg f(z)| < \frac{\pi}{2}$$

per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Le (ii') e (iii') seguono immediatamente dalle (ii) e (iii) del lemma 37. Invece per (iv'), osserviamo che, siccome

$$|g(x)| = |\log(f(e^{2\pi ix}))| \geq \Re e\ \log(f(e^{2\pi ix})) \geq \log|f(e^{2\pi ix})|,$$

e siccome per ogni funzione olomorfa F

$$\frac{d}{dz}\log F(z) = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

allora si ha

$$|g'(x)| = \left|h'(e^{2\pi ix}) \cdot 2\pi i e^{2\pi ix}\right| = \left|\frac{f'(e^{2\pi ix})}{f(e^{2\pi ix})}\right| \cdot 2\pi. \tag{3.6}$$

Dunque, usando la (iv) del lemma 37 si trova

$$|g'(x)| = \left|\frac{f'(e^{2\pi ix})}{f(e^{2\pi ix})}\right| \cdot 2\pi \leq 2\pi k\omega,$$

e quindi si ottiene la tesi.

□

3.3 Calcolo della dimensione precisata

Lemma 39. *Siano $\beta \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$ e $K \geq 3$. Allora esistono un intero $k \geq K$, un intero positivo n e un polinomio trigonometrico P con spettro contenuto in $[0, 2n-1]$ tali che*

- $|P(x)| \leq 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{T}$;
- $\log|S_nP(x)| \geq (1-\delta)\beta\log\log n$ *per ogni* $x \in I_k^\beta$,

dove

$$I_k^\beta = \bigcup_{j=0}^{k-1}\left[\frac{j}{k} - \frac{1}{2k\exp((\log k)^\beta)}, \frac{j}{k} + \frac{1}{2k\exp((\log k)^\beta)}\right].$$

Dimostrazione. Descriviamo prima l'idea della dimostrazione. Costruiremo un polinomio trigonometrico Q tale che $|\Im m\, Q|$ sia piccolo e $|Q|$ sia grande sull'insieme I_k^β per un determinato valore di k. Porremo poi $P = e_n \Im m\, Q$, in modo che $\|P\|_\infty$ sarà piccola. D'altra parte, se scriviamo $Q = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, e_k$, si ha

$$2i\Im m\, Q = 2i\,\frac{Q - \overline{Q}}{2i} = -\sum_{k=1}^{n-1}\overline{a_k}\, e_{-k} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, e_k$$

e quindi

$$\begin{aligned}
P &= e_n \left[\frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{a_k}\, e_{-k} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, e_{n+k} - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{a_k}\, e_{n-k} \right).
\end{aligned}$$

Siccome la n-esima somma di Fourier seleziona solo i coefficienti di Fourier in $[-n, n]$, si ha di conseguenza che

$$\begin{aligned}
|S_n(P)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{a_k}\, e_{n-k} \right| = \frac{1}{2} |e_n| \left| \sum_{k=1}^{n-1} \overline{a_k}\, e_{n-k} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k \right| = \frac{1}{2} |Q| \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

risulterà grande su I_k^β. La costruzione di Q sarà fatta prendendo una opportuna somma di Fejér di $\log f$. In particolare, il logaritmo ci permetterà di controllare la parte immaginaria di $\log f$ anche se il suo modulo può essere grande.

Prendiamo $\omega = \exp[(\log k)^\beta]$; in particolare $1 \le (\log k)^\beta \le \exp[(\log k)^\beta]$. Quindi possiamo considerare gli intevalli corrispondenti J_k^ω, che sono esattamente gli I_k^β, e le funzioni f, g e h, che verificano le proprietà del lemma 37 e del corollario 38.

Sia $C = 2\pi\omega$ e sia n il più piccolo intero tale che

$$Ck^3 \exp(3(\log k)^\beta) \le n \qquad (3.8)$$

in modo che $\|g'\|_\infty \le n$ per (iv'). Dunque, fissato $x \in I_k^\beta$, possiamo applicare la seconda parte del lemma 4 alla funzione $\theta(t) = g(t) - g(x)$ definita su $\mathbb{T}$. Poiché, in base a (iii'), $\|\theta\|_\infty \le 2(\log k)^\beta + C$, otteniamo

$$|\sigma_n \theta(t)| \le \frac{(\log k)^\beta}{2} + C \qquad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Essendo $\sigma_n \theta(t) = \sigma_n g(t) - g(x)$, concludiamo che, anche in base a (ii'),

$$|\sigma_n g(t)| \ge |g(x)| - |\sigma_n \theta(t)| \ge \frac{(\log k)^\beta}{2} - C \qquad \forall t \in \mathbb{T}. \qquad (3.9)$$

Vogliamo mettere in atto la strategia preannunciata all'inizio. Dunque sia Q il polinomio

$$Q = \frac{2}{\pi}\, \sigma_n(\Im m\ g) = \frac{2}{\pi}\, \Im m\ (\sigma_n g).$$

Chiamiamo poi P il polinomio

$$P = e_n Q = \frac{2}{\pi} e_n \Im m\,(\sigma_n g),$$

e verifichiamo che P soddisfa la tesi.
Innanzi tutto, per ogni $z \in \overline{\mathbb{D}}$, abbiamo osservato che $|\Im m\ h(z)| < \pi/2$ e inoltre, siccome σ_n è una funzione 1-lipschitziana in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$,

$$|P(x)| = \frac{2}{\pi}|e_n| \cdot |\sigma_n \Im m\ g(x)| \leq \frac{2}{\pi}|\Im m\ g(x)| < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1,$$

quindi $\|P\|_\infty \leq 1$. Si noti che questa maggiorazione è fondata sul controllo della parte immaginaria di Q.

Occupiamoci ora dello spettro di P che risulterà il traslato di n dello spettro di Q. Poiché

$$\Im m\,(e^{2\pi ik}) = \sin(2\pi k) = \frac{e^{2\pi ik} - e^{2\pi ik}}{2i},$$

data un qualsiasi funzione φ con spettro in $[a, b]$ lo spettro di $\Im m\,(\varphi)$ è contenuto in $[-b, -a] \cup [a, b]$. Perciò, poiché lo spettro di $\sigma_n g$ è contenuto in $[0, n-1]$, lo spettro di $\Im m\,(\sigma_n g)$ è contenuto in $[-(n-1), n-1]$. In definitiva cioè lo spettro di P è contenuto in $[1, 2n-1]$, come volevamo.

Infine resta da calcolare la stima di $\frac{\log S_n P}{\log \log n}$ sull'insieme I_k^β. Ricordando che $P = \frac{2}{\pi}\, e_n\, \Im m\,(\sigma_n g)$ e ricordando (3.7), si ha

$$|S_n P(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \sigma_n g(x) \right|,$$

e quindi, in base a (3.9),

$$|S_n P(t)| \geq \frac{1}{2\pi}(\log k)^\beta - C \qquad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Perciò

$$\log |S_n P(t)| \geq \beta \log \log k - C \qquad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Dall'altra parte, n è stato scelto come il più piccolo intero per cui vale (3.8), perciò

$$Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta] \geq n - 1,$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\log n &\leq \log(Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta] + 1) \\
&= \log \left\{ Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta] \left(1 + \frac{1}{Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta]} \right) \right\} \\
&= \log(Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta]) + \log \left(1 + \frac{1}{Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta]} \right) \\
&\leq \log(Ck^3 \exp[3(\log k)^\beta]) + \log 2 \\
&= \log C + 3\log k + 3(\log k)^\beta + \log 2 \\
&= 3\log k + 3(\log k)^\beta + C.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\log\log n &\leq \log(3\log k + 3(\log k)^\beta + \log C) \\
&\leq \log \left[3\log k \left(1 + (\log k)^{\beta-1} + \frac{C}{3\log k} \right) \right] \\
&\leq \log 3 + \log\log k + \log(2 + C) \\
&\leq \log\log k + C.
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme le due stime si trova dunque

$$
\frac{\log |S_n P(x)|}{\log\log n} \geq \frac{\beta \log\log k - C}{\log\log k + C} \geq (1-\delta)\beta, \tag{3.10}
$$

per k abbastanza grande, in quanto la funzione $k \mapsto \frac{\beta \log\log k - C}{\log\log k + C}$ per $k \longrightarrow +\infty$ tende al valore β.

□

Osservazione 40. Nella costruzione, gli interi n e k non possono essere scelti indipendentemente l'uno dall'altro: essi infatti soddisfano

$$
n - 1 \leq Ck^3 \exp(3(\log k)^\beta) \leq n,
$$

dove C è una costante assoluta. Se vogliamo costruire un polinomio P che soddisfi le conclusioni del lemma 39 con n molto grande, dobbiamo scegliere un k molto grande.

Siamo ora in grado di concludere.

Teorema 41. *Per ogni $\beta \in [0,1]$, per ogni funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ad eccezione di un insieme di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, la dimensione di Hausdorff precisata di $F(\beta, f)$ è $(1, 1-\beta)$.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione di polinomi trigonometrici (f_j) densa in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ e supponiamo che $\|f_j\|_\infty \leq j$; in particolare lo spettro di f_j sarà contenuto in $[-j, j]$. Fissiamo anche quattro successioni (α_l), (β_l), (δ_l) e (ε_l) con valori in $(0, 1)$ e tali che:

- (β_l) sia densa in $(0, 1)$ e $l \mapsto \beta_l$ sia iniettiva;
- $\sum_l \varepsilon_l \leq 1$;
- (δ_l) e (α_l) siano infinitesime;
- $\delta_l < 1/3$.

Sia ora $j \geq 1$. Costruiamo per induzione su $l = 1, \ldots, j$, un polinomio $P_{j,l}$ e due interi $n_{j,l}$ e $k_{j,l}$ che soddisfino le conclusioni del lemma 39 con $\beta = \beta_l$, $\delta = \delta_l$ e $K = j$. In particolare, possiamo supporre che valga $k_{j,l} > k_{j,l-1} \geq K = j$ per $l = 2, \ldots, j$, da cui anche $n_{j,l} > n_{j,l-1}$ per $l = 2, \ldots, j$ e in particolare, per ogni fissato l, si ha $k_{j,l}, n_{j,l} \longrightarrow +\infty$ per $j \longrightarrow +\infty$. Per quanto già detto nell'osservazione 40, i valori di $n_{j,l}$ e $k_{j,l}$ sono legati fra loro: in particolare, possiamo determinare i valori di $n_{j,l}$ e, a partire da questi, trovare i corrispondenti $k_{j,l}$.

Poniamo dunque

$$g_j := f_j + \alpha_j \sum_{l=1}^{j} \varepsilon_l e_{n_{j,l}} P_{j,l}.$$

I polinomi g_j sono ancora densi in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ in quanto $\|g_j - f_j\|_\infty \leq \alpha_j$, che tende a 0 per $j \longrightarrow +\infty$.
Ricordiamo che lo spettro di f_j è contenuto in $[-j, j]$ e osserviamo che lo spettro di $e_{n_{j,l}} P_{j,l}$ è contenuto in $[n_{j,l}, 3n_{j,l} - 1]$. Se ora supponiamo che $n_{j,1} \geq j+1$ e $n_{j,l+1} \geq 3n_{j,l}$, possiamo concludere che gli spettri di f_j, $e_{n_{j,1}} P_{j,1}, \ldots, e_{n_{j,j}} P_{j,j}$ sono disgiunti.

Vediamo che opportune somme di Fourier di g_j sono "grandi" su determinati insiemi.
Sia x in $I^{\beta_l}_{k_{j,l}}$ per qualche $l \leq j$ e calcoliamo $|S_{2n_{j,l}} g_j(x)|$. Osserviamo innanzi tutto che $e_{n_{j,l+1}} P_{j,l+1}$ ha coefficienti di Fourier che stanno oltre $n_{j,l+1} \geq 3n_{j,l} > 2n_{j,l}$. Quindi per ogni $m \geq l+1$ gli spettri di $e_{n_{j,m}} P_{j,m}$ non intersecano $[-2n_{j,l}, 2n_{j,l}]$. Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
|S_{2n_{j,l}}g_j(x)| &= \left|S_{2n_{j,l}}f_j(x) + \alpha_j \sum_{m=1}^{j} \varepsilon_l\, S_{2n_{j,l}}(e_{n_{j,l}}\, P_{j,l})\right| \\
&= \left|S_{2n_{j,l}}f_j(x) + \alpha_j \sum_{m=1}^{l} \varepsilon_l\, S_{2n_{j,l}}(e_{n_{j,l}}\, P_{j,l})\right| \\
&= \Bigg|S_{2n_{j,l}}f_j(x) + \alpha_j \varepsilon_l S_{2n_{j,l}}\left(e_{n_{j,l}} P_{j,l}\right)(x) + \\
&\qquad\qquad + \alpha_j S_{2n_{j,l}}\left(\sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}\right)(x)\Bigg| \\
&\geq \alpha_j \varepsilon_l |S_{2n_{j,l}}\left(e_{n_{l,l}} P_{j,l}\right)(x)| - \alpha_j \left|S_{2n_{j,l}}\left(\sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}\right)(x)\right| - \\
&\qquad\qquad - \left|S_{2n_{j,l}}f_j(x)\right|
\end{aligned}
$$

Siccome f è un polinomio trigonometrico con spettro in $[-j, j] \subset [-2n_{j,l}, 2n_{j,l}]$, esso coincide con la sua serie di Fourier e anzi

$$
\left|S_{2n_{j,l}}f_j(x)\right| = |f_j(x)| \leq \|f_j\|_\infty \leq j.
$$

La stessa cosa vale per il termine $\sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}$ i cui addendi hanno spettri contenuti anch'essi in $[-2n_{j,l}, 2n_{j,l}]$ e quindi

$$
\begin{aligned}
\left|\alpha_j S_{2n_{j,l}}\left(\sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}\right)(x)\right| &= \left|\alpha_j \sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}(x)\right| \\
&\leq \alpha_j \sum_{m=1}^{l-1} \left|\varepsilon_m e_{n_{j,m}} P_{j,m}\right| \leq \alpha_j \sum_{m=1}^{l-1} \varepsilon_m \|P_{j,m}\|_\infty \\
&\leq \alpha_j.
\end{aligned}
$$

Infine occupiamoci del termine $e_{n_{l,l}} P_{j,l}$: per quanto detto in precedenza, posto $P_{j,l} = \sum_{h=0}^{2n_{j,l}-1} c_h\, e_h$ si ha $e_{n_{l,l}} P_{j,l} = \sum_{p=n_{j,l}}^{3n_{j,l}-1} c_{p-n_j,l}\, e_p$, quindi

$$
S_{2n_{j,l}}\left(e_{n_{l,l}} P_{j,l}\right) = \sum_{p=n_{j,l}}^{2n_{j,l}} c_{p-n_j,l}\, e_p;
$$

inoltre, poiché $|e_{n_{j,l}}| = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\left|S_{2n_{j,l}}\left(e_{n_{l,l}}P_{j,l}\right)\right| &= \left|\sum_{p=n_{j,l}}^{2n_{j,l}} c_{p-n_j,l}\, e_p\right| \cdot |e_{-nj,l}| \\ &= \left|\sum_{h=0}^{n_j,l} c_h\, e_h\right| = \left|S_{n_{j,l}}P_{j,l}\right|.\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme si trova

$$|S_{2n_{j,l}}g_j(x)| \geq \alpha_j\varepsilon_l|S_{n_{j,l}}P_{j,l}(x)| - \alpha_j - j.$$

Fissati l e j siccome il lemma 39 garantisce che esiste $n_{j,l}$ grande quanto vogliamo per cui $\log|S_{n_{j,l}}P_{j,l}(x)| \geq (1-\delta_l)\beta_l \log\log n_{j,l}$; allora, a meno di scegliere $n_{j,l}$ abbastanza grande in modo che $(1-\delta_l)\beta_l \log\log n_{j,l} \geq \log 2 + \log(\alpha_j + j) - \log\alpha_j - \log\varepsilon_l$, si ha $|S_{n_{j,l}}P_{j,l}(x)| \geq 2\,\frac{\alpha_j+j}{\alpha_j\varepsilon_l}$, per cui

$$|S_{2n_{j,l}}g_j(x)| \geq \frac{\alpha_j\varepsilon_l}{2}|S_{n_{j,l}}P_{j,l}(x)|.$$

Prendendo il logaritmo e usando (3.10), si trova

$$\begin{aligned}\log|S_{2n_{j,l}}g_j(x)| &\geq \log|S_{n_{j,l}}P_{j,l}(x)| + \log\varepsilon_l + \log\alpha_j - \log 2 \\ &\geq (1-\delta_l)\beta_l\log\log n_{j,l} + \log\varepsilon_l + \log\alpha_j - \log 2 \\ &\geq (1-2\delta_l)\beta_l\log\log n_{j,l}\end{aligned}$$

dove abbiamo supposto di prendere $n_{j,l}$ abbastanza grande in modo che $\log\log n_{j,l} \geq \log\left[\left(\frac{2}{\varepsilon_l\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\beta_l\delta_l}}\right]$.

Adesso fissiamo $r_j > 0$ abbastanza piccolo affinché, per ogni $f \in B(g_j, r_j)$ (palle relative alla norma $\|\cdot\|_\infty$) e per ogni $l \leq j$,

$$\|S_{2n_{j,l}}f - S_{2n_{j,l}}g_j\|_\infty \leq 1/2.$$

Infatti siccome

$$\|S_{2n_{j,l}}f - S_{2n_{j,l}}f_j\|_\infty = \|S_{2n_{j,l}}(f-f_j)\|_\infty \leq \sum_{|k|\leq 2n_{j,l}} |\langle f-g, e_k\rangle| \leq (4n_{j,l}+1)r_j$$

e siccome $n_{j,j} \geq n_{j,l}$ per ogni $l \leq j$, allora, posto $r_j = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4n_{j,l}+1}$ si trova che

$$\|S_{2n_{j,l}}f - S_{2n_{j,l}}g_j\|_\infty \leq (4n_{j,l}+1)r_j \leq (4n_{j,l}+1)\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{4n_{j,l}+1} = \frac{1}{2}.$$

In particolare per ogni $x \in I^{\beta_l}_{k_{j,l}}$ si ha che $|S_{2n_{j,l}}f(x)| \geq |S_{2n_{j,l}}g(x)| - \frac{1}{2}$. Allora per ogni $x \in I^{\beta_l}_{k_{j,l}}$ con $l \leq j$, applicando il lemma 39, si ha

$$\begin{aligned}\log|S_{2n_{j,l}}f(x)| &\geq \log|S_{2n_{j,l}}g_j(x)| - \log 2\\ &\geq (1-2\delta_l)\beta_l \log\log(n_{j,l}) - \log 2\\ &\geq (1-3\delta_l)\beta_l \log\log(n_{j,l}),\end{aligned}$$

se $n_{j,l}$ sono scelti abbastanza grandi in modo che $\delta_l\beta_l \log\log(n_{j,l}) \geq \log 2$. Ricapitoliamo le ipotesi che abbiamo richiesto su $n_{j,l}$ per assicuraci che siano lecite; per ogni j e per ogni $l = 0, 1, \ldots, j$ deve essere:

$$\begin{cases} n_{j,1} \geq j+1 \text{ e } n_{j,l+1} \geq 3n_{j,l}\\ n_{j,l} \geq \left(2\frac{\alpha_j + j}{\alpha_j \varepsilon_l}\right)^{\frac{1}{(1-\delta_l)\beta_l}}\\ n_{j,l} \geq \left(\frac{2}{\varepsilon_l \alpha_j}\right)^{\frac{1}{\beta_l\delta_l}}\\ n_{j,l} \geq 2^{\frac{1}{\delta_l\beta_l}}\end{cases}$$

Per ogni fissato j, per induzione su $l = 1, \ldots, j$ è sempre possibile scegliere $n_{j,l}$ grande a piacere in modo che sia verificato il sistema; quindi effettivamente non ci sono conflitti.

Siamo ora pronti a considerare l'insieme

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq p} B(g_j, r_j) = \limsup_{j\to+\infty} B(g_j, r_j),$$

il cui complementare B è di prima categoria e affermiamo che A è l'insieme denso cercato.

Infatti, sia f appartenente ad A e sia (j_p) una successione strettamente crescente di interi tali che per ogni $p \geq 0$, $f \in B(g_{j_p}, r_{j_p})$. Consideriamo $\beta \in (0,1)$ e costruiamo per induzione una successione di numeri (β_{l_p}) di numeri positivi inferiori a β che tende a β.
Sia p_0 tale che

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_{j_{p_0}}\} \cap (0, \beta) \neq \emptyset.$$

Un tale p_0 esiste perché la successione $(\beta_l)_{l\geq 1}$ è densa in $(0,1)$. Adesso per ogni $p \geq p_0$ sia l_p così definito:

$$\beta - \beta_{l_p} = \inf\{\beta - \beta_l : l \leq j_p \text{ e } \beta_l < \beta\}.$$

Osserviamo che, al crescere di p, j_p cresce e quindi l'insieme di cui si cerca l'estremo inferiore diventa più grande. Ciò significa che la successione $(l_p)_{p\geq p_0}$ è crescente ed inoltre, per densità di (β_l) in $(0,1)$, tende all'infinito per p che tende all'infinito. La sottosuccessione (β_{l_p}) verifica $\beta_{l_p} < \beta$ e $\beta_{l_p} \longrightarrow \beta$, come richiesto.

Osserviamo che, per $p \geq p_0$, $I^{\beta}_{k_{j_p,l_p}} \subset I^{\beta_{l_p}}_{k_{j_p,l_p}}$, proprio perché $\beta_{l_p} < \beta$, cosicché per ogni $x \in I^{\beta}_{k_{j_p,l_p}}$, ponendo $N_p = 2n_{j_p,l_p}$, si trova che

$$\log |S_{N_p} f(x)| \geq (1 - 3\delta_{l_p})\beta_{l_p} \log\log N_p.$$

In particolare, posto $F = \limsup_p I^{\beta}_{k_{j_p,l_p}}$, si trova che

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log\log n} \geq \beta$$

per ogni $x \in F$.

Consideriamo adesso la funzione ϕ definita mediante la sua inversa tramite

$$\phi^{-1}(y) = \eta(y) = y e^{-(\log(\frac{1}{2y}))^{\beta}}.$$

Verifichiamo che questa definizione è lecita e in particolare dimostriamo che η è crescente in un intervallo del tipo $[0, \delta]$ e che $\eta(0) = 0$. Innanzi tutto il limite di $\eta(y)$ per $y \longrightarrow 0$ esiste ed è 0. Inoltre la derivata di η è

$$\eta'(y) = e^{-(\log(\frac{1}{2y}))^{\beta}} \left[1 + \beta \left(\log \frac{1}{2y} \right)^{\beta - 1} \right]$$

che è certamente positiva in $[0, 1/2]$; quindi in particolare η è invertibile in questo intervallo e la sua inversa ϕ, definita su $[0, \eta(1/2)] = [0, 1/2]$, è anch'essa crescente con $\phi(0) = 0$. In particolare, quindi ϕ risulta una funzione dimensione.

Inoltre ϕ verifica le ipotesi del corollario 6, ossia che $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ sia monotona e m$x^{-1}\phi(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow 0$. Utilizzando la regola di derivazione della funzione inversa, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{\phi(x)}{x} &= \frac{\phi'(x)}{x} - \frac{\phi(x)}{x^2} = \frac{1}{x(\phi^{-1})'(\phi(x))} - \frac{\phi(x)}{x^2} \\
&= \frac{e^{(\log(\frac{1}{2\phi(x)}))^{\beta}}}{x\left[1 + \beta\left(\log \frac{1}{2\phi(x)}\right)^{\beta-1}\right]} - \frac{\phi(x)}{x^2} \\
&= \frac{x e^{(\log(\frac{1}{2\phi(x)}))^{\beta}} - \phi(x)\left[1 + \beta\left(\log \frac{1}{2\phi(x)}\right)^{\beta-1}\right]}{x^2\left[1 + \beta\left(\log \frac{1}{2\phi(x)}\right)^{\beta-1}\right]};
\end{aligned}$$

poiché $x = \phi^{-1}(y)$ si ottiene che il denominatore è sempre positivo e il numeratore è

$$y - y\left[1 + \beta\left(\log\frac{1}{2y}\right)^{\beta-1}\right]$$

e pertanto è sempre negativo. In altre parole la funzione $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ è decrescente in $[0, 1/2]$. Inoltre, dato che $\frac{y}{\eta(y)} \longrightarrow +\infty$ per $y \longrightarrow 0$ allora $x^{-1}\phi(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow 0$.

Applichiamo il corollario 6 con i seguenti dati

- ϕ la funzione appena definita;
- $q_{k_{j_p,l_p}} = k_{j_p,l_p} - 1$;
- $x_{m,k_{j_p,l_p}} = \frac{m}{k_{j_p,l_p}}$;
- $r_{m,k_{j_p,l_p}} = \phi\left(\frac{1}{2k_{j_p,l_p}\exp[(\log k_{j_p,l_p})^{\beta}]}\right) = \phi\circ\eta\left(\frac{1}{2k_{j_p,l_p}}\right) = \frac{1}{2k_{j_p,l_p}}$;
- $d = 1$.

Con queste ipotesi otteniamo

$$B_{k_{j_p,l_p}} = \bigcup_{m=1}^{k_{j_p,l_p}-1}\left[\frac{m}{k_{j_p,l_p}} - \frac{1}{2k_{j_p,l_p}}, \frac{m}{k_{j_p,l_p}} + \frac{1}{2k_{j_p,l_p}}\right]$$

$$\begin{aligned} B^{\phi}_{k_{j_p,l_p}} &= \bigcup_{m=1}^{k_{j_p,l_p}-1}\left[\frac{m}{k_{j_p,l_p}} - \frac{1}{2k_{j_p,l_p}e^{(\log k_{j_p,l_p})^{\beta}}}, \frac{m}{k_{j_p,l_p}} + \frac{1}{2k_{j_p,l_p}e^{(\log k_{j_p,l_p})^{\beta}}}\right] \\ &= I^{\beta}_{k_{j_p,l_p}} \end{aligned}$$

per cui $F = \limsup_{p\to+\infty} I^{\beta}_{k_{j_p,l_p}} = \limsup_{p\to+\infty} B^{\phi}_{k_{j_p,l_p}}$. Poiché $B_{k_{j_p,l_p}}$ ricoprono [0,1], allora sono verificate tutte le ipotesi del corollario 6, e dunque si trova che $\mathcal{H}^{\phi}(F) = +\infty$. Inoltre, osserviamo che, posto $y = \phi(x)$, allora

$$y = x\exp\left[(\log(1/2y))^{\beta}\right] \quad \text{quindi} \quad \log x \leq \log y;$$

ne segue che $\phi(x) \leq x\exp[(\log(1/2x))^{\beta}] \leq \phi_{1,1-\beta}(x)$ e dunque $\mathcal{H}^{\phi_{1,1-\beta}}(F) = +\infty$.

Concludiamo esattamente come nel caso L^p usando il lemma 35, cioè poniamo

$$F^1 = \left\{x \in F : \limsup_{n\to+\infty}\frac{\log|S_n f(x)|}{\log\log n} = \beta\right\}$$

$$F^2 = \left\{ x \in F : \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log \log n} > \beta \right\}$$

e osserviamo che il lemma 35 garantisce che $\mathcal{H}^{\phi_{1,1-\beta}}(F^2) = 0$ e quindi $\mathcal{H}^{\phi_{1,1-\beta}}(F^2) = +\infty$ e la dimensione di Hausdorff precisata di $F(\beta, f)$, che contiene F^1 è almeno $(1, 1-\beta)$. Per il lemma 35, essa è esattamente $(1, 1-\beta)$.

Osservazione 42. Il metodo sviluppato sopra ci permette di costruire una funzione concreta che soddisfa le conclusioni del teorema 41. Più precisamente, basta considerare

$$g = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{l=1}^{j} \varepsilon_l e_{n_{j,l}} P_{j,l}$$

con il vincolo che $3n_{j,j} < n_{j+1,1}$ che ci assicura che i blocchi $\sum_{l=1}^{j} \varepsilon_l e_{n_{j,l}} P_{j,l}$ hanno spettri disgiunti. Tale funzione è una sorta di funzione di saturazione nel caso continuo.

□

Capitolo 4

Prevalenza

Su $\mathbb{R}^n$ e su spazi di dimensione finita l'espressione "quasi ovunque" è comunemente accettata per indicare che le eccezioni stanno in un insieme che ha misura nulla secondo Lebesgue. Estendere questo concetto a spazi di dimensione infinita non è banale e per questo non c'è una convenzione esplicita. Questo dipende dal fatto che non è possibile trasportare tutte le proprietà di cui gode la misura di Lebesgue su spazio infinito-dimensionali, neanche su spazi di Banach.

Ad esempio, il richiedere che una misura sia invariante per traslazioni su uno spazio di Banach separabile implica che ciascun aperto abbia dimensione infinita, come si vede dalla seguente proposizione.

Proposizione 43. *Su uno spazio di Banach separabile e infinito-dimensionale sia μ una misura non nulla e invariante per traslazioni. Allora tutti gli aperti hanno dimensione infinita.*

Dimostrazione. Supponiamo infatti per assurdo che la palla B di raggio ε abbia misura finita; siccome lo spazio ha dimensione infinita, è possibile trovare una successione numerabile di palle di raggio $\varepsilon/4$ e disgiunte che siano contenute nella palla B. In base alle nostre ipotesi, esse hanno tutte medesima misura, per cui dovendo la loro unione avere misura finita, esse saranno di misura zero. Poichè lo spazio è separabile, esso è ricoperto da una unione numerabile di palle di raggio $\varepsilon/4$, perciò anche l'intero spazio ha misura nulla, che è contro l'ipotesi.

$\square$

Osservazione 44. Anche togliendo l'ipotesi di separabilità, ma ammettendo l'esistenza di aperti di misura finita, otterremmo comunque la sgradevole possibilità di esistenza di aperti (le palle di raggio $\varepsilon/4$) di misura zero, "sgradevole" perché vorremmo che ogni insieme di misura nulla abbia parte interna vuota.

Non potendo trasportare tutte le proprietà desiderate su spazi di dimensione infinita, dobbiamo acccontentarci di selezionare le proprietà che ci paiono più ragionevoli. Le seguenti proprietà valide per la misura di Lebesgue sono quelle più naturali:

(a) un insieme di misura nulla ha parte interna vuota,

(b) ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla ha misura nulla,

(c) l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla,

(d) il traslato di un insieme di misura nulla ha misura nulla.

In assenza di una misura invariante per traslazioni, ciò che comunque si vorrebbe è la proprietà (d) che si chiama "quasi invarianza".

Neanche le (a)-(d) tuttavia determinano univocamente da sole la misura. Un modo di estendere il concetto di "quasi ogni" è quello che abbiamo già utilizzato e che utilizza la definizione di insieme di prima categoria come unione numerabile di insiemi le cui chiusure hanno parte interna vuota e quella di insieme residuo che è il suo complementare, cioè intersezione numerabile di aperti densi. Questi concetti hanno proprietà simili a (a)-(d), ma essi si riferiscono a "grandezze" di tipo topologico. Infatti ci sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono di prima categoria, ma hanno misura di Lebesgue nulla, come i numeri razionali. I concetti come quelli di insieme residuo possono comunque essere utili per studiare la l'esistenza di certi elementi, ad esempio l'esistenza di funzioni continue e mai differenziabili si può provare mostrando che esse formano un sottoinsieme residuo delle funzioni continue.

Un'altra estensione possibile del concetto di "quasi ovunque", che verifica ancora (a)-(d), ma che è di natura più probabilistica, consiste nel richiedere per la misura un'altra proprietà valida per la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$:

(e) Sia S un insieme boreliano. Se esiste una misura di probabilità μ con supporto compatto e tale che ogni traslato di S abbia misura nulla secondo μ, allora S ha misura di Lebesgue nulla.

È chiaro che se S è un boreliano con misura di Lebesgue nulla, la (e) è soddisfatta ad esempio dalla probabilità uniforme sulla palla unitaria estesa a zero fuori dal suo complementare. Vedremo nel prossimo paragrafo come estendere queste proprietà.

4.1 Definizione di prevalenza e prime proprietà

Indichiamo con V uno spazio di Banach. Quando parleremo di misura su V, intenderemo sempre una misura non negativa e non identicamente nulla definita sui boreliani di V.

Definizione 4. Una misura μ è detta *trasversa* a un boreliano $S \subset V$ se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) esiste un insieme compatto $U \subset V$ per cui $0 < \mu(U) < +\infty$;

(ii) $\mu(S + v) = 0$ per ogni $v \in V$.

La condizione (i) assicura che una misura trasversa è una misura finita se ristretta ad un opportuno compatto. Se V è separabile, allora tutte le misure che assumono valori diversi da 0 e ∞ verificano la condizione (i).

Definizione 5. Un insieme boreliano $S \subset V$ è detto *timido* se esiste una misura trasversa ad S. Più in generale, un sottoinsieme di V si dice timido se è contenuto in un boreliano timido. Il complementare di un insieme timido si dice *prevalente*.

Osservazione 45. Se S è un insieme timido e μ è una misura a esso trasversa allora $\mu(S) = 0$. Ciò segue direttamente dalla proprietà (ii) applicata a $v = 0$.

In maniera informale, ma che ci aiuta a capire il nocciolo di questi concetti, possiamo osservare che più la misura è concentrata e meno esistono insiemi a cui è trasversa: per esempio se consideriamo la misura di Dirac δ_x concentrata in $x \in V$ su cui ha misura 1, essa è trasversa solo all'insieme vuoto.

Enunciamo alcune proprietà sulla trasversalità e sulla timidezza.

Proposizione 46. *Se S è timido, allora i sottoinsiemi di S e i traslati di S sono timidi.*

Dimostrazione. Basta provare la tesi per i boreliani. Sia μ una misura trasversa ad S e vediamo che essa è trasversa anche ai sottoinsiemi di S e ai suoi traslati. Osserviamo che la proprietà (i) è verificata per tali insiemi, perché essa dipende solo dalla misura ν e dallo spazio V.

Proviamo la (ii): se $T \subset S$ è boreliano, allora per la proprietà di isotonia della misura si ha

$$\mu(T + v) \leq \mu(S + v) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

quindi per ogni $v \in V$ si ha $\mu(T+v) = 0$; invece se $a \in V$ e $T = S + a$ è un boreliano, allora

$$\mu(T+v) \leq \mu\big((S+a)+v\big) = \mu\big(S+(a+v)\big) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

per la proprietà (ii) di S. Ne segue la tesi.

$\square$

La seguente proposizione mostra che le definizioni di timido e prevalente rimangono invarianti se chiediamo che la misura trasversa sia a supporto compatto.

Proposizione 47. *Ogni boreliano timido ammette come misura trasversa una misura finita e a supporto compatto. Inoltre, il supporto di una tale misura può essere preso con diametro arbitrariamente piccolo.*

Dimostrazione. Sia S un boreliano timido, sia μ una misura trasversa a S e sia U il compatto che verifica la proprietà (i). Sia $\nu = \mu|_U$ che è, per la (i), finita e positiva; anche ν è trasversa ad S perché la (i) è ancora vera e inoltre, per isotonia della misura, si ha

$$\nu(S+v) \leq \mu\big|_U(S+v) = \mu\big((S+v)\cap U\big) \leq \mu(S+v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Quindi $\nu(S+v) = 0$ per ogni $v \in V$. Quindi ν verifica la prima parte della tesi.

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome U è compatto, esso è ricoperto da un numero finito di palle B^i_ε, cioé $U \subset \bigcup_{i=1}^n B^i_\varepsilon$. Essendo ν positiva su U, esiste almeno un $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tale che $B^{i_0}_\varepsilon \cap U$ ha misura positiva; poniamo $W = \overline{B^{i_0}_\varepsilon \cap U}$: esso è compatto. Dunque, posto $\tau = \nu|_W$, τ è ancora trasversa a S e il suo supporto ha diametro minore di ε.

$\square$

Proposizione 48. *Ogni insieme timido ha parte interna vuota e ogni insieme prevalente è denso.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che gli aperti non possono essere insiemi timidi. Supponiamo per assurdo che esista un aperto B timido. Sia δ il diametro di B; per la proposizione 47 esiste una misura μ trasversa con supporto C compatto e tale che il diametro di C sia $\delta/2$. Anche tutti i traslati di B, in base alla proposizione 46 sono insiemi timidi; pertanto, a meno di traslare B, possiamo supporre che $B \supset C$. Allora

$$\mu(C) \leq \mu(B) = 0,$$

ma ciò è assurdo perché μ non è una misura nulla.

Da questo segue che ogni insieme timido ha parte interna vuota, perché altrimenti la parte interna sarebbe un sottoinsieme non vuoto di un insieme timido e quindi sarebbe timido per la proposizione 46. Pertanto se P è un insieme prevalente allora $S = V \setminus P$ è timido e

$$\overline{P} = \overline{V \setminus S} = V \setminus \mathring{S} = V,$$

per cui P è denso.

□

Vogliamo ora provare che l'unione di due insiemi timidi è timida. Dati due insiemi boreliani S e T contenenti gli insiemi timidi e due misure μ e ν a essi trasverse, dobbiamo trovare una misura che sia trasversa ad entrambi. Vedremo che quello che fa al caso nostro è il prodotto di convoluzione $\mu * \nu$.

Definizione 6. Siano μ e ν due misure su V e indichiamo con $\mu \otimes \nu$ il prodotto delle misure definito sul prodotto cartesiano $V \times V$; inoltre, dato un insieme boreliano $S \supset V$, sia $S^{\Sigma} = \{(x, y) \in V \times V : x + y \in S\}$. Allora S^{Σ} è un insieme boreliano e il *prodotto di convoluzione* $\mu * \nu$ delle due misure è definito come

$$\mu * \nu(S) = \mu \otimes \nu(S^{\Sigma}).$$

Se μ e ν sono finite, allora $\mu \otimes \nu$ è misura finita ed in tal caso la funzione indicatrice di S^{Σ} risulta integrabile rispetto a $\mu \otimes \nu$, quindi il teorema di Fubini ci dice che

$$\mu * \nu(S) = \int_V \mu(S - y)\, d\nu(y) = \int_V \nu(S - x)\, d\mu(x).$$

Proposizione 49. *Siano μ e ν sono misure con supporto compatto. Se μ è trasversa a un boreliano S, allora lo è anche $\mu * \nu$, che è anch'essa una misura a supporto compatto.*

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che, essendo il supporto di $\mu * \nu$ contenuto nell'immagine tramite la funzione continua $(x, y) \mapsto x + y$ dell'insieme compatto $\mathrm{supp}(\mu) \times \mathrm{supp}(\nu)$, esso è compatto. Inoltre, siccome per ogni $w \in V$ si ha $\mu(S + w) = 0$, risulta

$$\mu * \nu(S + v) = \int_v \mu(S + v - y)\, d\nu(y) = 0,$$

quindi $\mu * \nu$ è trasversa a S.

□

Proposizione 50. *L'unione finita di insiemi timidi è timida.*

Dimostrazione. Vediamolo per induzione. Per prima cosa dimostriamo il passo base, cioè vediamo che l'unione di due insiemi timidi è timida. Siano T e T' due insiemi timidi e quindi siano S e S' due boreliani timidi che li contengono e a cui sono trasverse le misure μ e ν rispettivamente, che, per la Proposizione 47, possiamo supporre a supporto compatto. La misura $\mu * \nu$ ha supporto compatto ed è trasversa a S e a S' per la proposizione 49, quindi è trasversa a $S \cup S'$. Perciò l'insieme $T \cup T'$, essendo contenuto nel boreliano timido $S \cup S'$, è a sua volta timido.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per n insiemi timidi e siano dati $n+1$ insiemi timidi T_i, per $i = 1, \ldots, n+1$. Allora, detto $T = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ esso è timido per ipotesi induttiva, dunque si ha che

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} T_i = T \cup T_{n+1}$$

è unione di due insiemi timidi e quindi, per il passo base, è timida.

□

La proprietà di timidezza si mantiene anche per unioni numerabili.

Proposizione 51. *L'unione numerabile di insiemi timidi è timida e l'intersezione numerabile di insiemi prevalenti è prevalente.*

Dimostrazione. La seconda affermazione segue immediatamente dalla prima; quindi, basta dimostrare che l'unione numerabile di insiemi timidi è timida. Sia $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ una successione di insiemi timidi e sia $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ una successione associata di boreliani timidi tali che, per ogni i, $S_i \supset T_i$. Siano poi $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$, le misure trasverse associate, cioè, per ogni $i \in \mathbb{N}$, μ_i sia trasversa a S_i; possiamo supporre, in base alla proposizione 47, che le μ_i siano finite, con supporto in un compatto U_i tale che il diametro di U_i sia 2^{-i}. A meno di normalizzare le misure μ_i e di traslarle, possiamo supporre che $\mu_i(V) = 1$ e che gli U_i contengano l'origine.

Consideriamo $U = \prod_{i\in\mathbb{N}^+} U_i$ il prodotto cartesiano infinito, che è un compatto per il teorema di Tychonoff, e sia $\mu = \otimes_{i\in\mathbb{N}^+} \mu_i$ la misura prodotto definita sui suoi boreliani. In particolare si ha $\mu(U) = 1$. Per ogni successione $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U$, siccome ciascun v_i ha norma minore di 2^{-i}, la successione $(v_1 + \cdots + v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi, per completezza dello spazio V, è ben definito $\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$. Quindi la mappa $\varphi : U \to V$ definita da

$$\varphi\big((v_i)_{i\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i,$$

è ben definita e continua; l'immagine di questa mappa, che indichiamo con $\tilde{U}$ è compatta e μ induce su $\tilde{U}$ una misura immagine $\tilde{U}$ definita sui boreliani A di $\tilde{U}$ da

$$\tilde{\mu}(A) = \mu\left(\varphi^{-1}(A)\right) = \mu(A^{\Sigma}) = \otimes_{i\in\mathbb{N}}\, \mu_i(A^{\Sigma}),$$

dove $A^{\Sigma} = \{(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U : \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i \in A\}$. Vogliamo mostrare che μ è trasversa a ogni S_i da cui segue la tesi.

Per ogni i, possiamo identificare (a meno di isomofismi) la misura μ con $\mu_i \otimes \nu_i$ dove $\nu_i = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{i-1} \otimes \mu_{n+1} \ldots$. Sia allora $\tilde{\nu}_i$ la misura immagine su V indotta tramite la mappa $(v_j) \mapsto \sum_{j\neq i} v_j$ dalla misura ν_i. Indichiamo poi con

$$A_i^{\Sigma} = \{(v_i, (v_j)_{j\neq i}) \in U_i \times \prod_{j\neq i} U_j : v_i + \sum_{j\in\mathbb{N}} v_j \in A\},$$

che è isomorfo a A^{Σ}. Allora, per ogni boreliano A di $\tilde{U}$, si ha

$$\tilde{\mu}(A) = \otimes_{j\in\mathbb{N}}(A^{\Sigma}) = \mu_i \otimes \tilde{\nu}_i(A_i^{\Sigma}) = \mu_i * \tilde{\nu}_i(A),$$

per definizione di prodotto di convoluzione di misure. Perciò $\tilde{\mu} = \mu_i * \tilde{\nu}_i$ e quindi per la proposizione 49, $\tilde{\mu}$ è trasversa a S_i, da cui la tesi.

□

4.2 Generalizzazioni dei concetti di timidezza e prevalenza

È possibile definire concetti più deboli di trasversalità e timidezza. Cominciamo con la seguente definizione:

Definizione 7. Una misura μ si dice *essenzialmente trasversa* ad un insieme boreliano $S \subset V$ se valgono le seguenti proprietà:

(i) esiste un insieme compatto $U \subset V$ per cui $0 < \mu(U) < +\infty$.

(iii) $\mu(S + v) = 0$ per ogni v in un insieme prevalente di V.

Osserviamo che, banalmente, se una misura è trasversa ad un boreliano essa è anche essenzialmente trasversa ad esso, per cui il concetto appena introdotto è apparentemente più debole. Tuttavia vale il seguente:

Proposizione 52. *Se $S \subset V$ è un boreliano che ammette una misura essenzialmente trasversa, allora S è timido.*

Dimostrazione. Sia μ una misura essenzialmente trasversa ad S, che possiamo assumere finita e con supporto compatto in base alla proposizione 47. Sia poi P l'insieme prevalente su cui vale l'ipotesi (iii) della definizione; allora l'insieme

$$R = \{v \in V : \mu(S - v) > 0\} \subset V \setminus P$$

è un insieme timido, perché sottoinsieme di $V \setminus P$ che è timido. Sia dunque T il boreliano timido che contiene R e sia ν una misura finita a supporto compatto e trasversa a T e che, quindi, grazie alla proposizione 46, è anche trasversa a tutti i traslati di T. Allora, per ogni $w \in V$ si ha

$$\begin{aligned}\mu * \nu(S + w) &= \int_V \mu(S + w - y)\, d\nu(y) = \int_{R+w} \mu(S + w - y)\, d\nu(y) \\ &\leq \int_{T+w} \mu(S + w - y)\, d\nu(y) \leq \mu(V)\, \nu(T + w) = 0.\end{aligned}$$

Perciò $\mu * \nu$ è trasversa a S e quindi S è timido.

□

Questa proposizione ci dice che indebolire la definizione di trasversalità non fa indebolire la nozione di timidezza. Diamo ora una definizione locale di timidezza e di prevalenza.

Definizione 8. Un insieme $S \subset V$ è *localmente timido* se ogni punto x dello spazio V ha un intorno U_x tale che $U_x \cap S$ è timido. Un insieme *localmente prevalente* è il complementare di un insieme localmente timido.

Osserviamo che tutti gli insiemi timidi sono localmente timidi, quindi la locale timidezza è un concetto più debole.

Le proposizioni 46, 47, 48, 49, 50 valgono ancora per la locale timidezza e prevalenza. Non è chiaro se valga ancora la proposizione 51; tuttavia se V è separabile, le definizioni sono equavalenti.

Proposizione 53. *Se V è separabile, tutti i sottoinsiemi di V localmente timidi sono timidi.*

Dimostrazione. Se V è uno spazio metrico separabile, il teorema di Lindelöf garantisce che ogni ricoprimento aperto di V ha un sottoricoprimento numerabile. Perciò, dato un insieme S localmente timido, tutti gli intorni U_x la cui intersezione con S è timida formano un ricoprimento $\{U_x\}$ di V: possiamo estrarne un sottoricoprimento numerabile $\{U_{x_n}\}$. Siccome, per ogni n, $S \cap U_{x_n}$ è sottoinsieme di un insieme timido, esso è timido, per cui $S = \bigcup_n S \cap U_{x_n}$ è unione numerabile di insiemi timidi e quindi è timido.

□

Questo ci dice subito che per spazi di dimensione finita, la timidezza e la locale timidezza coincidono. La seguente proposizione ci dimostra che in questo caso, inoltre, questi due concetti sono equivalenti ad avere misura di Lebesgue zero.

Proposizione 54. *Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è timido se e solo se ha misura di Lebesgue nulla.*

Dimostrazione. Basta provare la tesi per insiemi boreliani, perché ogni insieme di misura nulla secondo Lebesgue è sempre contenuto in un boreliano di misura nulla secondo Lebesgue. Se S è un boreliano di misura nulla secondo Lebesgue, allora la misura di Lebesgue, che è invariante per traslazioni, è trasversa ad S e quindi in particolare S è timido. Viceversa, supponiamo che S sia un boreliano timido; dunque, per la proposizione 47, esiste una misura μ finita, non nulla a supporto compatto che è trasversa a S. Indicata, come sempre, con λ la misura di Lebesgue, abbiamo, per trasversalità di μ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(S-y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(S-x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(S)\, d\mu(x) \\ &= \lambda(S)\, \mu(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Quindi necessariamente S ha misura di Lebesgue nulla.

□

La proposizione 54 implica che in $\mathbb{R}^n$ la misura di Lebesgue è la migliore candidata possibile ad essere trasversa a un boreliano dato.

Quando V ha dimensione infinita, una scelta comoda per la misura trasversa è la misura di Lebesgue su un sottospazio di dimensione finita: ad esempio, se $w \in V$ e consideriamo la misura di Lebesgue λ su $\operatorname{span}\{w\}$ (estesa a 0 sugli insiemi di $V \setminus \operatorname{span}\{w\}$), allora essa è trasversa ad un boreliano S di V se

$$\lambda\left((S+v) \cap \operatorname{span}\{w\}\right) = 0 \qquad \forall v \in V. \tag{4.1}$$

Da questo segue banalmente il seguente fatto:

Proposizione 55. *Ogni insieme numerabile in V è timido e ogni sottospazio proprio di V è timido.*

Dimostrazione. Se S è numerabile, allora l'insieme in (4.1) contieme solo una quantità numerabile di punti e quindi la sua misura di Lebesgue è nulla.

Sia S uno sottospazio proprio e siano $w \in V \setminus S$ e $v \in S$. Allora, poiché S è uno spazio vettoriale e $w \notin S$, si ha

$$\lambda\left((S+v) \cap \operatorname{span}\{w\}\right) = \lambda\left(S \cap \operatorname{span}\{w\}\right) = \lambda\{0\} = 0.$$

Quindi λ è trasversa a S.

□

Come appena visto, nella ricerca di una misura trasversa su uno spazio di dimensione infinita, una misura spesso efficace è la misura di Lebesgue definita su un suo sottospazio di dimensione finita. Cerchiamo di formalizzare con più precisione questa affermazione.

Definizione 9. Un sottospazio di dimensione finita $P \subset V$ si dice una *sonda* per un insieme $T \subset V$ se la misura di Lebesgue con supporto in P è trasversa a un boreliano che contiene il complementare di T.

Se un insieme T ha una sonda allora il suo complementare è timido e dunque T è prevalente. Questa condizione non è però necessaria.

Osservazione 56. Osserviamo che se μ è trasversa ad un insieme $S \subset V$ e il supporto di μ è contenuto in un sottospazio $W \subset V$, allora $S \cap W$ è un sottoinsieme timido di W. Infatti, siccome $(S \cap W) + v \subset S + v$ per ogni $v \in V$, allora sia la (i) che la (ii) sono verificate.

Il vantaggio di usare sonde è che una singola sonda può essere usata per mostrare che una proprietà è prevalente in diversi spazi di funzioni applicando l'osservazione precedente.
In generale, se λ è la misura di Lebesgue con supporto in P ed è trasversa ad un boreliano S, allora λ è trasversa a $S \cap P$, perciò non solo il complementare di S è prevalente, ma anche il complementare di $S \cap P$.
Un'altra proprietà molto utile è al seguente.

Proposizione 57. *Se V ha dimensione infinita, tutti i sottoinsiemi compatti di V sono timidi.*

Dimostrazione. Supponiamo V sia uno spazio vettoriale reale. (La dimostrazione nel caso complesso è quasi identica.) Sia $S \subset V$ un compatto (ricordiamo che in uno spazio metrico un compatto è sempre chiuso e quindi è boreliano) e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \times S \times S \to V$ definita da

$$f(\alpha, x, y) = \alpha(x - y).$$

Vediamo che l'immagine di f non è tutto V e, per farlo, mostriamo che essa è un insieme di prima categoria. Per ogni $N \in \mathbb{N}$, l'insieme $[-N, N] \times S \times S$ è compatto e quindi anche la sua immagine tramite f; perciò l'immagine di f è unione numerabile di compatti. Ma V ha dimensione infinita, per cui ogni compatto ha parte interna vuota. Ne segue che l'immagine di f essendo unione numerabile di insimi chiusi privi di parte interna è di prima categoria.

Possiamo considerare dunque $v \in V$ e non appartenente all'immagine di f; allora $L = \operatorname{span} v$ è una retta. Osserviamo che allora tutti i traslati di L possono intersecare S in al più un punto: se così non fosse, cioè se esistessero

due punti distinti $\mu_1 v + a$ e $\mu_2 v + a$ in $(L + a) \cap S$, allora $x - y = (\mu_1 - \mu_2)\, v$ apparterrebbe ad S, per cui $v = \frac{x-y}{\mu_1 - \mu_2}$ apparterrebbe all'immagine di f, che è impossibile.
Quindi, per ogni $a \in V$, $S \cap (L + a)$, e quindi anche $(S - a) \cap L$, consta di al più un punto, per cui la sua misura di Lebesgue sulla retta è nulla. In altre parole, λ è trasversa a S; quindi L è una sonda per il complementare di S e S è timido.

$\square$

Capitolo 5

Prevalenza degli insiemi di divergenza in $L^p(\mathbb{T})$ per $p \geq 1$

In $L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, i teoremi 10 e 18 ci garantiscono che per ogni $\beta \in [0, \frac{1}{p}]$ l'insieme delle funzioni la cui serie di Fourier diverge almeno come n^β è grande in un senso topologico, cioè è un insieme residuo. Vogliamo analizzare ora la grandezza dell'insieme delle funzioni che soddisfano questa proprietà anche dal punto di vista della prevalenza. Vedremo che vale un risultato analogo ai teoremi già visti:

Teorema 58. *Sia $1 \leq p < +\infty$. Per ogni $\beta \in [0, 1/p]$, l'insieme delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{T})$ tali che $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$ è prevalente.*

La strategia che seguiremo è quella di trovare una sonda per questo insieme di funzioni.

5.1 La costruzione di funzioni di saturazione con spettri disgiunti

Siano $p \geq 1$ e $\alpha > 1$ fissati. Sarà utile considerare ancora una volta gli insiemi diadici e i numeri α-approssimabili da diadici. Utilizzeremo le notazioni del capitolo 1.

Per ogni $j \geq 1$, poniamo $J = [j/\alpha] + 1$ e, per $K = 0, \dots, 2^J - 1$, consideriamo gli intervalli diadici

$$I_{K,j} = \left[\frac{K}{2^J} - \frac{1}{2^j}, \frac{K}{2^J} + \frac{1}{2^j} \right],$$

di centro $K/2^J$ e diametro $2^{-(j-1)}$. Definiamo poi anche

$$\mathbf{I}_j := \bigcup_{K=0}^{2^J-1} I_{K,j} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I'}_j := \bigcup_{K=0}^{2^J-1} 2I_{K,j},$$

dove, con notazione imprecisa, denotiamo con $2I_{K,j}$ l'intervallo con lo stesso centro di $I_{K,j}$ ma diametro doppio, ossia $2^{-(j-2)}$; quindi, essi sono a due a due disgiunti se $J < j-2$ cioè se, al variare di K, $j \geq \frac{3\alpha}{\alpha-1}$. Perciò, in tal caso, si ha che $|\mathbf{I}_j| = 2^{J-(j-1)}$ e $|\mathbf{I'}_j| = 2^{J-(j-2)}$.

Sia poi D_α l'insieme dei numeri in [0,1] che sono α-approssimabili da diadici, come nella definizione 1, cioè i numeri $x \in [0,1]$ tali che esistono due successioni di interi $(k_n)_{n\geq 0}$ e $(j_n)_{n\geq 0}$ tali che

$$\left| x - \frac{k_n}{2^{j_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha j_n}}.$$

Osservazione 59. L'insieme D_α è contenuto in $\limsup_{j\to+\infty} \mathbf{I}_j$. Infatti, se $x \in D_\alpha$, si possono trovare J grande quanto si vuole e $K \in \{0, \ldots, 2^J - 1\}$ tali che $|x - K/2^J| \leq 1/2^{\alpha J}$. Sia j un intero tale che $J - 1 = [j/\alpha]$ (che esiste perché $\alpha > 1$). Otteniamo che

$$\left| x - \frac{K}{2^J} \right| \leq \frac{1}{2^j},$$

perciò $x \in \mathbf{I}_j$.

Abbiamo già visto nel Capitolo 1 che $\dim_{\mathcal{H}}(D_\alpha) = 1/\alpha$ e quindi in particolare si ha, in base all'osservazione 59, che

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\limsup_{j\to+\infty} \mathbf{I}_j \right) \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Vogliamo ora costruire delle famiglie finite di funzioni le cui serie di Fourier divergono su ciascun $\mathbf{I}_j$ e che hanno spettri disgiunti.

Lemma 60. *Sia $j \geq \frac{3\alpha}{\alpha-1}$ e sia $J = [j/\alpha] + 1$. Esiste un polinomio trigonometrico P_j con spettro in $(0, 2^{j+1} - 1]$ tale che*

(i) $\|P_j\|_p \leq 1$

(ii) $|P_j(x)| \geq C 2^{-(J-j)/p}$ *per ogni* $x \in \mathbf{I}_j$

dove la costante C è indipendente da j.

Dimostrazione. Sia χ_j una funzione lineare a tratti e continua che valga 1 su $\mathbf{I}_j$, che valga 0 fuori da $\mathbf{I'}_j$ e che soddisfi $0 \leq \chi_j \leq 1$ e $\|\chi_j'\|_\infty \leq 2^j$. Una tale funzione esiste sempre: basta prendere, ad esempio, la funzione lineare a tratti ottenuta raccordando con linearità i valori 0 sul complementare di $\mathbf{I'}_j$ e 1 su $\mathbf{I}_j$: infatti la pendenza della retta che collega gli estremi corrispondenti di due intervalli $I_{K,j}$ e $2I_{K,j}$ è esattamente $\pm\frac{1}{\frac{1}{2^j}} = \pm 2^j$.

La norma p di una generica funzione χ_j siffatta è controllata, perché, dato che il diametro di $\mathbf{I'}_j$ è, nell'ipotesi $j \geq \frac{3\alpha}{\alpha+1}$, pari a $2^{J-(j-2)}$, risulta $\|\chi_j\|_p^p \leq \int_{t\in\mathbf{I'}_j} |\chi_j(t)|\, dt \leq |\mathbf{I'}_j| = 2^{J-(j-2)}$, per cui $\|\chi_{J,j}\|_p \leq 2^{(J-(j-2))/p}$.

Utilizziamo le χ_j per ottenere polinomi trigonometrici con spettro contenuto in opportuni intervalli, siano essi

$$P_j := 2^{-(J-(j-2))/p} e_{2^j} \sigma_{2^j} \chi_j.$$

Lo spettro di $\sigma_{2^j}\chi_j$ varia in $[-2^j+1, 2^j-1]$ e quindi, per traslazione dovuta a e_{2^j}, lo spettro di P_j varia fra 1 e $2^{j+1}-1$, come richiesto dalla tesi.

Anche la norma p dei polinomi P_j non supera 1 come richiesto, perché

$$\begin{aligned}
\|P_j\|_p &= 2^{-(J-(j-2))/p} \left(\int_0^1 \left| e^{2\pi i 2^j t} \sigma_{2^j}\chi_j(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \\
&\leq 2^{-(J-(j-2))/p} \left(\int_0^1 |\sigma_{2^j}\chi_j(t)|^p\, dt \right)^{1/p} = 2^{-(J-(j-2))/p} \cdot \|\sigma_{2^j}\chi_j\|_p \\
&\leq 2^{-(J-(j-2))/p} \cdot \|\chi_j * F_{2^j}\|_p \leq 2^{-(J-(j-2))/p} \cdot \|\chi_{J,j}\|_p \cdot \|F_{2^j}\|_1 \\
&\leq 2^{-(J-(j-2))/p} \cdot 2^{(J-(j-2))/p} \cdot 1 = 1,
\end{aligned}$$

dove ricordiamo che F_{2^j} è il 2^j-esimo nucleo di Fejér.

Quindi ci rimane da verificare (ii). Per ogni $x \in \mathbf{I}_j$, si ha $1 - \chi_j(x) = 0$, quindi possiamo applicare il lemma 4 alla funzione $1-\chi_j$ con $n = 2^j$, ottenendo che per ogni $j \geq 3$

$$|\sigma_{2^j}\chi_j(x)| \geq 1 - |\sigma_{2^j}(1-\chi_j(x))| \geq \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
|P_j(x)| &\geq 2^{-(J-(j-2))/p} |e_{2^j}(x)|\, |\sigma_{2^j}\chi_j(x)| \geq 2^{-(J-(j-2))/p}\, 2^{-2} \\
&= 2^{-(2+2/p)} 2^{(J-j)/p} = C 2^{(J-j)/p},
\end{aligned}$$

come richiesto.

□

Ora utilizziamo questi polinomi per ottenere delle funzioni di saturazione, con spettri disgiunti. Per tutto il resto del capitolo, porremo per semplicità $j_\alpha = \frac{3\alpha}{\alpha-1}$.

Lemma 61. *Sia $s \geq 1$ fissato. Esistono funzioni $g_1, \dots, g_s$ in $L^p(\mathbb{T})$ di norma non superiore a 1 e due successioni $(n_{j,r})_{j \geq j_\alpha, 1 \leq r \leq s}$, $(m_{j,r})_{j \geq j_\alpha, 1 \leq r \leq s}$ di interi che soddisfano le proprietà seguenti:*

(i) $1 \leq m_{j,r} < n_{j,r} \leq C2^j$ *per ogni $j \geq j_\alpha$ e per ogni $r \in \{1, \dots, s\}$;*

(ii) *per ogni $j \geq j_\alpha$, per ogni $x \in \mathbf{I}_j$, per ogni $r \in \{1, \dots, s\}$,*

$$\left| S_{n_{j,r}} g_r(x) - S_{m_{j,r}} g_r(x) \right| \geq \frac{C}{j^2} 2^{-(J-j)/p};$$

(iii) *per ogni $r \in \{1, \dots, s\}$, lo spettro di g_r è contenuto in*

$$G_r = \bigcup_{j \geq j_\alpha} (m_{j,r}, n_{j,r}];$$

(iv) *gli insiemi G_r sono a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. Per $r \in \{1, \dots, s\}$ poniamo

$$g_r := \sum_{j \geq j_\alpha} \frac{1}{j^2} e_{(s+r)2^{j+1}} P_j.$$

Questa definisce una funzione in L^p perché

$$\|g_r\|_p \leq \sum_{j \geq j_\alpha} \frac{1}{j^2} \|e_{(s+r)2^{j+1}} P_j\|_p \leq \sum_{j \geq j_\alpha} \frac{1}{j^2} \leq C$$

con C costante positiva e minore di 1 (si ricordi che $j \geq 3$).

Osserviamo che gli spettri di P_j sono contenuti in $(0, 2^{j+1}-1]$ per il lemma 60, perciò lo spettro di ciascun addendo di g_r è contenuto nell'intervallo $\big((s+r)2^{j+1}, (s+r)2^{j+1} + (2^{j+1}-1)\big]$. Siano allora $m_{j,r}$ e $n_{j,r}$ gli estremi di questo intervallo, cioè

$$\begin{aligned} m_{j,r} &:= (s+r)2^{j+1}, \\ n_{j,r} &:= (s+r)2^{j+1} + (2^{j+1}-1), \end{aligned}$$

quindi in particolare lo spettro di g_r è contenuto in $\bigcup_{j \geq j_\alpha} (m_{j,r}, n_{j,r}]$, cioè vale la (iii).

Inoltre, siccome $(s+r)2^{j+1}+(2^{j+1}-1)\le 2s2^{j+1}+2^{j+1}=(4s+2)2^j$, è verificata la (i) con $C=4s+2$.

Vogliamo mostrare che gli insiemi G_r sono a due a due disgiunti. Per farlo, dimostriamo che per ogni $(j,r)\neq(j',r')$ gli intervalli $(m_{j,r},n_{j,r}]$ e $(m_{j',r'},n_{j',r'}]$ sono disgiunti. Dobbiamo distinguere diversi casi.

1. $j>j'$. Vediamo che in questo caso l'intervallo $(m_{j',r'},n_{j',r'}]$ precede $(m_{j,r},n_{j,r}]$.
   Infatti, essendo $j'\le j-1$ si ha
$$\begin{aligned} n_{j',r'} &= (s+r')2^{j'+1}+(2^{j'+1}-1)\le(s+r')2^j+2^j-1\le 2s2^j+2^j-1\\ &< 2(s+1)2^j\le(s+r)2^{j+1}=m_{j,r}\end{aligned}$$

2. $j=j'$. In questo caso dobbiamo vedere come si posizionano r e r':
   - se $r<r'$, vediamo che $(m_{j,r},n_{j,r}]$ precede $(m_{j',r'},n_{j',r'}]$; infatti, essendo $r\le r'-1$, si ha
$$\begin{aligned} m_{j,r'} &= (s+r')2^{j+1}\ge(s+r+1)2^{j+1}=(s+r)2^{j+1}+2^{j+1}\\ &\ge(s+r)2^{j+1}+2^{j+1}-1=n_{j,r};\end{aligned}$$
   - se $r>r'$, invece, in questo caso $(m_{j',r'},n_{j',r'}]$ precede $(m_{j,r},n_{j,r}]$; infatti, essendo $r\ge r'+1$, si ha
$$\begin{aligned} n_{j,r'} &= (s+r')2^{j+1}+(2^{j+1}-1)\le(s+r-1)2^{j+1}+(2^{j+1}-1)\\ &=(s+r)2^{j+1}-1\le(s+r)2^{j+1}=m_{j,r}.\end{aligned}$$

3. $j<j'$. Vediamo che in questo caso l'intervallo $(m_{j,r},n_{j,r}]$ precede $(m_{j',r'},n_{j',r'}]$.
   Infatti, essendo $j\le j'-1$, si ha
$$\begin{aligned} n_{j,r} &= (s+r)2^{j+1}+(2^{j+1}-1)\le(s+r)2^{j'}+2^{j'}-1\le 2s2^{j'}+2^{j'}-1\\ &< 2(s+1)2^{j'}\le(s+r)2^{j'+1}=m_{j',r'}\end{aligned}$$

Perciò vale anche (iv).

Rimane da dimostrare la (ii): siccome abbiamo appena visto che gli spettri delle funzioni che compongono g_r sono a due a due disgiunti, la differenza $|S_{n_{j,r}}g_r-S_{m_{j,r}}g_r|$ seleziona solo la componente $\frac{1}{j^2}e_{(s+r)2^{j+1}}P_j$ e quindi, ricordando anche il lemma 60, per ogni $x\in\mathbf{I}_j$, si ha
$$|S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)|=\frac{1}{j^2}|P_j(x)|\ge\frac{C}{j^2}\,2^{-(J-j)/p}. \tag{5.1}$$

Questo conclude la dimostrazione.

$\square$

Osservazione 62. Osserviamo che se $x \in \limsup_j \mathbf{I}_j$, $r \in \{1, \ldots, s\}$ e $\beta < \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{\alpha})$, allora

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n g_r(x)|}{n^\beta} = +\infty.$$

Infatti, fissiamo $M > 0$; per ogni $j \geq j_\alpha$ il lemma 61 (ii) assicura che per $N_{j,r} = n_{j,r}$ oppure per $N_{j,r} = m_{j,r}$ deve valere la disuguaglianza

$$|S_{N_{j,r}} g_r(x)| \geq \frac{C}{2j^2}\, 2^{-(J-j)/p} = \frac{C}{j^2}\, 2^{-(J-j)/p},$$

a meno di rinominare la costante C. Sia $\delta > 0$ tale che $\beta = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \delta$. Allora, ricordando che $N_{j,r} < C2^j$ e che $j/\alpha - J > -1$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{|S_{N_{j,r}} g_r(x)|}{N_{j,r}^\beta} &\geq \frac{C}{j^2 N_{j,r}^\beta}\, 2^{-(J-j)/p} \geq \frac{C}{j^2 2^{j\beta}}\, 2^{-(J-j)/p} \\
&= \frac{C}{j^2}\, 2^{\frac{j}{p} - \frac{J}{p} - j\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha p} - \delta\right]} \\
&\geq \frac{C}{2j^2} 2^{j\delta},
\end{aligned}$$

che tende all'infinito per $j \longrightarrow +\infty$. Dunque esiste $j_0 \geq j_\alpha$ tale che per ogni $j \geq j_0$ risulta $\frac{C}{2j^2} 2^{j\delta} > M$ e perciò per ogni $j \geq j_0$ esiste $N_{j,r}$ tale che

$$\frac{|S_{N_{j,r}} g_r(x)|}{N_{j,r}^\beta} > M;$$

ciò dimostra che $\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n g_r(x)|}{n^\beta} = +\infty$.

In qualche senso, le funzioni g_r hanno il comportamento peggiore possibile su $\mathbf{I}_j$, se ci ricordiamo che esse devono appartenere a $L^p(\mathbb{T})$. Vedremo ora che questa proprietà rimane vera quasi ovunque (nel senso della misura di Lebesgue) su ciascun sottospazio affine $f + \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_s\}$, se s è preso abbastanza grande. Questo è il passo fondamentale per la dimostrazione del teorema 58.

5.2 Prevalenza per un fissato indice di divergenza

Manteniamo le notazioni del precedente paragrafo.

Proposizione 63. *Sia $0 < \beta < \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{\alpha})$. Esiste $s \geq 1$ tale che, scelte $g_1, \dots, g_s$ come nel lemma 61, per ogni funzione $f \in L^p(\mathbb{T})$, per quasi ogni $c = (c_1, \dots, c_s)$ in $\mathbb{R}^s$, la funzione $g = f + c_1 g_1 + \dots + c_s g_s$ soddisfa per ogni $x \in D_\alpha$*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n g(x)|}{n^\beta} = +\infty.$$

Dimostrazione. Chiamiamo $\epsilon = \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{\alpha}) - \beta$, che risulta positivo per ipotesi. Sia f una funzione qualsiasi di $L^p(\mathbb{T})$. Cerchiamo un valore di s tale che valga la tesi per ogni $x \in \limsup_j \mathbf{I}_j$.

Sia $M > 0$ e introduciamo l'insieme

$$S_M := \{g \in L^p(\mathbb{T}) : \exists x \in \limsup_{j \to +\infty} \mathbf{I}_j \text{ tale che } \forall n \geq 1, |S_n g(x)| \leq M n^\beta\}.$$

È chiaro che se proviamo che per ogni $R > 0$, l'insieme

$$\left\{ c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + \sum_{i=1}^{s} c_i g_i \in S_M \right\}$$

ha misura di Lebesgue 0, allora si ha la tesi. Supponiamo quindi fissati M e R.

Per ogni $j \geq 1$ fissato, ricordiamo che $J = [j/\alpha] + 1$ e, per comodità, dividiamo ciascun intervallo $I_{K,j} = [\frac{K}{2^J} - \frac{1}{2^j}, \frac{K}{2^J} + \frac{1}{2^j}]$ in 2^j sottointervalli ciascuno di ampiezza 2^{-2j+1}. Quindi $\mathbf{I}_j = \bigcup_{K=0}^{2^J-1} I_{K,j}$ si scrive come unione di 2^{J+j} intervalli $O_{l,j}$ di ampiezza 2^{-2j+1}, con $l \in \{0, \dots 2^{J+j} - 1\}$, cioè

$$\mathbf{I}_j = \bigcup_{l=0}^{2^{J+j}-1} O_{l,j} \qquad O_{l,j} = \left[\frac{l}{2^{J+j}} - \frac{1}{2^j}, \frac{l}{2^{J+j}} + \frac{1}{2^j} \right].$$

Ora, per ogni $j \geq 1$ e $l \in \{0, \dots, 2^{J+j} - 1\}$ poniamo

$$S_M^{(l,j)} := \{g \in L^p(\mathbb{T}) : \exists x \in O_{l,j} \text{ tale che } \forall n \geq 1, |S_n g(x)| \leq M n^\beta\}.$$

Osserviamo che

$$S_M \subset \limsup_{j \to +\infty} \bigcup_{l=0}^{2^J+j-1} S_M^{(l,j)}.$$

Ciò che dobbiamo fare è controllare la misura dell'insieme dei $c \in \mathbb{R}^s$ con $\|c\|_\infty \leq R$ tali che $f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in S_M^{(l,j)}$. Vedremo che essi stanno in una palla di diametro piccolo.

Denotamo con λ_s la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^s$ e fissiamo $j \geq j_\alpha$ e l in $\{0, \dots, 2^{J+j} - 1\}$. Siano allora c e c^0 in $\mathbb{R}^s$ tali che $\|c\|_\infty \leq R$, $\|c^0\|_\infty \leq R$ e

$$\begin{cases} g = f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in S_M^{(l,j)} \\ g^0 = f + c_1^0 g_1 + \cdots + c_s^0 g_s \in S_M^{(l,j)} \end{cases}$$

Per ogni $r \in \{1, \dots, s\}$, siano $m_{j,r}$ e $n_{j,r}$ come nel lemma 61; siccome g appartiene a $S_M^{(l,j)}$, utilizzando la definizione di $S_M^{(l,j)}$ prima con $n_{j,r}$ e poi con $m_{j,r}$, si trova che esiste $x \in O_{l,j}$ tale che

$$|S_{n_{j,r}} g(x) - S_{m_{j,r}} g(x)| \leq |S_{n_{j,r}} g(x)| + |S_{m_{j,r}} g(x)| \leq M n_{j,r}^\beta + M m_{j,r}^\beta \leq 2CM2^{\beta j},$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal lemma 61(i). Poiché sempre il lemma 61 garantisce che fra tutte le g_i solo lo spettro della funzione g_r è contenuto in $G_r = \bigcup_{j \geq j_\alpha} (m_{j,r}, n_{j,r}]$, allora si ha che

$$\begin{aligned} 2CM2^{\beta j} &\geq |S_{n_{j,r}} g(x) - S_{m_{j,r}} g(x)| \\ &= |S_{n_{j,r}} f(x) - S_{m_{j,r}} f(x) + c_r (S_{n_{j,r}} g_r(x) - S_{m_{j,r}} g_r(x))|. \end{aligned}$$

Procedendo allo stesso modo con g^0 si trova che esiste $y \in O_{l,j}$ tale che

$$\begin{aligned} 2CM2^{\beta j} &\geq |S_{n_{j,r}} g^0(y) - S_{m_{j,r}} g^0(y)| \\ &= |S_{n_{j,r}} f(y) - S_{m_{j,r}} f(y) + c_r^0 (S_{n_{j,r}} g_r(y) - S_{m_{j,r}} g_r(y))|. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &|c_r (S_{n_{j,r}} g_r(x) - S_{m_{j,r}} g_r(x)) - c_r^0 (S_{n_{j,r}} g_r(y) - S_{m_{j,r}} g_r(y))| \\ &\leq 4CM2^{\beta j} + |S_{n_{j,r}} f(x) - S_{n_{j,r}} f(y)| + |S_{m_{j,r}} f(x) - S_{m_{j,r}} f(y)|, \end{aligned} \tag{5.2}$$

relazione ottenuta sommando e sottraendo $S_{n_{j,r}} f(x) - S_{n_{j,r}} f(y)$ e quindi usando la disuguaglianza triangolare.

Vogliamo adesso maggiorare anche gli altri due addendi. Mettendo insieme la norma del proiettore di Riesz e le disuguaglianze di Nikolsky e Bernstein, se $p > 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \|(S_n f)'\|_\infty &\leq n \|S_n f\|_\infty \quad \text{(disuguaglianza di Bernstein)} \\ &\leq n^{1+\frac{1}{p}} \|S_n f\|_p \quad \text{(disuguaglianza di Nikolski)} \\ &\leq C n^{1+\frac{1}{p}} \|f\|_p \quad \text{(teorema di Riesz)} \end{aligned}$$

mentre per $p = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\|(S_n f)'\|_\infty &\le n\,\|S_n f\|_\infty \quad \text{(disuguaglianza di Bernstein)}\\
&\le n^2\,\|S_n f\|_1 \quad \text{(disuguaglianza di Nikolski)}\\
&\le n^2\,\|D_n\|_1\,\|f\|_1\\
&\le Cn^2\,\log n\,\|f\|_1 \quad \text{(teorema di Riesz).}
\end{aligned}$$

In entrambi i casi si deduce

$$\|(S_n f)'\|_\infty \le C(\log n)n^{1+1/p}\,\|f\|_p. \tag{5.3}$$

Con questa osservazione, essendo x e y punti in $O_{l,j}$, si ottiene che

$$\begin{aligned}
|S_{n_{j,r}} f(x) - S_{n_{j,r}} f(y)| &\le \|(S_{n_{j,r}} f)'\|_\infty \cdot |x - y|\\
&\le C\log(n_{j,r})n_{j,r}^{1+1/p}|x-y|\,\|f\|_p\\
&\le Cj2^{j(1+1/p)}2^{-2j+1}\|f\|_p\\
&\le 2C\|f\|_p\,j2^{-j(1-\frac{1}{p})};
\end{aligned}$$

La funzione $j \mapsto j2^{-j(1-\frac{1}{p})-\beta j}$ è una funzione infinitesima, quindi se j è abbastanza grande sarà minore di 1, cioè definitivamente $|S_{n_{j,r}} f(x) - S_{n_{j,r}} f(y)| \le 2^{\beta j}$. Analogamente si ha $|S_{m_{j,r}} f(x) - S_{m_{j,r}} f(y)| \le 2^{\beta j}$; perciò, usando (5.2), troviamo

$$|c_r(S_{n_{j,r}} g_r(x) - S_{m_{j,r}} g_r(x)) - c_r^0(S_{n_{j,r}} g_r(y) - S_{m_{j,r}} g_r(y))| \le k2^{\beta j} \tag{5.4}$$

per qualche costante k che non dipende da j.

Ripetendo la stessa catena di disuguaglianze usata per trovare la (5.3), si trova che

$$\|(S_n g_r)'\|_\infty \le C(\log n)n^{1+1/p}\|g_r\|_p \le C(\log n)n^{1+1/p},$$

per cui, esattamente come prima, per j abbastanza grande vale

$$|S_{n_{j,r}} g_r(x) - S_{n_{j,r}} g_r(y)| \le 2C\|g_r\|_p\,j2^{-j(1-\frac{1}{p})} \le 2C\,j2^{-j(1-\frac{1}{p})},$$

mentre $S_{m_{j,r}} g_r(x) - S_{m_{j,r}} g_r(y) = 0$, perché lo spettro di g_r è contenuto in $(m_{j,r}, n_{j,r}]$. Dunque si ha

$$
\begin{aligned}
&\left|c_r^0\left[g_r(x)-g_r(y)\right]\right| \\
&=\left|c_r^0\left[\left(S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right)-\left(S_{n_{j,r}}g_r(y)-S_{m_{j,r}}g_r(y)\right)\right]\right| \\
&=\left|c_r^0\left[S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{n_{j,r}}g_r(y)\right]\right| \\
&\leq \|c^0\|_\infty\left|S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{n_{j,r}}g_r(y)\right| \leq 2RC\,j2^{-j(1-\frac{1}{p})} \\
&\leq 2^{\beta j}
\end{aligned}
$$

se j è abbastanza grande.

Tenendo conto di (5.4), otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\left|(c_r-c_r^0)\left[S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right]\right| \\
&=\Big|\left\{c_r\left[S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right]-c_r^0\left[S_{n_{j,r}}g_r(y)-S_{m_{j,r}}g_r(y)\right]\right\}+ \\
&\qquad+\left\{c_r^0\left[\left(S_{n_{j,r}}g_r(y)-S_{m_{j,r}}g_r(y)\right)-\left(S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right)\right]\right\}\Big| \\
&\leq k2^{\beta j}+2^{\beta j}=\tilde{k}2^{\beta j}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Osserviamo che, in base al lemma 61(ii), $|S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)|\neq 0$ quindi possiamo dividere (5.5) per questo termine e, usando ancora il lemma 61(ii), si ha

$$
\begin{aligned}
\|c_r-c_r^0\|_\infty &\leq \frac{\left|(c_r-c_r^0)\left[S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right]\right|}{\left|S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)\right|} \\
&\leq \frac{\tilde{k}2^{\beta j}}{|S_{n_{j,r}}g_r(x)-S_{m_{j,r}}g_r(x)|} \\
&\leq \frac{\tilde{k}}{C}2^{\beta j}j^2 2^{-(j-J)/p}=\frac{\tilde{k}}{C}\,j^2 2^{j(\beta-\frac{1}{p})+\frac{J}{p}}.
\end{aligned}
$$

Siccome $J=[j/\alpha]+1$, l'esponente di 2 in quest'ultima disuguaglianza soddisfa

$$
j\left(\beta-\frac{1}{p}\right)+\frac{J}{p}\leq j\left(\beta-\frac{1}{p}\right)+\frac{j}{\alpha p}+\frac{1}{p}=j\left[\beta-\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]+\frac{1}{p}=-j\varepsilon+\frac{1}{p};
$$

pertanto

$$
\begin{aligned}
\|c_r-c_r^0\|_\infty &\leq \frac{\tilde{k}}{C}\,j^2 2^{j(\beta-\frac{1}{p})+\frac{J}{p}} \\
&\leq \frac{\tilde{k}2^{\frac{1}{p}}}{C}\,j^2 2^{-\varepsilon j}=\left(\frac{\tilde{k}2^{\frac{1}{p}}}{C}\,j^2 2^{-\frac{\varepsilon j}{2}}\right)2^{-\frac{\varepsilon j}{2}}.
\end{aligned}
$$

Il pezzo fra parentesi è infinitesimo in j per cui, per j grande, sarà minore di 1. Perciò, definitivamente in j, si ha

$$\|c_r - c_r^0\|_\infty \leq 2^{-\frac{\varepsilon j}{2}}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che l'insieme dei $c \in \mathbb{R}^s$ con $\|c\|_\infty \leq R$ e tale che $f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in S_M^{(l,j)}$ è contenuto in una palla (per la norma ℓ^∞) di diametro $2^{-\varepsilon j/2}$ e quindi di raggio $2^{-\varepsilon j/2-1}$. Il volume (secondo la misura di Lebesgue) della palla s dimensionale in $\mathbb{R}^s$ di raggio r è dato da $\frac{\pi s/2}{\Gamma(s/2+1)} r^s \leq 2^s r^s$ in quanto la palla di raggio r è inclusa nel cubo di spigolo $2r$. Perciò si trova subito che

$$\lambda_s\left(\left\{c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in S_M^{(l,j)}\right\}\right) \leq 2^s 2^{-\frac{\varepsilon s j}{2}-1}.$$

A sua volta si ha

$$\begin{aligned}\lambda_s\left(\left\{c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in \bigcup_{l=0}^{2^{J+j}-1} S_M^{(l,j)}\right\}\right) \\ &\leq 2^{J+j} 2^s 2^{-\frac{\varepsilon s j}{2}-1} \\ &\leq 2^{2j+1}\, 2^s\, 2^{-\frac{\varepsilon s j}{2}-1} \\ &= 2^s\, 2^{2j-\frac{\varepsilon s j}{2}} \\ &= 2^s\, 2^{-j(\frac{\varepsilon s}{2}-2)}.\end{aligned}$$

Perciò, se imponiamo che $s\varepsilon/2 < 2$, ossia $s > 4/\varepsilon$, allora l'ultima espressione è il termine generale di una serie convergente. In base al lemma di Borel Cantelli, si ha che

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_s\left(\limsup_{j\to+\infty}\left\{c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in \bigcup_{l=0}^{2^{J+j}-1} S_M^{(l,j)}\right\}\right) \\ &= \lambda_s\left(\left\{c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{l=0}^{2^{J+j}-1} S_M^{(l,j)}\right\}\right)\end{aligned}$$

Siccome, come abbiamo già osservato all'inizio della dimostrazione, $S_M \subset \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{l=1}^{2^{J+j}} S_M^{(l,j)}$, allora l'insieme

$$\{c \in \mathbb{R}^s : \|c\|_\infty \leq R, f + c_1 g_1 + \cdots + c_s g_s \in S_M\}$$

ha a sua volta misura nulla.

$\square$

Segue subito il seguente corollario:

Corollario 64. *Sia $\alpha > 1$. L'insieme delle funzioni f in $L^p(\mathbb{T})$ tali che, per ogni $x \in D_\alpha$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

è prevalente.

Dimostrazione. Sia $P = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_s\}$ e, per ogni β, poniamo

$$T_\beta = \left\{ g \in P : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} < \beta \quad \forall x \in D_\alpha \right\};$$

$$S_\beta = T_\beta^C = \left\{ g \in P : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} \geq \beta \quad \forall x \in D_\alpha \right\}.$$

Sia poi $\{\beta_n\}$ una successione crescente di numeri positivi che tenda a $\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$. La proposizione 63 dice che, per ogni n,

$$\lambda_s(f + T_{\beta_n}) = 0 \qquad \text{per ogni } f \in L^p(\mathbb{T}),$$

cioè λ_s è trasversa a T_{β_n} per ogni n. Ciò significa che P è una sonda per tutti gli insiemi che contengono S_{β_n} e che risultano pertanto prevalenti. Perciò, per ogni n, anche

$$\tilde{S}_{\beta_n} = \left\{ g \in L^p(\mathbb{T}) : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} \geq \beta_n \quad \forall x \in D_\alpha \right\}$$

è prevalente. Sia infine

$$\tilde{S} = \left\{ g \in L^p(\mathbb{T}) : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad \forall x \in D_\alpha \right\};$$

allora $\tilde{S} = \bigcap_n \tilde{S}_{\beta_n}$ è intersezione numerabile di insiemi prevalenti e quindi, in base alla proposizione 51, anche $\tilde{S}$ è prevalente. Ne segue la tesi.

□

5.3 Il caso generale

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del teorema 58.

Teorema 58. *Sia $1 \leq p < +\infty$. Per ogni $\beta \in [0, 1/p]$, l'insieme delle funzioni $f \in L^p(\mathbb{T})$ tali che $\dim_{\mathcal{H}}(E(\beta, f)) = 1 - \beta p$ è prevalente.*

Dimostrazione. Sia $\alpha > 1$; grazie al corollario 64 sappiamo che esiste un insieme prevalente tale che ogni funzione f appartenente ad esso verifica per ogni $x \in D_\alpha$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} \geq \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Per concludere utilizziamo un argomento sulla dimensione di Hausdorff già visto. Fissiamo f nell'insieme prevalente e poniamo

$$D_\alpha^1 = \left\{x \in D_\alpha : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right\},$$

$$D_\alpha^2 = \left\{x \in D_\alpha : \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|S_n f(x)|}{\log n} > \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right\},$$

cosicché $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^1 \cup D_\alpha^2) = \mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha) = +\infty$. È sufficiente provare che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^2) = 0$. Sia (β_n) una successione di numeri reali tali che

$$\begin{cases} \beta_n > \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \\ \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \end{cases}$$

Osserviamo che

$$D_\alpha^2 \subset \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{E}(\beta_n, f).$$

Inoltre il teorema 18 per $p > 1$ e il corollario 28 per $p = 1$ implicano che $\mathcal{H}^{1/\alpha}(\mathcal{E}(\beta_n, f)) = 0$ per tutti gli n. Quindi $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^2) = 0$ e $\mathcal{H}^{1/\alpha}(D_\alpha^1) = +\infty$, il che prova che

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E\left(\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right), f\right)\right) \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Ancora per il teorema 18 e il corollario 28, la disuguaglianza è necessariamente una uguaglianza.

Dunque una tale funzione f soddisfa le conclusioni del teorema 58. Ponendo $\beta = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ si ha $\frac{1}{\alpha} = \beta p$ e quindi la tesi.

$\square$

Capitolo 6

Divergenza rapida su insiemi grandi in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$

Il teorema 34 implica che se $\beta < 1$ esiste un insieme residuale $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tale che, se $f \in A$, si può trovare un insieme $E \subset \mathbb{T}$ con dimensione di Hausdorff 1, tale che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{(\log n)^\beta} = +\infty \text{ per ogni } x \in E. \tag{6.1}$$

D'altra parte, come abbiamo visto all'inizio del capitolo 3, sappiamo che, fissata $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\|S_n f\|_\infty$ è infinitesima rispetto a $\log n$ e che, viceversa, data una successione infinitesima $(\delta_n)_{n\geq 2}$ di reali positivi, è possibile trovare una funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tale che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(0)|}{\delta_n \log n} = +\infty.$$

Risulta a questo punto naturale domandarsi quale sia la grandezza dell'insieme dei punti che hanno questa proprietà. L'equazione (6.1) ci dice che per ogni $0 < \beta < 1$, per ogni funzione di $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, ad eccezione di un insieme di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, scelto $\delta_n = (\log n)^{\beta-1}$, tale proprietà è vera per un insieme di dimensione di Hausdorff pari a 1. Vedremo che questo rimane vero per ogni δ_n e per "quasi ogni" funzione di $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, dove questo termine può intendersi in entrambi i sensi, cioè quello della densità e quello della prevalenza.

6.1 La costruzione base

Il passo cruciale è dato dal seguente lemma, che è un analogo del lemma 39, ma in ipotesi leggermente diverse.

Definiamo per k intero positivo e $\omega > 1$ l'insieme

$$J_k^\omega = \bigcup_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j}{k} - \frac{1}{2\omega k}, \frac{j}{k} + \frac{1}{2\omega k} \right],$$

che verrà considerato come sottoinsieme di $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Lemma 65. *Sia $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ una successione di reali positivi decrescente a zero. Allora, se n è abbastanza grande, si possono trovare un intero k_n, un numero reale $\omega_n > 1$ e un polinomio trigonometrico P_n con spettro contenuto in $[1, 2n-1]$ tale che*

- $\|P_n\|_\infty \leq 1$*;*
- *per ogni $x \in J_{k_n}^{\omega_n}$, $|S_n P_n(x)| \geq \varepsilon_n \log n$.*

Inoltre, possiamo scegliere k_n e ω_n tali che $(k_n) \longrightarrow +\infty$ e $\omega_n = \mathrm{o}(k_n^\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Se dimostriamo la tesi quando $\varepsilon_n \geq \frac{\log\log n}{4\pi \log n}$, allora abbiamo finito. Infatti, se $(\tilde{\varepsilon}_n)$ è una successione decrescente e infinitesima di reali positivi qualsiasi, posto $\varepsilon_n = \max\{\tilde{\varepsilon}_n, \frac{\log\log n}{4\pi\log n}\}$, la tesi vale per ε_n. Perciò

$$|S_n P_n(x)| \geq \varepsilon_n \log n \geq \tilde{\varepsilon}_n \log n,$$

e quindi la tesi vale anche per $\tilde{\varepsilon}_n$.

Supponiamo dunque che valga, per ogni n

$$\varepsilon_n \geq \frac{\log\log n}{4\pi\log n}.$$

In particolare $\varepsilon_n \log n$ tende all'infinito. Definiamo k_n e ω_n in questo modo:

- $\omega_n = \exp(4\pi(\log n)\varepsilon_n)$
- k_n è il più grande intero k che soddisfa

$$2\pi k\omega_n \leq n.$$

Le definizioni date assicurano effettivamente la seconda parte della tesi. Infatti, se $\alpha > 0$, si ha

$$\frac{\omega_n}{n^\alpha} = \exp[4\pi(\log n)\varepsilon_n - \alpha\log n] = \exp\left[-\alpha\log n\left(-\frac{4\pi\varepsilon_n}{\alpha} + 1\right)\right]$$

che tende a 0 per $n \longrightarrow +\infty$; quindi $\omega_n = \mathrm{o}(n^\alpha)$ per tutti gli $\alpha > 0$.

Inoltre, per come abbiamo definito k_n, vale la disuguaglianza

$$2\pi k_n \omega_n \leq n \leq 2\pi(k_n+1)\omega_n;$$

siccome $\log n \leq \omega_n = \mathrm{o}(n^\alpha)$ per tutti gli $\alpha > 0$, si ha, per n abbastanza grande, $\omega_n \leq n^{1/2}$, quindi la disuguaglianza precedente assicura che

$$\frac{n}{2\pi \log n} \leq \frac{2\pi(k_n+1)\omega_n}{2\pi \log n} \leq \frac{2k_n\omega_n}{\log n} \leq \frac{2k_n n^{1/2}}{\log n},$$

da cui

$$k_n \geq \frac{n}{2\pi \log n} \cdot \frac{\log n}{2n^{1/2}} = \frac{n^{1/2}}{4\pi}.$$

Ne segue in particolare che (k_n) tende a $+\infty$.

Osserviamo che è possibile costruire le funzioni f_n, h_n e g_n date dal lemma 37 e dal Corollario 38 per i valori $k = k_n$ e $\omega = \omega_n$; in particolare, ricordiamo che, posti $z_{j_n} = e^{\frac{2\pi i j_n}{k_n}}$ per $j_n = 0, \ldots, k_n - 1$, si ha

$$f_n(z) = \frac{1}{k_n}\sum_{j_n=0}^{k_n-1} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\overline{z_{j_n}}z} \qquad \text{e} \qquad g_n(x) = \log f_n(e^{2\pi i x}).$$

Applichiamo ora il lemma 4 alla funzione $\theta_x(t) = g_n(t) - g_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{T}$: infatti per il Corollario 38, risulta $\|\theta_x\|_\infty \leq 2\log\omega_n + 2\log C_3$, $\|\theta'_x\|_\infty \leq 2\pi k_n \omega_n \leq n$ e inoltre $\theta_x(x) = 0$; dunque per $n \geq 4$ otteniamo

$$\begin{aligned} |\sigma_n \theta_x(x)| &\leq 4 + \frac{1}{4}\|\theta_x\|_\infty \leq 4 + \frac{1}{4}\,(2\log\omega_n + 2\log C_3) \\ &\leq \frac{1}{2}\log\omega_n + C. \end{aligned}$$

Essendo $\sigma_n\theta(t) = \sigma_n g(t) - g(x)$, concludiamo, in base a (ii') del Corollario 38, che se $x \in J_{k_n}^{\omega_n}$ si ha

$$\begin{aligned} |\sigma_n g_n(x)| &\geq |g_n(x)| - |\sigma_n\theta_x(x)| \geq \log\omega_n + \log C_2 - \frac{1}{2}\log\omega_n - C \\ &= \frac{1}{2}\log\omega_n - C_4. \end{aligned}$$

Infine poniamo

$$P_n = \frac{2}{\pi} e_n \sigma_n(\Im m\; g_n) = \frac{2}{\pi} e_n \Im m\,(\sigma_n g_n),$$

cosicché $\|P_n\|_\infty \leq 1$. Ora, ricordiamo che g_n è la restrizione alla circonferenza di una funzione olomorfa h_n che soddisfa $h_n(0) = 0$. Ragionando come nella dimostrazione del lemma 39, possiamo quindi scrivere $\sigma_n g_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j$ da cui $2i\Im m\, \sigma_n g_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \overline{a_j} e_{-j} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j$. Perciò lo spettro di P_n è contenuto in $[1, 2n-1]$. Inoltre, per ogni $x \in J_{k_n}^{\omega_n}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
|S_n P_n(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \overline{a_j} e_{-j+n} \right| \\
&= \frac{1}{\pi} |\sigma_n g_n(x)| \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \log \omega_n - \frac{C_4}{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi \log n\varepsilon_n - \frac{C_4}{\pi} \\
&= 2\varepsilon_n \log n - \frac{C_4}{\pi} \\
&= \varepsilon_n \log n \left[2 - \frac{C_4}{\pi\varepsilon \log n} \right] \\
&\geq \varepsilon_n \log n
\end{aligned}$$

se n è abbastanza grande.

□

6.2 Teoremi di divergenza

Siamo infine in grado di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 66. *Sia $(\delta_n)_{n\geq 2}$ una successione infinitesima di reali positivi. Per ogni funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, ad eccezione di un insieme B di prima categoria in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, esiste $E \subset \mathbb{T}$ con dimensione di Hausdorff 1 tale che per ogni $x \in E$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\delta_n \log n} = +\infty.$$

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che gli insiemi di divergenza non possono avere dimensione di Hausdorff superiore a 1. Infatti per ogni funzione f continua, se si indica con $K(\delta_n, f)$ l'insieme

$$K(\delta_n, f) = \left\{ x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\delta_n \log n} > 0 \right\},$$

allora risulta $K(\delta, f) \subset \mathcal{F}(1, f) = \left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\log n} > 0\right\}$; quindi, poiché il lemma 35 assicura che $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(1, h)) \leq 1$, deve essere $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq 1$.

Sia $(\delta_n)_{n\geq 2}$ una successione infinitesima di numeri positivi e consideriamo una successione ausiliaria $(\delta'_n)_{n\geq 1}$ tale che

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \delta'_n = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta'_n}{\delta_n} = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \delta'_n \log n = +\infty \end{cases}$$

Una tale successione esiste: ad esempio $\delta'_n = \max\{\delta_n^{1/2}, \frac{1}{\log\log n}\}$ verifica il sistema. Costruiamo poi un'altra successione a partire da (δ'_n), decrescente a zero, data da $\eta_n = \max\{\delta'_k : k \geq n\}$. Infine, fissiamo una successione $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ anch'essa infinitesima e tale che ε_n/η_n tenda all'infinito; ad esempio possiamo prendere $\varepsilon_n = \eta_n^{1/2}$.

Consideriamo adesso una successione $(g_n)_{n\geq 1}$ densa in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, tale che lo spettro di g_n sia contenuto in $[-n, n]$. A partire da queste funzioni, vogliamo costruire intorni di dimensioni opportune in cui si riescano ad avere somme di Fourier grandi.
Il lemma 65 ci assicura che esiste un intero N, una successione $(P_j)_{j\geq N}$ di polinomi trigonometrici con spettri contenuti in $[1, 2j-1]$, una successione divergente di interi positivi $(k_j)_{j\geq N}$ e una successione $(\omega_j)_{j\geq N}$ tale che $\omega_j > 1$, $\omega_j = \mathrm{o}(k_j^\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$ e

$$|S_j P_j(x)| \geq \varepsilon_j \log j \tag{6.2}$$

per ogni $x \in J_{k_j}^{\omega_j}$. Definiamo un'altra successione densa in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, $(h_j)_{j\geq N}$, indicizzata a partire da N, data da

$$h_j := g_j + \frac{\eta_j}{\varepsilon_j} e_j P_j.$$

Essa è ancora densa in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ perché $\|h_j - g_j\|_\infty = \frac{\eta_j}{\varepsilon_j}\|e_j\, P_j\|_\infty \leq \frac{\eta_j}{\varepsilon_j}$ che tende a 0 per definizione di (ε_j). Inoltre, per ogni $j \geq N$, gli spettri di g_j e di $\frac{\eta_j}{\varepsilon_j} e_j P_j$ sono disgiunti, in quanto quello di g_j è contenuto in $[-j, j]$ e quello di $e_j P_j$ è contenuto in $[j+1, 3j-1]$. In particolare lo spettro di g_j non interseca l'intervallo $[j, 2j)$ e quindi, ricordando la (6.2), si ha

$$\begin{aligned}|S_{2j}h_j(x) - S_jh_j(x)| &= \left|\frac{\eta_j}{\varepsilon_j} S_j e_j P_j(x)\right| \\ &= \frac{\eta_j}{\varepsilon_j}\,|S_jP_j(x)| \\ &\geq \frac{\eta_j}{\varepsilon_j}\,\varepsilon_j \log j \\ &= \eta_j \log j\end{aligned}$$

per ogni $x \in J_{k_j}^{\omega_j}$. Perciò, per ogni $x \in J_{k_j}^{\omega_j}$ o l'intero $n = j$ o l'intero $n = 2j$ è tale che $|S_nh_j(x)| \geq \frac{1}{2}\eta_j \log j$; poiché $j \leq n \leq 2j$ e $\eta_j \geq \eta_n \geq \delta'_j$ si ha

$$|S_nh_j(x)| \geq \frac{1}{2}\eta_j \log j \geq \frac{1}{2}\eta_n \log\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}\delta'_n(\log n - \log 2).$$

Sia $r_j > 0$ abbastanza piccolo in modo che, per ogni $h \in B(h_j, r_j)$ e per ogni $n \in \{j, 2j\}$, si abbia

$$|S_nh(x)| \geq |S_nh_j(x)| - 1.$$

Questo è possibile, perché, se $h \in B(h_j, r_j)$ allora

$$\|S_nh - S_nh_j\|_\infty = \|S_n(h - h_j)\|_\infty \leq \sum_{|k|\leq n} |\langle h - h_j, e_k\rangle| \leq (2n+1)r_j;$$

perciò, se $r_j < \frac{1}{4j+1} \leq \frac{1}{2n+1}$ allora, per ogni x, $|S_nh(x)| \geq |S_nh_j(x)| - |S_nh(x) - S_nh_j(x)| \geq |S_nh_j(x)| - 1$, come richiesto.

Affermiamo che l'insieme $B = G^C$, dove G è il seguente insieme denso di $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, soddisfa tutte le richieste

$$G = \bigcap_{p\geq N}\bigcup_{j\geq p} B(h_j, r_j).$$

Infatti, prendiamo una $h \in G$ e una qualunque successione crescente (j_p) tale che h appartenga a $B(h_{j_p}, r_{j_p})$; in corrispondenza di j_p troviamo ω_{j_p} e k_{j_p} e poniamo, per semplicità, $\rho_p = \omega_{j_p}$ e $s_p = k_{j_p}$. Il seguente insieme

$$E := \limsup_{p\to+\infty} E_p, \qquad \text{con } E_p = J_{s_p}^{\rho_p}$$

ha dimensione di Hausdorff 1. Infatti poiché $\omega_{j_p} = \mathrm{o}(k_{j_p}^{\alpha})$ per ogni $\alpha > 0$, allora se p è abbastanza grande $\rho_p = \omega_{j_p} < k_{j_p}^{\alpha+1} = s_p^{\alpha+1}$. Ne deduciamo che per ogni $\alpha > 0$ e p abbastanza grande, E_p contiene

$$F_p = \bigcup_{j=0}^{s_p-1}\left[\frac{j}{s_p} - \frac{1}{2s_p^{1+\alpha}}, \frac{j}{s_p} + \frac{1}{2s_p^{1+\alpha}}\right].$$

Abbiamo già osservato che $\limsup_p F_p$ ha dimensione di Hausdorff pari a $1/(1+\alpha)$, per cui $\dim_{\mathcal{H}}(E) \geq \frac{1}{1+\alpha}$ per ogni $\alpha > 0$; si ha quindi $\dim_{\mathcal{H}}(E) \geq 1$. Verifichiamo che E è l'insieme cercato. Definitivamente $\delta'_n \log 2 \leq \frac{\delta'_n \log n}{4}$. Ricordando che $\delta'_n \log n$ tende all'infinito, per quanto visto in precedenza per ogni $x \in E$ si ha

$$\begin{aligned}
|S_n h(x)| \geq |S_n h_j(x)| - 1 &\geq \frac{1}{2}\delta'_n(\log n - \log 2) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\delta'_n \log n - \frac{1}{2}\delta'_n \log 2 - 1 \\
&\geq \frac{1}{2}\delta'_n \log n - \frac{\delta'_n \log n}{4} - 1 = \frac{\delta'_n \log n}{4} - 1 \\
&= \frac{\delta'_n \log n}{4}\left(1 - \frac{4}{\delta'_n \log n}\right) \\
&\geq \frac{\delta'_n \log n}{8},
\end{aligned}$$

per infiniti valori di n. Perciò si ha

$$\frac{|S_n h(x)|}{\delta_n \log n} \geq \frac{\delta'_n \log n}{8\delta_n \log n} = \frac{\delta'_n}{8\delta_n}$$

per infiniti valori di n. Poiché, per come abbiamo scelto (δ'_n), il termine a destra tende all'infinito, si ha per ogni $x \in E$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n h(x)|}{\delta_n \log n} = +\infty.$$

Questo conclude la dimostrazione.

□

Lo stesso risultato del teorema 66 vale in un insieme prevalente di $\mathcal{C}(\mathbb{T})$,

Teorema 67. *Sia $(\delta_n)_{n\geq 2}$ una successione infinitesima di reali positivi. L'insieme delle funzioni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tali che esiste $E \subset \mathbb{T}$ con dimensione di Hausdorff 1 tale che per ogni $x \in E$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\delta_n \log n} = +\infty,$$

è prevalente.

Dimostrazione. Per l'osservazione fatta all'inizio della dimostrazione del teorema 66, dobbiamo dimostrare che, data una successione infinitesima $(\delta_n)_{n\geq 2}$ e denotato con A l'insieme delle funzioni continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tale che

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\left\{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n f(x)|}{\delta_n \log n} = +\infty\right\}\right) < 1,$$

l'insieme A è timido in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Osserviamo che A è uno spazio vettoriale e che, in base al Teorema 66, esso è proprio. Dunque A è timido per la proposizione 55.

$\square$

Bibliografia

[1] F. Bayart, Y. Heurteaux, *Multifractal analysis of the divergence of Fourier series*, arXiv:1101.3027, soumis.

[2] F. Bayart, Y. Heurteaux, *Multifractal analysis of the divergence of Fourier series: the extreme cases*, arXiv:1110.5478, soumis.

[3] J-M. Aubry, *On the rate of pointwise divergence of Fourier and wavelet series in L^p*, Journal of Approx. Th. 538 (2006), 97-111.

[4] V. Beresnevich, S. Velani, *A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures*, Annals of Math 164 (2006), 971-992.

[5] K. Falconer, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, Wiley (2003).

[6] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidian Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995

[7] R. E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*, Vol. I, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967

[8] R. E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*, Vol. II, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967

[9] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1959.

[10] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1959.

[11] L. Fejér,*Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 63-104.

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mladinska Knjiga, McGraw-Hill, 1970.

[13] S. Lang, *Complex Analysis*, fourth ed., Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2003.

[14] B. R. Hunt, T. Sauer, J. A. Yorke, *Prevalence: a Translation-Invariant "Almost Every" on Infinite-dimensional Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 27, pp217-238, (1992).

[15] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fouries series*, Acta Math. 116, pp. 135-157, 1966.

[16] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, Southern Illinois Univ. Press, pp. 235-255, Edwardsville, Ill., 1967.

[17] J. Arias de Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series*, Springer Lecture Notes in Math., vol 1785.