

Aggiornato al 20 gennaio 2006

Andrea Carpignani

Matematica e statistica (corso B)

(Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari, a.a. 2005/06)

Appunti ed esercizi

ANDREA CARPIGNANI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Largo B. Pontecorvo 5, 56127 Pisa
carpigna@mail.dm.unipi.it
www.dm.unipi.it/~carpigna

Introduzione

Questa è una raccolta di appunti ed esercizi per il corso di “matematica e statistica” dell’anno accademico 2005/06. Gli appunti vanno intesi come un completamento di alcuni argomenti trattati a lezione e, dunque, non coprono tutto il programma d’esame, ma si limitano ad alcuni (pochi) argomenti più delicati, che andrebbero trattati con maggiore cura.

Programma del corso

Il corso si propone di fornire agli studenti gli strumenti fondamentali della matematica: il linguaggio, i metodi di calcolo, gli strumenti dell’analisi matematica, della probabilità e della statistica.

1. Fondamenti della matematica

- 1.1 Unità di misura, calcolo approssimato, percentuali.
- 1.2 Logica, teoria degli insiemi, funzioni e loro grafici.
- 1.3 Il piano cartesiano: rette nel piano, funzioni elementari, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni trigonometriche. Equazioni e disequazioni, grafici di funzioni, crescita esponenziale.

2. Analisi matematica

- 2.1 Limiti di funzione: definizione, proprietà elementari, principali limiti notevoli. Calcolo di limiti usando espedienti per ricondursi ai limiti notevoli. Continuità: definizione, proprietà elementari. Enunciati dei teoremi fondamentali concernenti la continuità. Gerarchia di funzioni infinite ed infinitesime.
- 2.2 Definizione di derivata. Interpretazione geometrica. Derivate di funzioni elementari, regole di derivazione. Monotonia di una funzione e suo legame con la nozione di derivabilità. Massimi e minimi. Ricerca di massimi e minimi per una funzione derivabile. Studio del grafico di una funzione. Il teorema di de l’Hôpital e suo uso per il calcolo di limiti. Il teorema di Taylor.
- 2.3 La nozione di integrale. Proprietà dell’integrale. Il teorema della media integrale, il teorema fondamentale del calcolo integrale: legame tra l’integrale e la ricerca di una primitiva. Metodo d’integrazione per parti e per sostituzione. Integrali impropri.

3. Probabilità e statistica

- 3.1 Cenni di calcolo combinatorio. Introduzione alla probabilità: definizione di probabilità, probabilità condizionale, teorema di Bayes. Indipendenza tra due eventi.
- 3.2 Variabili aleatorie discrete: definizione, legge di una variabile aleatoria. Indipendenza tra variabili aleatorie. Schema delle prove indipendenti, schema di Bayes. Risoluzione di semplici problemi di probabilità.
- 3.3 Cenni di statistica descrittiva: analisi dei dati sperimentali, metodi grafici (rappresentazione dei dati mediante istogrammi). Definizione di media e dispersione. Correlazione tra due caratteri. Regressione.

Appunti di logica

Ogni teoria matematica ha una struttura ipotetico–deduttiva: assume alcune premesse e ne trae, mediante ragionamento, le conseguenze che interessano. Poiché tutti gli uomini, nella vita comune, ragionano – o, almeno, dovrebbero farlo – non c'è, in via di principio, la necessità di fare uno studio dettagliato sulla logica, che, appunto, è la scienza del ragionamento. Tuttavia è interessante fare qualche riflessione in questo campo, sia per chiarire alcune ambiguità del linguaggio comune, sia per mettere in luce alcuni procedimenti tipici che si applicano ripetutamente in matematica.

Lo studio della logica (come quello di tutta la matematica) non si può compiere senza introdurre simboli appropriati che servano a *rappresentare* i nostri ragionamenti in modo preciso. Veramente, le notazioni che introdurremo, più che dar luogo ad un linguaggio completamente formalizzato, costituiranno un'abbreviazione e una chiarificazione del linguaggio comune, ma, anche a questo modesto livello, ci saranno molto utili, soprattutto quando si dovranno affrontare ragionamenti un po' complicati.

Cominciamo con l'indicare con lettere (maiuscole, in corsivo calligrafico) certe *proposizioni*, o *affermazioni*. Ad esempio, possiamo convenire che:

\mathcal{A} significhi “la rosa è un fiore”,
 \mathcal{B} significhi “il leone è un animale domestico”,
 \mathcal{C} significhi “in ogni triangolo, la somma degli angoli interni è un angolo piatto”.

Come si vede, tra le proposizioni che sono prese in considerazione, ve ne possono essere anche di false, ma è utile maneggiare le proposizioni prescindendo dal loro contenuto interno, e quindi dal fatto che possono essere dichiarate vere.

Una prima riflessione sul nostro linguaggio abituale ci porta a riconoscere che le proposizioni possono essere legate fra di loro dando luogo a proposizioni più complesse; i termini di collegamento vengono chiamati i *connettivi logici*. I più elementari sono i seguenti:

“e”	“o”	“non”
(coniunzione)	(disgiunzione)	(negazione)

I connettivi “e” e “o” sono binari, cioè si applicano a due proposizioni, mentre il connettivo “non” si applica a una sola. Ad esempio, se \mathcal{P} significa “soffia il vento” e \mathcal{Q} “fa freddo”, “ \mathcal{P} e \mathcal{Q} ” (che si denota con $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$) significa “soffia il vento e fa freddo”, “ \mathcal{P} o \mathcal{Q} ” (che si denota con $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$) significa “soffia il vento oppure fa freddo”, non \mathcal{P} significa “non soffia il vento”. Dunque “ $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ ” è vera se e solo se sono vere *entrambe* le proposizioni, “ $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ” è vera se e solo se è vera *almeno una* delle due proposizioni, “non \mathcal{P} ” è falsa se \mathcal{P} è vera, ed è vera se \mathcal{P} è falsa.

Notiamo che, nel linguaggio comune (almeno nella lingua italiana), non sempre la disgiunzione viene intesa nel senso che abbiamo fissato (che è quello *debole*); a volte essa viene intesa in senso *forte*: cioè si esclude che le proposizioni in questione siano

entrambe vere. Se si dice, ad esempio, “nuoto o annego”, si afferma che una delle eventualità deve verificarsi, e si esclude che si verifichino entrambe.

Questi esempi mostrano che il linguaggio comune presenta ambiguità, come dicevamo. Spesso, nel linguaggio comune, è il significato della frase, o il contesto, a suggerirci l'interpretazione esatta.

Il nostro buon senso logico ci porta ad ammettere che, a volte, due diverse espressioni possano essere logicamente equivalenti e che, quindi, possano essere sostituite l'una all'altra ovunque esse ricorrano. Per esempio, noi ammettiamo che:

$$(1.1) \quad \text{“}\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}\text{” sia equivalente a “}\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}\text{”},$$

$$(1.2) \quad \mathcal{P} \text{ sia equivalente a “non(non } \mathcal{P}\text{)”}.$$

Così, ci convinciamo che:

$$(1.3) \quad \text{“non}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})\text{” è equivalente a “(non } \mathcal{P}) \vee (\text{non } \mathcal{Q})\text{”},$$

$$(1.4) \quad \text{“non}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})\text{” è equivalente a “(non } \mathcal{P}) \wedge (\text{non } \mathcal{Q})\text{”},$$

Si riconosce immediatamente che vi è una certa simmetria nel comportamento dei due connettivi “ \wedge ” e “ \vee ”; le regole appena scritte possono anzi permettere – volendo – di eliminare uno di questi connettivi: ad esempio, in luogo di “ $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ ”, possiamo scrivere: “non ((non \mathcal{P}) \vee (non \mathcal{Q}))”.

Il compito fondamentale della logica è lo studio della deduzione; nel linguaggio comune c'è un connettivo che esprime la possibilità di compiere la deduzione: è il connettivo condizionale (“se”... “allora”). Ad esempio, diciamo che “se soffia il vento, (allora) fa fretto”. Scriviamo dunque, dando a \mathcal{P} e \mathcal{Q} il significato di prima, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$; il simbolo \Rightarrow viene detto il connettivo di *implicazione*. È senz'altro conveniente introdurre questo segno. Tuttavia, esso può essere espresso mediante i connettivi precedenti. Infatti, si vuole che valga la seguente *regola di deduzione*:

$$\text{“se è vera } \mathcal{P} \text{ e se è vera } \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}, \text{ è vera } \mathcal{Q}.”$$

Si vede immediatamente che le cose vanno bene se il simbolo $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ s'interpreta come “(non \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q} ” (infatti, se è vera quest'ultima ed è vera \mathcal{P} , essendo falsa (non \mathcal{P}), è necessariamente vera la \mathcal{Q}). Ad esempio, se s'intende che:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} & \text{ significhi “l'intero } n \text{ è divisibile per 6”}, \\ \mathcal{Q} & \text{ significhi “l'intero } n \text{ è pari”}, \end{aligned}$$

allora è vera la $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: infatti è vero che “ n non è divisibile per 6 oppure n è pari”. Il connettivo d'implicazione ci porta a costruire anche proposizioni vere, ma piuttosto strane rispetto al nostro linguaggio ordinario. Ad esempio, se conveniamo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} & \text{ significhi “New York è la capitale della Francia”}, \\ \mathcal{S} & \text{ significhi “ogni triangolo ha tre lati”}, \end{aligned}$$

è vera la proposizione $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$. In generale, se \mathcal{R} è una proposizione *falsa*, $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{S}$ è vera qualunque sia la proposizione \mathcal{S} . Del resto, anche i filosofi antichi avevano riconosciuto che *da una premessa falsa si può dedurre tutto quello che si vuole*. L'interpretazione del segno \Rightarrow è stata data in modo tale che la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ sia falsa solo quando \mathcal{P} è vera e \mathcal{Q} falsa. Queste semplici osservazioni sull'implicazione ci permettono di chiarire il nostro modo spontaneo di procedere nelle dimostrazioni per assurdo. Lo scopo è quello di dimostrare la verità di $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (in questo contesto \mathcal{P} viene detta *ipotesi* mentre \mathcal{Q} viene detta *tesi*); sappiamo che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ equivale a “ $(\text{non } \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$ ”. Per la *legge della doppia negazione* (1.2), questa si può scrivere nella forma: “ $(\text{non } \mathcal{P}) \vee (\text{non}(\text{non } \mathcal{Q}))$ ” o anche, cambiando l'ordine, “ $(\text{non}(\text{non } \mathcal{Q})) \vee (\text{non } \mathcal{P})$ ”, e si vede subito che questa si può scrivere $(\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})$. Dunque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è equivalente a $(\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})$.

Spesso le dimostrazioni per assurdo hanno una forma più sofisticata. Per provare che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera, si ammette che \mathcal{P} sia vera e \mathcal{Q} sia falsa (cioè che sia vera $\text{non } \mathcal{Q}$) e si procede nelle deduzioni finché non si arriva a una proposizione falsa \mathcal{R} (cioè una proposizione \mathcal{R} tale che $\text{non } \mathcal{R}$ sia vera; ciò accade quando \mathcal{R} è una *contraddizione*, cioè una proposizione del tipo “ $\mathcal{S} \wedge (\text{non } \mathcal{S})$ ”). In termini più precisi, ammettiamo dunque di avere dimostrato la verità dell'implicazione $(\mathcal{P} \wedge (\text{non } \mathcal{Q})) \Rightarrow \mathcal{R}$; per quello che abbiamo detto sopra, questa si può scrivere nella forma $(\text{non } \mathcal{R}) \Rightarrow ((\text{non } \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q})$, oppure anche $(\text{non } \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$. Ma $\text{non } \mathcal{R}$ è vera; perciò, per la nostra regola di deduzione, è vera $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Introduciamo ora un altro simbolo utile: la *doppia implicazione*. Scriviamo $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ come equivalente di $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$; ad esempio, supponiamo che \mathcal{P} significhi “il triangolo T ha due lati eguali” e \mathcal{Q} significhi “il triangolo T ha due angoli eguali”. Allora, com'è noto, è vera la proposizione $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. Spesso la proposizione $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ si legge *\mathcal{P} è condizione necessaria e sufficiente perché accada \mathcal{Q}* . Se la proposizione $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera, allora \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere o entrambe false. Il segno \Leftrightarrow permette di rappresentare in modo preciso quell'equivalenza logica che all'inizio abbiamo introdotto solo in maniera vaga. Ad esempio, le (1.1) e (1.2) si possono così rappresentare:

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{non}(\text{non } \mathcal{P}).$$

Analogamente, le *leggi di de Morgan* (1.3) e (1.4) si possono scrivere:

$$\text{non}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{P}) \vee (\text{non } \mathcal{Q}), \quad \text{non}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{P}) \wedge (\text{non } \mathcal{Q}).$$

Queste quattro espressioni sono *tautologie*, cioè proposizioni vere quali siano le proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} che compaiono nella loro espressione.

La logica delle proposizioni, di cui abbiamo dato solo pochi cenni, ci fornisce un linguaggio troppo povero per le esigenze anche più elementari della matematica; occorre generalizzare la nozione di proposizione introducendo certe espressioni logiche contenenti delle *variabili*. Ad esempio l'espressione

$$x \geq 1 \quad (\text{intendendo che } x \text{ rappresenti un numero reale})$$

contiene la variabile x ; la sua verità dipende dai valori che attribuiamo alla x ; essa diviene una proposizione vera sostituendo a x il simbolo 3, una proposizione falsa sostituendo a x il simbolo 0. Si dicono *predicati* le espressioni di questo tipo; esse si indicano con una lettera (che per noi sarà maiuscola, in corsivo calligrafico) seguita da una o più lettere minuscole entro parentesi; queste indicano le variabili (saranno scelte fra le ultime lettere dell'alfabeto). Ad esempio possiamo porre:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{H}(x) & \text{per dire: } "x \text{ è un uomo onesto"}, \\ \mathcal{L}(x, y) & \text{per dire: } "x \text{ è un uomo capace di fare il lavoro } y", \\ \mathcal{P}(x, y, z) & \text{per dire: } "il \text{ prodotto del numero } x \text{ per il numero } y \\ & \text{dà il numero } z". \end{array}$$

Spesso si dice anche che il predicato (in una variabile) $\mathcal{H}(x)$ esprime una *proprietà* di x , che il predicato (in due variabili) $\mathcal{L}(x, y)$ esprime una *relazione* fra x e y .

Fra i predicati possiamo anche introdurre quelli che non contengono alcuna variabile; essi si identificano con le proposizioni, che abbiamo già considerato (in questo senso la "logica dei predicati" contiene la "logica delle proposizioni").

Nella logica dei predicati è opportuno anche introdurre altre lettere minuscole per indicare le *costanti*; in ogni teoria matematica vi sono certi enti particolari, che possono eventualmente essere sostituiti in luogo delle variabili (ad esempio, lo 0 dei numeri naturali, il numero 2, il numero π , e così via).

Come abbiamo visto sopra, quando in un predicato tutte le variabili vengono sostituite con costanti, si ottiene una proposizione: ad esempio, dalla relazione $x \geq y$, si ottiene, per sostituzione, la proposizione (vera) $\pi \geq 3$.

Un'altra via per trasformare un predicato in una proposizione è l'applicazione di uno o più *quantificatori*. I quantificatori sono due:

$$\exists \text{ (quantificatore esistenziale)} \quad \forall \text{ (quantificatore universale).}$$

Il loro significato e il loro impiego sono chiaramente spiegati da questi esempi:

$(\exists x) \mathcal{H}(x)$ significa "esiste almeno un x tale che sia vera $\mathcal{H}(x)$ " (col significato di prima: "esiste almeno un uomo onesto");

$(\forall x) \mathcal{H}(x)$ significa "per tutti gli x è vera $\mathcal{H}(x)$ " (col significato di prima: "tutti gli uomini sono onesti").

Come si verifica consideriamo questi altri esempi, in cui si sottintende che x sia un numero reale:

$$\begin{array}{ll} (\exists x) x^2 \geq 1 & (\text{è vera}), & (\forall x) x^2 \geq 1 & (\text{è falsa}), \\ (\forall x) x^2 \geq 0 & (\text{è vera}), & (\exists x) x^2 < 0 & (\text{è falsa}). \end{array}$$

Notiamo che, applicando il quantificatore a x , otteniamo una relazione che non dipende più effettivamente dalla lettera x (questa diventa una variabile "legata" o "muta"). Se il predicato contiene più variabili, solo dopo che ciascuna variabile sarà

stata sostituita con una costante, oppure trasformata in variabile legata mediante l'applicazione di un quantificatore, il predicato sarà diventato una proposizione. Ad esempio, l'espressione

$$(\forall y)(\exists x) \mathcal{L}(x, y)$$

è una proposizione; col significato attribuito precedentemente al predicato \mathcal{L} , essa si interpreta "qualunque sia il lavoro y , c'è un uomo che lo sa fare". Nel caso in cui (come ora) si impieghino più quantificatori di tipo diverso, occorre fare attenzione all'ordine con cui si applicano. Ad esempio

$$(\exists x)(\forall y) \mathcal{L}(x, y)$$

è una proposizione che significa "c'è un uomo che sa fare qualunque lavoro". Come si vede, lo scambio dei quantificatori ha alterato completamente il significato della frase.

Enunciamo ancora un'importante regola che riguarda la negazione di proposizioni costruite con impiego di quantificatori: essa è espressa mediante la tautologia:

$$(1.5) \quad \text{non } ((\forall x) \mathcal{H}(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (\text{non } \mathcal{H}(x));$$

(negare che tutti gli uomini sono onesti equivale ad affermare che esiste qualche uomo disonesto). E, simmetricamente:

$$(1.6) \quad \text{non } ((\exists x) \mathcal{H}(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (\text{non } \mathcal{H}(x));$$

(negare che esista qualche uomo onesto è come affermare che tutti gli uomini sono disonesti). In conclusione, la negazione può essere portata oltre il segno di quantificatore, cambiando il quantificatore con quello di tipo opposto.

Le regole logiche che abbiamo esposto possono apparire del tutto ovvie, e lo sono; si deve osservare peraltro che la maggior parte degli errori che si commettono in matematica sono violazioni di queste regole.

Per concludere, fra i simboli logici (simboli che sono di portata generale e perciò comuni a tutte le teorie matematiche) è opportuno inserire anche il simbolo di *eguaglianza*. Esso dà luogo a una relazione (cioè un predicato con due variabili) che si scrive $x = y$. Questa relazione esprime il fatto che x e y sono intercambiabili a tutti gli effetti, cioè, se \mathcal{R} è un predicato qualsiasi in una variabile, allora è vero che

$$(\forall x)(\forall y) x = y \Rightarrow (\mathcal{R}(x) \Leftrightarrow \mathcal{R}(y)).$$

Per l'eguaglianza valgono le seguenti proprietà:

- proprietà riflessiva:* ogni elemento è eguale a se stesso;
proprietà simmetrica: se un elemento è eguale a un altro, questo è eguale al primo;
proprietà transitiva: se un elemento è eguale ad un secondo e questo è eguale ad un terzo, allora il primo è eguale al terzo.

Appunti di teoria degli insiemi

1. Cenni sulla teoria assiomatica degli insiemi. La teoria degli insiemi è una teoria assiomatica: essa assume cioè come vere alcune proposizioni *primitive* (che verranno espresse nel linguaggio della logica), e che vengono dette *assiomi*, per poi dedurre da esse altre proposizioni. Oltre ai connettivi logici noti, la teoria degli insiemi assume come primitivo un ulteriore connettivo, che si denota con \in e che, su un piano meramente intuitivo, esprime la relazione di “appartenenza” ad un insieme. L’espressione

$$(1.1) \quad x \in T$$

(da leggere: “ x appartiene all’insieme T ” o, indifferentemente, “ x è un elemento di T ”) esprime una relazione della nostra teoria che comporta una “gerarchia” tra un elemento ed un insieme; ma non si tratta di una gerarchia a ruoli fissi: in altre parole, una stessa lettera può indicare a volte un elemento, a volte un insieme. Ad esempio: una retta nel piano può essere considerata a volte come un elemento (dell’insieme di tutte le rette del piano, ad esempio), a volte come un insieme (l’insieme di tutti i suoi punti). Osserviamo, poi, che nella relazione (1.1) abbiamo utilizzato le lettere maiuscole per indicare gli insiemi, le lettere minuscole per indicare gli elementi: questo artificio grafico è utile per facilitare la comprensione (e noi lo useremo tutte le volte che potremo) ma è evidente, da quanto detto, che esso non ha alcun fondamento concettuale! Vale la pena aggiungere che, in una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi, è comodo avere a che fare solo con enti dello stesso tipo, e cioè soltanto con insiemi: si fa allora in modo (sia pure un po’ artificiosamente) che ogni elemento di un qualsiasi insieme possa, a sua volta, essere considerato come un insieme.

L’intuizione suggerisce il primo assioma di questa teoria:

(1.2) Assioma. Due insiemi A, B sono eguali se e solo se hanno gli stessi elementi:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x) (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$$

Il significato dell’eguaglianza (si veda la dispensa “qualche cenno di logica”) assicura che due insiemi aventi gli stessi elementi devono avere lo stesso ruolo in ogni enunciazione che fa parte della nostra teoria.

Per indicare un insieme, secondo quanto afferma l’Assioma (1.1), basterà allora (quando sia possibile) elencarne gli elementi; converremo di elencarli entro parentesi graffe. Ad esempio, l’insieme $\{2, 4, 6\}$ indica l’insieme i cui elementi sono i tre numeri 2, 4, 6. La notazione $\{2\}$ indica l’insieme costituito dal solo elemento 2: nella nostra teoria, preso un qualsiasi oggetto a , ci riserviamo il diritto di considerare l’insieme $\{a\}$ che ha come unico elemento a : lo si chiama, in termini tecnici, un *singolletto*. Occorre fare bene attenzione a non confondere a con $\{a\}$.

Se ogni elemento di A è anche un elemento di B , cioè:

$$(\forall x) (x \in A) \Rightarrow (x \in B),$$

allora si dice che A è un *sottoinsieme* o una *parte* di B , e scriveremo $A \subset B$. Questa relazione è detta *inclusione*. Notiamo che, in particolare, questa relazione è verificata quando è $A = B$. Per esprimere che è $A \subset B$ ma è $A \neq B$, cioè esistono elementi di B che non appartengono ad A , si dice che A è una parte *propria* di B . Una volta definita la relazione di inclusione, l'assioma (1.1) si può così riscrivere:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Conviene introdurre un particolare insieme “privo di elementi”, che verrà chiamato l'insieme *vuoto*. Poiché gli insiemi si distinguono soltanto in base ai loro elementi, e l'insieme vuoto non ne ha, si deve ritenere che l'insieme vuoto sia *unico*: esso verrà indicato con \emptyset .

Poste queste premesse, il compito che ci spetta è quello di esporre alcune importanti costruzioni insiemistiche, cioè dei procedimenti che, partendo da insiemi assegnati, ci forniscono nuovi insiemi.

(1.3) Assioma. Supponiamo che T sia un insieme e che $\mathcal{P}(x)$ sia una proprietà scritta nel linguaggio della teoria degli insiemi; allora scriviamo

$$(1.4) \quad \{x : (x \in T) \wedge \mathcal{P}(x)\}$$

per indicare il sottoinsieme di T formato dagli elementi per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera.

L'espressione (1.4) permette di definire un insieme, avendo però a disposizione un insieme T già assegnato. Se non prendiamo questa precauzione, cioè se consideriamo semplicemente, in luogo di (1.4), un'espressione del tipo $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ (dove la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è scritta nel linguaggio della teoria degli insiemi), non possiamo pretendere che questa rappresenti un insieme. Constatiamolo con un celebre esempio:

(1.5) Esempio (Russell). Supponiamo per un momento che l'espressione $\{x : x \notin x\}$ rappresenti un insieme M . (Questo sarebbe dunque “l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elementi”.) È chiaro che, se è $M \in M$, allora dev'essere necessariamente $M \notin M$ (perché $x \notin x$ è la proprietà caratteristica degli elementi di M), mentre se è $M \notin M$, allora, per questo stesso fatto, dovrebbe essere $M \in M$. Dunque, l'aver ammesso che $\{x : x \notin x\}$ rappresenti un insieme conduce a un assurdo.

Notiamo che, nell'usuale teoria degli insiemi, si esclude la possibilità che un insieme possa contenere se stesso come elemento (in conformità di quella gerarchia tra elementi e insiemi a cui abbiamo fatto cenno precedentemente). Dunque, se la proprietà $x \notin x$ dovesse definire un insieme, questo sarebbe “l'insieme di tutti gli insiemi”: il paradosso di Russell ci porta allora a riconoscere l'impossibilità di costruire un tale insieme; in altre parole: nella teoria degli insiemi non ci può essere un *universo*, cioè un insieme contenente *tutti* gli oggetti di questa teoria.

Anche se ovvio, giova forse osservare che, assegnato un insieme T ed una proprietà $\mathcal{S}(x)$ scritta in termini della teoria degli insiemi, che sia una *contraddizione*, cioè una proprietà che sia falsa per ogni scelta di x in T , l'insieme vuoto coincide con l'insieme $\{x : (x \in T) \wedge \mathcal{S}(x)\}$. Questa caratterizzazione dell'insieme vuoto può talvolta riuscire utile nelle applicazioni.

(1.6) Assioma. Assegnati due insiemi A, B , esiste un insieme costituito da quegli elementi che appartengono a uno almeno dei due insiemi A, B . Esso viene indicato con $A \cup B$ e si chiama l'*unione* di A e B . In simboli:

$$(1.7) \quad A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Osserviamo che, il secondo membro dell'espressione (1.7) non rientra nella forma dell'espressione (1.4). Per questo motivo, in una formulazione rigorosa della teoria degli insiemi, è necessario postulare l'esistenza dell'unione per mezzo di uno specifico assioma.

(1.8) Definizione. Assegnati due insiemi A, B , l'insieme costituito da quegli elementi che appartengono sia ad A che a B si denota con $A \cap B$ e si chiama l'*intersezione* di A e di B . In simboli:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Può accadere che due insiemi siano *disgiunti*, cioè che non abbiano alcun elemento in comune. In questo caso, la proprietà $(x \in A) \wedge (x \in B)$ è una contraddizione e sicché, per quanto abbiamo visto, è $A \cap B = \emptyset$.

(1.9) Definizione. Assegnati due insiemi A, B , l'insieme costituito da quegli elementi che appartengono ad A e che non appartengono a B si denota con $A \setminus B$ e si chiama la *differenza* di A da B . In simboli:

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

(1.10) Assioma. Dato un insieme T ammettiamo di poter costruire un insieme i cui elementi sono tutte le parti di T ; poiché, come abbiamo detto, un insieme si distingue dagli altri soltanto in base ai suoi elementi, l'insieme di tutte le parti di T è unico. Lo si denota con $\mathcal{P}(T)$.

Ad esempio, se T è costituito dai tre oggetti a, b, c , cioè $T = \{a, b, c\}$, si ha:

$$\mathcal{P}(T) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

(1.11) Osservazione. Fissato un insieme T , le operazioni di unione ed intersezione, definite sull'insieme $\mathcal{P}(T)$ di tutte le parti di T , hanno proprietà analoghe, che riassumiamo nello schema seguente:

$A \cup A = A$	“pr. di idempotenza”	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	“prop. commutativa”	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	“prop. associativa”	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	“prop. distributiva”	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cap (A \cup B) = A$	“pr. di assorbimento”	$A \cup (A \cap B) = A$

Come si evidenzia dallo schema precedente, le proprietà scritte in una colonna si ottengono dalle corrispondenti scritte nell'altra colonna scambiando fra loro i segni \cap e \cup .

Questa proprietà, nota come *dualità*, si spiega facilmente introducendo l'operazione di *complementare*: se A è una parte di T , chiameremo *complementare* di A rispetto a T , l'insieme $A^c = T \setminus A$. Valgono allora le seguenti proprietà:

$$(A^c)^c = A$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{“formule di De Morgan”} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Notiamo che la prima di queste relazioni permette di ricavare una delle formule di De Morgan dall'altra (basta per questo sostituire, in luogo di A , A^c ed in luogo di B , B^c , e prendere il complementare di ambo i membri). Con una tecnica analoga, poi, è possibile dimostrare che le relazioni contenute in una colonna dello schema precedente sono riconducibili alle corrispondenti dell'altra colonna.

Le considerazioni generali che abbiamo fatto nella teoria degli insiemi ci porgono una riflessione sui procedimenti che si seguono abitualmente per risolvere le equazioni. Sia T un insieme e sia $\mathcal{P}(x)$ un predicato che abbia senso in T ; possiamo interpretare $\mathcal{P}(x)$ come un'equazione posta in T . L'insieme $P = \{x : (x \in T) \wedge \mathcal{P}(x)\}$ è evidentemente l'insieme delle *soluzioni* di $\mathcal{P}(x)$ in T . Il punto di vista da cui ci proponiamo in questa presentazione è molto generale: in questo concetto di equazione rientrano ad esempio anche quelle che vengono dette comunemente disequazioni, e tante altre cose.

2. L'insieme prodotto. Introduciamo ora un'altra costruzione fondamentale della teoria degli insiemi: quella di insieme *prodotto* di due insiemi. A questo scopo occorre introdurre la nozione di *coppia* (ordinata). Intuitivamente si può pensare di avere a disposizione due caselle (la prima e la seconda casella) e di inserire in esse, rispettivamente, due elementi non necessariamente distinti x, y . Per indicare la coppia così ottenuta si utilizza la notazione (x, y) . In modo un po' artificioso si può definire questo concetto ponendo

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

È evidente che bisogna guardarsi dal confondere la coppia (x, y) con l'insieme $\{x, y\}$ costituito dai due elementi x, y . Infatti, si ha $\{x, y\} = \{y, x\}$ (per gli insiemi non ha rilevanza l'ordine con cui sono elencati gli elementi), mentre per le coppie si ha:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x') \wedge (y = y')$$

(come facilmente si riconosce sfruttando la definizione di coppia). Siano ora A, B due insiemi. Si chiama insieme *prodotto* di A per B , e indicheremo con $A \times B$, l'insieme di tutte le coppie (a, b) , con $a \in A$ e $b \in B$. In simboli:

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Notiamo che non abbiamo richiesto che A e B siano diversi. Un ben noto esempio di insieme prodotto è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove \mathbb{R} denota la retta reale. La geometria analitica ci insegna a rappresentare il piano mediante l'insieme di tutte le coppie ordinate di

numeri reali, cioè mediante $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Perciò l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che si denota comunemente con \mathbb{R}^2 viene anche detto *piano*.

Dati in un certo ordine tre insiemi A, B, C , si chiama il loro prodotto, e si indica con $A \times B \times C$ l'insieme di tutte le *terne* ordinate (a, b, c) , con $a \in A, b \in B, c \in C$. La definizione si estende in modo ovvio ad un numero finito di insiemi. Osserviamo che il prodotto di più insiemi può essere ricondotto, peraltro, utilizzando solo il prodotto di due insiemi; è facile vedere infatti che $A \times B \times C$ si può introdurre indifferentemente come $(A \times B) \times C$ oppure come $A \times (B \times C)$.

3. Applicazioni. Dati due insiemi A, B , si chiama una *applicazione* (o *funzione*) di A in B , una *legge* che ad ogni elemento a di A associa uno ed un solo elemento b di B . L'insieme A si chiama allora il *dominio* della funzione, e B il *codominio*. I termini “applicazione” e “funzione” sono del tutto equivalenti. Tuttavia il termine “funzione” è più tradizionale e lo si impiega di preferenza quando il dominio o il codominio sono insiemi di numeri reali. L'espressione $f : A \rightarrow B$ denota una funzione f di A in B . Per ogni elemento a di A , l'unico elemento b di B in cui a viene mandato tramite f si denota (con una notazione introdotta da L. Euler) con il simbolo $f(x)$ e, talvolta, si rappresenta un'applicazione con il simbolo: $x \mapsto f(x)$. (In questa espressione, la variabile x è “muta” nel senso che può essere sostituita con un'altra lettera qualsiasi senza alterarne il significato.) Per esempio, si potrà scrivere $x \mapsto x^2$ per denotare la funzione (di \mathbb{R} in \mathbb{R}) che ad ogni numero reale x associa il suo quadrato.

Assegnata un'applicazione f , di un insieme A in un insieme B , si chiama *grafico* di f la parte G dell'insieme prodotto $A \times B$ costituita dalle coppie (x, y) , con $x \in A$ e $y = f(x)$; in simboli:

$$G = \{(x, y) : (x \in A) \wedge y = f(x)\}.$$

Un modo un po' artificioso per definire un'applicazione, senza ricorrere al concetto primitivo di “legge” consiste nel porre f eguale ad una terna (A, B, G) , dove A, B sono una coppia d'insiemi, e G è una parte dell'insieme prodotto, con la proprietà che, per ogni elemento x di A , esista uno ed un solo elemento y di B , con $(x, y) \in G$. Resta così definita un'applicazione (che ad ogni elemento x di A associa quell'unico elemento y di B , con $(x, y) \in G$) che ha per grafico l'insieme G .

(3.1) Esempio. (a) Se A è un insieme qualsiasi, l'applicazione $x \mapsto x$, di A in A si dice l'applicazione *identica* di A , e si denota con I_A .

(b) Se B è un sottoinsieme di un fissato insieme A , l'applicazione $x \mapsto x$, di B in A si chiama l'*iniezione canonica* di B in A .

(c) Se A, B sono due insiemi, le applicazioni $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ di $A \times B$ in A e B rispettivamente, si dicono le *proiezioni canoniche* su A e su B .

Data un'applicazione f di A in B , e dato un sottoinsieme E di A , si dice *immagine* di E mediante f , la parte di B costituita dagli elementi che “provengono” da qualche elemento di A : la si denota con $f(E)$. In simboli:

$$f(E) = \{y : (y \in B) \wedge (\exists x)f(x) = y\}.$$

Si potrà anche scrivere

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

In particolare, l'insieme $f(A)$ si può denominare senz'altro l'*immagine* di f . Introduciamo tre definizioni importanti: sia f un'applicazione di un insieme A in un insieme B . Si dice che f è un'applicazione:

iniettiva: se essa porta punti distinti in punti distinti. In simboli:

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

suriettiva: se l'immagine di f coincide con B , cioè se è $f(A) = B$.

biiettiva: se è allo stesso tempo iniettiva e suriettiva.

Osserviamo che, in certe situazioni, tutt'altro che infrequenti, non è necessario specificare il dominio ed il codominio di una funzione, essendo sufficiente conoscere un'espressione che la definisce (ad esempio, l'espressione $x \mapsto 3x + 1$ è chiaramente una funzione biiettiva di \mathbb{R} in \mathbb{R}). Ma in certe questioni la precisazione del dominio e del codominio sono essenziali: come quando ci si chiede se un'applicazione è suriettiva, oppure se è iniettiva. Ad esempio, l'applicazione $x \mapsto x^2$ considerata come un'applicazione di \mathbb{R} in \mathbb{R} non è né iniettiva né suriettiva; la stessa applicazione, vista come applicazione di \mathbb{R} in \mathbb{R}_+ è suriettiva, e vista come applicazione di \mathbb{R}_+ in \mathbb{R} è iniettiva. Infine, vista come applicazione di \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}_+ l'applicazione $x \mapsto x^2$ è biiettiva.

(3.2) Definizione. Dati tre insiemi A, B, C , siano f un'applicazione del primo nel secondo e g un'applicazione del secondo nel terzo. Si chiama applicazione *composta* di f e g l'applicazione $g \circ f$ così definita: per ogni elemento x di A , è

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Si noterà che il codominio di f è stato assunto coincidente con il dominio di g : soltanto in questo caso si può definire l'applicazione composta (si dice anche che f e g sono *componibili*).

Ad esempio: la funzione $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ di \mathbb{R} in \mathbb{R} si può considerare come un'applicazione composta da $x \mapsto 1+x^2$ (di \mathbb{R} in \mathbb{R}_+) e $y \mapsto \sqrt{y}$ (di \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}). Se f è un'applicazione di A in B , si ha

$$f \circ I_A = f, \quad I_B \circ f = f$$

(ricordiamo che I_A e I_B denotano le applicazioni identiche di A e di B). Notiamo poi che la composizione delle applicazioni gode della "proprietà associativa", nel senso che, se f, g sono componibili, e se g, h sono componibili, si ha $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(3.3) Definizione. Data un'applicazione f di A in B , si chiama l'*inversa* di f , un'applicazione g di B in A , soddisfacente alle proprietà seguenti:

$$(3.4) \quad g \circ f = I_A, \quad f \circ g = I_B.$$

Si riconosce immediatamente che non sempre un'applicazione è *invertibile*, nel senso che gode di un'inversa. Il seguente teorema mostra quando sia possibile trovare un'inversa.

(3.5) Teorema. *Sia f un'applicazione di un insieme A in un insieme B . Allora f è invertibile se e soltanto se essa è biiettiva.*

Dimostrazione. Incominciamo col dimostrare che, se f è un'applicazione invertibile, essa è anche biiettiva. Supponiamo a questo scopo che f abbia un'inversa: la si denoti con g . Allora f è suriettiva: basta per questo osservare che, se b è un qualsiasi elemento di B , si ha $f(g(b)) = b$ e dunque, posto $a = g(b)$, si trae $f(a) = b$. L'applicazione f è anche iniettiva: basta per questo osservare che, se è $f(a) = f(a')$, da (3.4) si ricava $a = g(f(a))$ e $a' = g(f(a))$ dunque $a = a'$.

Resta da dimostrare che, se f è un'applicazione biiettiva, essa è anche invertibile. Poiché f è suriettiva, per ogni elemento b di B , esiste un elemento a di A tale che risulti $b = f(a)$. Ora, essendo f iniettiva quest'elemento a è unico. È così individuata una funzione che ad ogni elemento b di B associa quell'unico elemento a di A tale che sia $b = f(a)$. Si riconosce immediatamente che questa applicazione è l'inversa cercata.

(3.6) Teorema. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, se f è invertibile, l'inversa è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che g, g' siano due distinte inverse di f , cioè due distinte applicazioni di B in A , soddisfacenti alle relazioni (3.4). Per la proprietà associativa della composizione, si ha

$$g' = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = g,$$

e ciò basta per concludere.

L'applicazione inversa di una funzione biiettiva f (di A in B) si denota con il simbolo f^{-1} . È evidente che risulti $(f^{-1})^{-1} = f$: dunque, se f è invertibile, tale è anche la sua inversa.

(3.7) Definizione. Data un'applicazione f di un insieme A in un insieme B , sia C una parte di A . Si chiama la *restrizione* di f a C , e si denota con $f|_C$, l'applicazione, di C in B , che ad ogni elemento x di C associ l'elemento $f(x)$ di B . In altre parole: indicata con i l'iniezione canonica di C in A , l'applicazione $f|_C$ coincide con l'applicazione composta $f \circ i$.

Appunti di calcolo differenziale elementare

Ci proponiamo di esporre alcuni classici argomenti, che sono costituenti fondamentali di ogni corso di analisi matematica: la nozione di derivata, con le sue proprietà dirette e con le regole di derivazione, quindi i teoremi sulle funzioni derivabili su un intervallo. Le nozioni introdotte e i risultati ottenuti vengono via via applicati allo studio delle funzioni reali di una variabile; diventa così possibile compiere uno studio delle funzioni derivabili, giungendo, tra l'altro, a dare metodi per la ricerca di massimi e minimi.

1. La derivata. Sia f una funzione a valori reali definita su di un sottoinsieme U della retta reale, e sia x_0 un elemento di U . Si dice che x_0 è *interno* ad U se esiste un numero reale ϵ maggiore di zero, tale che l'intervallo $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ sia contenuto in U . La funzione, definita su $U \setminus \{x_0\}$,

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiama il *rapporto incrementale* di f , a partire dal punto x_0 .

(1.1) Definizione. Nel quadro sopra descritto, il limite del rapporto incrementale, al tendere di x verso x_0 :

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se esiste, lo si chiama la *derivata* di f nel punto x_0 , e si denota con uno dei simboli seguenti:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{e così via.}$$

Questa molteplicità di simboli non è dannosa: ciascuno di essi ha una sua espressività e una sua comodità d'impiego. Il cambiamento di variabile $h = x - x_0$ porta il punto x_0 nel punto 0, perciò il limite (1.2) si può mettere nella forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(1.3) Definizione. Diremo che una funzione f è *derivabile* nel punto x_0 se in x_0 la derivata esiste finita. Se poi f è una funzione a valori reali, definita su di una parte U di \mathbb{R} , tutta fatta di punti interni, si dirà che f è *derivabile* in U se è derivabile in ogni punto x_0 di U . In questo caso potremo indicare con f' la funzione che ad ogni elemento x_0 di U associa la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0 .

Il caso più frequente che verrà in seguito considerato è quello in cui U è un intervallo aperto $]a, b[$. Se una funzione f è derivabile in un insieme U , allora la derivata si può considerare come un'operazione D che fa passare da f alla sua derivata f' ; la notazione $f' = Df$ mette bene in luce questo aspetto.

(1.4) Esempi di notevole interesse. (a) Ogni funzione costante è derivabile, ed ha derivata nulla. La verifica è immediata dal momento che il rapporto incrementale è la costante zero.

(b) La funzione potenza n -esima: $x \mapsto x^n$ è derivabile in ogni punto x della retta reale, e si ha $D(x^n) = nx^{n-1}$. Infatti, il rapporto incrementale a partire dal punto x_0 si scrive:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1}.$$

Poiché i polinomi sono funzioni continue, si ha subito la relazione:

$$D(x^n) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1}.$$

(c) La funzione $x \mapsto a^x$ (definita per ogni numero reale a maggiore di zero) è derivabile in ogni punto, e si ha $D(a^x) = a^x \ln a$. Scriviamo a questo scopo il rapporto incrementale a partire da x_0 : conviene porre $x - x_0 = h$. Si ha allora

$$\frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \frac{a^{x_0}a^h - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Il risultato, allora, segue immediatamente ricordando il ben noto limite notevole. Notiamo che, se a coincide col numero di Nepero e , si ha l'espressione particolarmente semplice $D(e^x) = e^x$. Ciò mostra chiaramente l'opportunità di assumere come base per la funzione esponenziale il numero e , almeno quando ci si occupa del calcolo differenziale.

(d) Anche le funzioni trigonometriche sono derivabili in ogni punto. Ciò risulta immediatamente dalle formule di addizione del seno e del coseno. Si ha infatti:

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \frac{\text{sen } x(\cos h - 1) + \text{sen } h \cos x}{h} = \text{sen } x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\text{sen } h}{h}.$$

Passando al limite al tendere di h a zero, si trae $D(\text{sen } x) = \cos x$. Analogamente si procede per il coseno, trovando la relazione $D(\cos x) = -\text{sen } x$.

Può accadere che una funzione f sia derivabile in tutto un intervallo $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ e che, a sua volta, la sua derivata f' sia derivabile in x_0 . La derivata di f' in x_0 si dice allora la *derivata seconda* di f in x_0 , e si indica col simbolo $f''(x_0)$. Così si procede poi per definire la derivata *terza*, e così via.

2. Il significato geometrico della derivata; derivabilità e continuità. La derivabilità di una funzione f in un punto x_0 ha una importantissima interpretazione geometrica. Consideriamo, nel piano \mathbb{R}^2 , il grafico di f . Ricordiamo che, per *grafico* di una funzione f di U in \mathbb{R} s'intende il sottoinsieme del piano così definito:

$$\{(x, y) : (x \in U) \wedge y = f(x)\}.$$

Il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ha un evidente significato: è il coefficiente angolare della retta congiungente i due punti $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$. La retta in questione ha infatti l'equazione

$$(2.1) \quad \frac{Y - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{X - x_0}{x - x_0},$$

dove X, Y denotano le coordinate del punto variabile sulla retta. Affermare la derivabilità della funzione f nel punto x_0 equivale dunque ad affermare che il coefficiente angolare tende ad un limite finito $f'(x_0)$. Ebbene, d'accordo con la nostra intuizione, noi diremo che la retta *secante* (2.1) tende, al tendere di x verso x_0 , a una retta limite passante per il punto P e avente coefficiente angolare $f'(x_0)$. Questa retta si dice la *tangente* al grafico nel punto P ; essa ha, per quanto detto, equazione

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

Osserviamo così che la derivabilità di una funzione f in un punto x_0 si interpreta geometricamente con la possibilità di costruire, nel punto x_0 , la retta tangente al grafico. Questa interpretazione suggerisce che, se una funzione f è derivabile, essa debba essere anche continua. La risposta è data dal teorema seguente.

(2.2) Teorema. *Sia f una funzione a valori reali, definita su di una parte U di \mathbb{R} . Sia x_0 un punto interno a U , e si supponga che f sia derivabile in x_0 .*

Allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione. Basta per questo osservare che, per ogni elemento x di U , diverso da x_0 , si può scrivere l'eguaglianza

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Di qui, passando al limite (quando x converge verso x_0) si trae

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

e ciò basta per concludere.

3. Regole di derivazione. La questione che ci poniamo in questo paragrafo è quella di riconoscere la derivabilità di funzioni che si costruiscono con certe operazioni, a partire da funzioni derivabili. Dapprima consideriamo le operazioni algebriche (somma, prodotto, e operazioni inverse), quindi l'operazione di composizione e di inversione.

(3.1) Teorema. *Siano f, g funzioni reali, definite su di una parte U di \mathbb{R} . Sia x_0 un punto interno a U nel quale entrambe le funzioni siano derivabili. Le funzioni $f + g$ e $f - g$ sono allora derivabili in x_0 , e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

(3.2) Teorema. *Sia f una funzione reale, definita su di una parte U di \mathbb{R} . Sia x_0 un punto interno a U nel quale f sia derivabile; sia k una costante. Allora la funzione kf è derivabile in x_0 , e si ha $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.*

La dimostrazione dei due teoremi precedenti è ovvia: la conclusione segue immediatamente dalla definizione di derivata. Come corollario di questi teoremi si ricava che la derivata della funzione $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ coincide con il polinomio

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

(3.3) Teorema (regola di Leibniz). *Siano f, g funzioni reali, definite su di una parte U di \mathbb{R} . Sia x_0 un punto interno a U nel quale entrambe le funzioni siano derivabili. La funzione fg è allora derivabile in x_0 , e si ha:*

$$(3.4) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Dimostrazione. Si applica il consueto artificio del “togliere e aggiungere”; infatti, togliendo e aggiungendo il termine $f(x_0)g(x_0 + g)$, possiamo esprimere il rapporto incrementale della funzione prodotto in questa forma:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) \\ &\quad + f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Da quest'espressione, tenendo presente che la funzione g , essendo derivabile in x_0 è continua in x_0 , risulta evidente l'esistenza del limite e la validità della (3.4).

(3.5) Teorema. Sia f una funzione reale, definita su di una parte U di \mathbb{R} . Sia x_0 un punto interno a U , con $f(x_0) \neq 0$, nel quale f sia derivabile. Allora la funzione reciproca $1/f$ (che, in virtù del teorema della permanenza del segno, è definita in un intorno di x_0) è derivabile in x_0 e si ha $(1/f)'(x_0) = -f'(x_0)/f(x_0)^2$.

Dimostrazione. Prendiamo il rapporto incrementale della funzione $1/f$:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right) = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{hf(x_0+h)f(x_0)} = -\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \frac{1}{f(x_0+h)f(x_0)}.$$

Da questa espressione, passando al limite, si ottiene la tesi.

Dai Teoremi (3.3) e (3.5) risulta subito la regola di derivazione per il quoziente di due funzioni:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

La formula precedente permette di calcolare, senza alcuno sforzo, la derivata della funzione $x \mapsto \operatorname{tg} x$. Si ha infatti:

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}\right) = \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x}.$$

(3.6) Teorema. Sia f una funzione reale, definita su di una parte U di \mathbb{R} , e sia x_0 un punto interno a U nel quale f sia derivabile. Sia g una funzione reale, definita su di una parte V di \mathbb{R} con $f(U) \subset V$ e tale che $y_0 = f(x_0)$ risulti un punto interno a V . Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 , e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione. Scriviamo il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$ a partire da x_0 :

$$\frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Da questa espressione, passando al limite, si ottiene la tesi.

(3.7) Esempio. Calcoliamo la derivata della funzione $x \mapsto e^{\operatorname{sen} x}$; questa si può considerare come funzione composta della funzione f , definita da $x \mapsto \operatorname{sen} x$, e della funzione g , definita da $y \mapsto e^y$. La derivata cercata è allora data, in ogni punto x , da $g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{cos} x$.

Il seguente teorema riguarda la derivabilità della funzione inversa di una funzione derivabile; ci metteremo perciò, in primo luogo, nelle ipotesi che assicurano l'esistenza di una funzione inversa: supporremo cioè che la funzione sia biiettiva.

(3.8) Teorema. Sia f una funzione definita in un intervallo I , continua e biiettva. Sia x_0 un punto interno all'intervallo I in cui f sia derivabile con derivata non nulla. Allora, la funzione f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ (che è interno all'intervallo $f(I)$), e si ha:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Poniamo $x = f^{-1}(y)$ ed esprimiamo il rapporto incrementale di f^{-1} , a partire da y_0 , nella forma:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}$$

(tenendo presente che, se è $y \neq y_0$, è anche $x \neq x_0$). Si tratta ora di prendere il limite di questa funzione al tendere di y verso y_0 . Tramite il cambiamento di variabile, questo equivale a prendere il limite, al tendere di x verso x_0 ; la tesi risulta allora evidente.

(3.9) Esempi. (a) La radice n -esima si può pensare come la funzione inversa della funzione $x \mapsto x^n$, di \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}_+ . Poniamo allora $y = x^n$. Allora risulta:

$$D \sqrt[n]{y} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}y^{(1/n)-1}.$$

In conclusione, se rappresentiamo la radice n -esima facendo uso degli esponenti frazionari, cioè poniamo $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$, la regola di derivazione viene ad essere formalmente la stessa che vale per gli esponenti interi positivi.

(b) Poniamo $y = \operatorname{tg} x$, e calcoliamo la derivata della relativa funzione inversa: $x = \operatorname{arctg} y$. Si ha:

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

(c) Poniamo $y = e^x$, e calcoliamo la derivata della funzione logaritmo: $x = \ln y$:

$$D \log y = \frac{1}{De^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

(d) Possiamo ora calcolare facilmente la derivata della funzione $x \mapsto x^\alpha$, di \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}_+ , con α numero reale qualsiasi. A questo scopo osserviamo che si ha: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$: da questa semplice osservazione si trae:

$$Dx^\alpha = De^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x} D(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

La regola di derivazione delle potenze con esponente reale è formalmente quella stessa che abbiamo trovato nel caso di un esponente intero positivo.

(3.10) Osservazione. Ritorniamo ancora sulle notazioni con cui abbiamo indicato la derivata. È particolarmente suggestiva la notazione (dovuta a Leibniz) df/dx nell'esprimere i contenuti dei Teoremi (3.6) e (3.8). Per rendercene conto è opportuno considerare — seguendo il classico linguaggio del calcolo infinitesimale — tre variabili x, y, z legate tra loro dalle relazioni $y = f(x)$ e $z = g(y)$. Allora la tesi del Teorema (3.6) si può esprimere scrivendo:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Analogamente la tesi del Teorema (3.8) si può così esprimere:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

In entrambi i casi si potrebbe essere indotti a ritenere che le dimostrazioni dei teoremi siano ottenibili con semplici passaggi algebrici, a partire dai simboli dx, dy, dz . In realtà questo non è possibile perché questi simboli, nella nostra presentazione, non hanno senso se presi separatamente. Comunque, in questi casi la notazione di Leibniz suggerisce formule esatte.

(3.11) Osservazione conclusiva. Le regole di derivazione che abbiamo verificate in questo paragrafo non soltanto ci assicurano la derivabilità delle funzioni che vengono caso per caso costruite, ma forniscono anche un'espressione per la derivata. Inoltre negli esempi (1.4) e (3.7) abbiamo avuto modo di constatare la derivabilità delle funzioni (nel loro intervallo di definizione, privato, al più degli estremi): potenze (con esponente reale), esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente e arcotangente. Se, senza entrare in una analisi precisa che, oltre ad essere fastidiosa, sarebbe di scarsa utilità, chiamiamo funzioni elementari quelle ottenute dalle funzioni elencate mediante operazioni algebriche e operazioni di composizione, possiamo affermare che tutte le funzioni elementari sono derivabili (eccetto che in certi punti) e la derivata è pure una funzione elementare. Questo fatto spiega anche come i matematici della fase pionieristica del calcolo infinitesimale potessero avere la convinzione che ogni funzione fosse derivabile (con eccezione di qualche punto): è chiaro infatti che, partendo dalle funzioni elementari e applicando le operazioni suddette non si possono ottenere che funzioni derivabili.

Per comodità del lettore diamo qui una piccolissima tabella contenente le derivate delle funzioni elementari più comuni:

$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (per α qualunque)	$D \sin x = \cos x$
$Da^x = a^x \ln a$ (per $a > 0$)	$D \cos x = -\sin x$
$D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$ (per $a > 0$ e $a \neq 1$)	$D \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

4. Teoremi sulle funzioni derivabili in un intervallo. Introduciamo dapprima alcune definizioni significative riguardanti le proprietà locali di una funzione reale di variabile reale.

(4.1) Definizione. Sia f una funzione reale, definita su di una parte T di \mathbb{R} , e sia I un intervallo contenuto in T . Si dice che f è *monotona* nell'intervallo I se è soddisfatta una delle quattro condizioni seguenti:

- (a) f è *crescente* in I , nel senso che, per ogni coppia x, y di elementi di I , vale l'implicazione seguente $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- (b) f è *strettamente crescente* in I , nel senso che, per ogni coppia x, y di elementi di I , vale l'implicazione seguente $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- (c) f è *decrescente* in I , nel senso che, per ogni coppia x, y di elementi di I , vale l'implicazione seguente $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- (d) f è *strettamente decrescente* in I , nel senso che, per ogni coppia x, y di elementi di I , vale l'implicazione seguente $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

(4.2) Definizione. Sia f una funzione reale, definita su di una parte T di \mathbb{R} , e sia x_0 un elemento di T . Si dice che x_0 è un punto di *massimo* (risp. *minimo*) *locale* per f , se esiste un numero reale ϵ maggiore di zero, tale che, per ogni elemento x di T distante da x_0 per meno di ϵ risulti $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$).

Il teorema seguente stabilisce un legame tra i punti di massimo e di minimo di una funzione e la sua derivata in quei punti.

(4.3) Teorema (di Fermat). Sia f una funzione reale, definita su di una parte T di \mathbb{R} , e sia x_0 un punto interno a T . Si supponga che f abbia in x_0 un punto di massimo (o di minimo) locale e, inoltre, sia derivabile in x_0 . Allora è $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale. Esiste allora un numero reale ϵ maggiore di zero, in modo tale che, quando x dista per meno di ϵ da x_0 , sia $f(x_0) \geq f(x)$. Ne segue che, se x è un siffatto numero reale, con $x < x_0$, il rapporto

$$(4.4) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

risulta maggiore di zero, e quindi, per il teorema della permanenza del segno, la derivata di f nel punto x_0 , coincidendo con il limite destro del rapporto (4.4), è necessariamente positiva. Un discorso analogo vale per ogni numero reale x , con $x > x_0$ e distante per meno di ϵ da x_0 , ottenendo però che il rapporto (4.4) dev'essere negativo e dunque la derivata di f nel punto x_0 , coincidendo con il limite sinistro del rapporto (4.4), dev'essere negativa. Poiché l'unico numero reale che è, nel contempo, positivo e negativo è lo zero, se ne trae $f'(x_0) = 0$. Le modifiche da apportare al discorso nel caso che x_0 sia un punto di minimo locale sono ovvie.

I punti in cui si annulla la derivata vengono chiamati i *punti stazionari* di f ; dunque, il teorema appena dimostrato afferma che i punti di massimo e minimo locale, interni, sono punti stazionari. Non tutti i punti stazionari interni, però, sono punti di massimo o di minimo locale.

(4.5) Teorema (di Rolle). *Sia f una funzione reale, definita su di un intervallo $[a, b]$, ed ivi continua, e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto ξ di $]a, b[$ tale che risulti $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, la funzione f , essendo continua, assume in $[a, b]$ un valore massimo M ed un valore minimo m . Possiamo affermare che un punto di massimo o di minimo è *interno* all'intervallo. Infatti, se tutti i punti di massimo e di minimo si trovassero negli estremi dell'intervallo, essendo, per ipotesi, $f(a) = f(b)$, si avrebbe $M = m$, o, ciò ch'è lo stesso, la funzione f sarebbe costante. Ma allora tutti i punti dell'intervallo (e non soltanto gli estremi) sarebbero di massimo e di minimo. Sia dunque ξ un punto di massimo (o di minimo) interno; evidentemente esso è anche un punto di massimo (o di minimo) locale. Essendo ξ interno all'intervallo, il teorema precedente permette d'affermare che è $f'(\xi) = 0$. Il teorema è così completamente dimostrato.

(4.6) Teorema (del valor medio di Lagrange). *Sia f una funzione reale, definita su di un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} ed ivi continua, e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto ξ di $]a, b[$ tale che risulti*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Dimostrazione. Allo scopo di ricondurci al teorema di Rolle, per ogni elemento x di $[a, b]$, si ponga

$$g(x) = f(x) - \lambda x,$$

dove λ è una costante reale non nulla. Si riconosce immediatamente che g è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, e derivabile nell'intervallo aperto $]a, b[$. Vediamo se è possibile determinare λ in modo da poter applicare alla funzione g il teorema di Rolle: basterà fare in modo che g assuma valori eguali agli estremi. La condizione detta si scrive:

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a$$

da cui

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Presa così la costante λ , si potrà affermare l'esistenza di un punto ξ di $]a, b[$ in modo tale che risulti $g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda = 0$. Sostituendo il valore assegnato a λ si trae subito la conclusione.

Questo teorema ha un'evidentissima interpretazione geometrica: nelle ipotesi del teorema, si afferma che nell'intervallo $]a, b[$ c'è almeno un punto ξ tale che la tangente al grafico di f nel punto $(\xi, f(\xi))$ risulti parallela alla secante mandata per gli estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Il teorema di Lagrange ha delle importantissime conseguenze.

(4.7) Corollario. *Una funzione definita in un intervallo $]a, b[$ e avente in ogni punto derivata nulla è costante.*

Dimostrazione. Presi due punti x_1, x_2 di $]a, b[$, si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0.$$

La conclusione è ovvia.

Osserviamo che era già noto che la derivata di una funzione costante in un intervallo è nulla; il corollario esprime la proposizione inversa. Si tratta di una proposizione di notevole evidenza intuitiva, ma che ciò malgrado, non si può dimostrare in un modo che sia simultaneamente rapido e diretto.

Il teorema seguente lega la monotonia di una funzione derivabile in un intervallo con il segno della sua derivata prima.

(4.8) Corollario. *Una funzione definita su di un intervallo di \mathbb{R} e avente in ogni punto derivata strettamente positiva è strettamente crescente in esso.*

Dimostrazione. Siano x_1, x_2 punti dell'intervallo assegnato con $x_1 < x_2$; allora si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0$$

essendo ξ un punto dell'intervallo $]x_1, x_2[$. Allora è necessariamente $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Con lo stesso discorso si vede che, se è $f'(x) < 0$, la funzione f è strettamente decrescente; ne segue che, se f è crescente (resp. decrescente), è $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) < 0$).

Appunti di calcolo delle probabilità elementare

1. Esperimento aleatorio. Un esperimento si dice *aleatorio*, per un certo individuo, in un certo istante, se l'individuo non è ancora in grado di indicarne con sicurezza il risultato (indipendentemente dal fatto che l'esperimento sia stato già eseguito o debba ancora essere eseguito). Se l'individuo che si trova in una tale situazione d'incertezza è interessato al risultato dell'esperimento (per esempio in vista di qualche scommessa), è naturale che egli si preoccupi innanzitutto di fissare un "ventaglio completo di eventualità, a due a due incompatibili", ossia un insieme Ω , i cui elementi rappresentino ipotetici risultati dell'esperimento, con la certezza che, comunque vadano le cose, il risultato effettivo dell'esperimento "cadrà in Ω " (nel senso che sarà rappresentato da uno e da un sol elemento di Ω).

(1.1) Esempio. (*Lancio di un dado*) Si supponga che l'esperimento consista nel lanciare un dado. Se per "risultato" s'intende il numero della faccia che uscirà, si potrà prendere come Ω l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(1.2) Esempio. (*Estrazioni del lotto*) Si supponga che l'esperimento sia costituito dalle estrazioni del lotto che verranno eseguite, la settimana prossima, sulla ruota di Napoli. Se per "risultato" s'intende l'insieme dei cinque numeri estratti (prescindendo dall'ordine d'estrazione), si potrà prendere come Ω l'insieme di tutte le cinquine, intendendo per *cinquina* un insieme di cinque distinti numeri interi compresi tra 1 e 90.

Giova osservare che, nella scelta dell'insieme Ω , c'è sempre una certa dose di *arbitrarietà*. Non bisogna infatti dimenticare che gli elementi di Ω *rappresentano* ipotetici risultati dell'esperimento, secondo un opportuno *codice*: è chiaro che la scelta di questo codice è, in larga misura, arbitraria. Ad esempio, se l'esperimento consiste nel lancio di una moneta, e se ci s'interessa solo alla faccia che apparirà (testa o croce), si potrà prendere $\Omega = \{0, 1\}$, con la convenzione che 0 significhi croce, e 1 testa. Ma egualmente legittima sarebbe la convenzione inversa (0 = testa; 1 = croce), oppure la scelta, in luogo dell'insieme $\{0, 1\}$ di un qualsiasi altro insieme costituito da due elementi.

2. La questione della ripetibilità. La parola *esperimento* potrebbe far credere che per "esperimento aleatorio" si debba necessariamente intendere un esperimento *ripetibile quante volte si voglia*, e capace di produrre, in diverse esecuzioni, risultati diversi. A mettere in guardia contro una tale interpretazione (inutilmente riduttiva), dovrebbe bastare l'esempio seguente.

(2.1) Esempio. (*Svuotamento di un'urna*) Un individuo disponga di un'urna, contenente palline di due colori diversi: bianco e rosso. Egli conosca il numero totale n delle palline presenti nell'urna, ma non quello delle palline rosse. Per conoscerlo abbia a disposizione il banale esperimento che consiste nello svuotare l'urna e nel contare le palline rosse.

Prima di compiere un tal esperimento, l'individuo non è in grado di predirne con certezza il risultato: egli è dunque di fronte ad un esperimento aleatorio, al quale potrà associare, come insieme Ω , l'insieme costituito da tutti gli interi compresi tra 1 e $n - 1$

(intendendo che un siffatto intero k rappresenti il risultato descritto dalle parole: “il numero delle palline rosse presenti nell’urna è k ”).

Per quel che riguarda la “ripetibilità”, è chiaro che, una volta compiuto l’esperimento, presa nota del suo risultato, e rimesse nell’urna le palline estratte, l’individuo potrebbe – volendo – ripetere l’esperimento: ma in ogni ripetizione otterrebbe lo stesso risultato della prima volta, sicché non si troverebbe più dinanzi a un esperimento aleatorio (se non nel caso in cui egli giudicasse possibile qualche errore di conteggio).

3. Eventi legati al risultato di un esperimento aleatorio. Tornando al caso generale di un arbitrario esperimento aleatorio, al quale sia stato associato un certo insieme Ω di eventualità, consideriamo ora una qualsiasi parte A di Ω . Si può interpretare A come rappresentante un *evento legato al risultato dell’esperimento*: l’evento che si realizza se e solo se codesto risultato “cadrà in A ”. (Si può anzi *identificare* questo evento con l’insieme A stesso.)

(3.1) Esempio. (*Uscita di una faccia pari*) Nel caso del lancio di un dado (vedi (1.1)), la parte $\{2, 4, 6\}$ dell’insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si può interpretare come rappresentante dell’evento indicato dalle parole: “uscita di una faccia pari”.

(3.2) Esempio. (*Uscita del 34*) Nel caso del lotto (vedi (1.2)), l’evento “uscita del 34” è rappresentato dall’insieme di tutte le cinquine ammettenti 34 come elemento.

4. La tribù degli eventi. Nel caso generale di un arbitrario esperimento aleatorio, abbiamo detto che *ogni* parte A di Ω può essere interpretata come un evento. Tuttavia può darsi che certe parti di Ω corrispondano ad eventi non interessanti (ai fini di un determinato problema) oppure troppo complicati per essere studiati. In ciascun caso, dunque, e per ciascun problema da studiare, converrà scegliere una determinata classe \mathcal{A} (non vuota) di parti di Ω e riservare il nome di *eventi* agli elementi di questa classe. Solo nei casi particolarmente semplici questa classe potrà coincidere con l’insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ di *tutte* le parti di Ω . In ogni caso sarà però opportuno scegliere \mathcal{A} in modo tale che essa possieda buone doti di stabilità (rispetto alle comuni operazioni insiemistiche). Precisamente, sarà conveniente esigere che il complementare (rispetto a Ω) di un qualsiasi elemento di \mathcal{A} sia ancora un elemento di \mathcal{A} , e che l’unione di una qualsiasi famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} sia ancora un elemento di \mathcal{A} . (Come conseguenza, anche l’intersezione di una qualsiasi famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} è ancora un elemento di \mathcal{A} .)

Una classe \mathcal{A} dotata di queste proprietà si chiama, in termini tecnici, una *tribù* (o σ -algebra) su Ω . Inoltre, se \mathcal{A} è una tribù su Ω , la coppia (Ω, \mathcal{A}) si chiama uno *spazio probabilizzabile* (e, nell’ambito di un fissato spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) , l’insieme Ω si chiama l’*insieme delle eventualità*, mentre la tribù \mathcal{A} si chiama la *tribù degli eventi*). Usando questo linguaggio, le considerazioni precedenti si possono così riassumere:

Quando si voglia studiare un esperimento aleatorio, il primo passo da compiere consiste nell’associargli uno spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) .

Quando, per studiare un certo esperimento aleatorio, sia stato scelto uno spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) , si adopera abitualmente una terminologia particolarmente suggestiva: non solo si chiamano *eventualità* gli elementi di Ω , ed *eventi* gli elementi di \mathcal{A} , ma si usa anche dire che l'eventualità ω realizza l'evento A per dire che ω appartiene ad A . Inoltre:

- se A è un evento, il complementare di A , ossia l'evento A^c che è realizzato da tutte e sole le eventualità che non realizzano A , si chiama la *negazione* di A (o l'evento *contrario* di A);
- se A, B sono due eventi, la loro unione, ossia l'evento $A \cup B$ che è realizzato da tutte e sole le eventualità che realizzano *uno almeno* dei due eventi A, B si chiama l'evento “ A o B ”;
- se A, B sono due eventi, la loro intersezione, ossia l'evento $A \cap B$ che è realizzato da tutte e sole le eventualità che realizzano *entrambi* gli eventi A, B si chiama l'evento “ A e B ”;
- due eventi A, B si dicono tra loro *incompatibili* se non esiste alcuna eventualità che li realizzi entrambi, cioè se i due insiemi A, B sono tra loro *disgiunti*, ossia privi di elementi in comune.

5. Misurazione del grado di fiducia. In uno studio probabilistico di un complesso di eventi legati al risultato di un esperimento aleatorio, la scelta dello spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) costituisce soltanto il primo passo. Un secondo passo consiste nella scelta di una “misura di probabilità”. Che cosa s'intende per ciò?

Per definizione stessa di esperimento aleatorio, l'individuo che considera un tal esperimento non è in grado (salvo casi banali) di stabilire con certezza, per ciascuno degli eventi legati al risultato dell'esperimento, se esso si realizzerà o no. Ciò tuttavia non gli impedisce di sentire — su un piano meramente psicologico — un diverso *grado di fiducia* nei confronti dei diversi eventi considerati.

Sarà allora naturale, per l'individuo, cercare di *misurare* questo grado di fiducia, associando a ciascun evento A della tribù \mathcal{A} un numero $P(A)$, ossia definendo una funzione P nella tribù \mathcal{A} . Per convenzione, si può prendere questa funzione a valori in $[0, 1]$, e assumere il valore 1 sull'evento Ω . Sarà anche naturale pretendere che essa sia *additiva*, nel senso che verifichi la relazione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ogni volta che A, B siano due eventi incompatibili. In realtà, per ragioni di comodità matematica, converrà esigere che essa verifichi la relazione

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} P(A_n)$$

per ogni successione (A_n) di elementi di \mathcal{A} a due a due incompatibili. (Quest'ultima condizione è automaticamente verificata quando la tribù \mathcal{A} sia finita e dunque, in particolare, quando Ω sia finito.) Una funzione P con queste proprietà si chiama

una *misura di probabilità* sullo spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) (o, semplicemente, sulla tribù \mathcal{A}). Inoltre la terna (Ω, \mathcal{A}, P) è detta uno *spazio probabilizzato*, e, per ogni elemento A di \mathcal{A} , il numero $P(A)$ è detto la *probabilità* dell'evento A secondo P .

Per quanto ovvio, è forse utile sottolineare che, secondo la precedente definizione, non ha senso parlare di “probabilità di un evento”, se non nell'ambito di un ben precisato spazio probabilizzato. In particolare, se si è costruito soltanto lo spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) , non ha ancora senso chiedersi quale sia la probabilità di un'assegnato evento A (elemento della tribù \mathcal{A}): infatti esistono, in generale, molte misure di probabilità sulla tribù \mathcal{A} , e ciascuna di queste può assegnare ad un evento A una diversa probabilità.

Usando il linguaggio sopra introdotto, possiamo così ulteriormente riassumere le considerazioni precedenti:

Compito preliminare, per un individuo che intenda studiare dal punto di vista probabilistico un esperimento aleatorio, è quello di associargli un opportuno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) .

6. Scelta della misura di probabilità. Abbiamo già richiamato l'attenzione sul carattere inevitabilmente arbitrario della scelta dello spazio probabilizzabile (Ω, \mathcal{A}) . Ancor meno scontata e automatica è la scelta di P . Quale sarà il modo migliore per compierla? Osserviamo, a questo proposito, che la misura P da mettere sulla tribù \mathcal{A} , è un oggetto matematico col quale si vuole “fotografare” la distribuzione della propria fiducia tra i diversi eventi legati al risultato dell'esperimento considerato. Converrà dunque scegliere P in modo che questa fotografia risulti “il più fedele possibile”. Ma sarebbe arduo precisare che cosa ciò significhi dal punto di vista matematico.

Tuttavia, almeno nel caso elementare al quale inizialmente ci limitiamo (cioè quello in cui Ω sia finito), la scelta di P è meno arbitraria di quanto potrebbe apparire in un primo momento. Infatti, se Ω è un insieme finito, per costruire una misura di probabilità sull'insieme di tutte le parti di Ω , basta assegnare un valore sulle parti costituite da un sol elemento (cioè i *singoletti*): e questi valori si possono scegliere in modo arbitrario, con l'unico vincolo che siano compresi tra 0 e 1 e ammettano 1 come somma. In altre parole: per definire la più generale misura di probabilità sull'insieme di tutte le parti di Ω , basta associare a ciascun elemento di Ω un numero compreso tra 0 e 1 (numero che sarà comodo interpretare come una *massa*), in modo tale che la somma di tutte queste *masse* sia eguale a 1: dopo di ciò, si definirà la misura P nel modo seguente: per ogni parte A di Ω , il valore $P(A)$ che P assume su A è la somma delle *masse* associate ai singoli elementi di A .

In particolare, quando le masse associate ai singoli elementi di Ω siano tutte eguali tra di loro, ossia tutte eguali a $1/n$, dove n denota il numero degli elementi di Ω , la corrispondente misura di probabilità P si chiama la *ripartizione uniforme* su Ω . Il suo valore $P(A)$ sulla generica parte A di Ω è la somma di tante masse, tutte eguali a $1/n$, quanti sono gli elementi di A , ossia il rapporto tra il numero m degli elementi di A e

il numero n degli elementi di Ω :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Sarà questa la misura da scegliere qualora si giudichi sensato, per ragioni di simmetria suggerite dalla particolare natura dell'esperimento studiato, trattare in modo imparziale i diversi singoletti.

(6.1) Esempio. Nel caso del lancio di un dado, la ripartizione uniforme sull'insieme Ω di tutti gl'interi compresi tra 1 e 6 appare come la più naturale, tra tutte le misure di probabilità sull'insieme di tutte le parti di Ω , in quanto è l'unica che tratti in modo imparziale le varie facce del dado. La simmetria del dado, infatti, dovrebbe togliere al giocatore ogni motivo *razionale* per rifiutare un tale atteggiamento d'imparzialità.

Resta ad ogni modo il fatto che la scelta del “modello matematico” (Ω, \mathcal{A}, P) è, in ogni caso, un'operazione *pre-matematica*. Chiedersi se una certa scelta sia “giusta o sbagliata” non ha dunque senso: o, perlomeno, non ha lo stesso senso che chiedersi se siano giusti o sbagliati determinati conti eseguiti nell'ambito di un particolare modello scelto.

7. Probabilità condizionale. Sia (Ω, \mathcal{A}, P) uno spazio probabilizzato. Fissato un evento H (elemento di \mathcal{A}), con $P(H) \neq 0$, si chiama *misura di probabilità dedotta da P sotto la condizione H* la misura di probabilità P_H così definita nella tribù degli eventi \mathcal{A} :

$$(7.1) \quad P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Per ogni evento A , la probabilità di A secondo P_H ossia il numero $P_H(A)$ sopra definito, si chiama *probabilità condizionale* di A , secondo P , *sotto la condizione H* , e si denota anche con $P(A|H)$. Si badi di non confondere P_H (che è una misura di probabilità sull'insieme delle parti di Ω) con $P_H(A)$ o con $P(H)$ (che sono due numeri).

8. Significato della probabilità condizionale. Se (Ω, \mathcal{A}, P) è lo spazio probabilizzato che un certo individuo (in un determinato stato d'informazione) ha deciso di associare ad un esperimento aleatorio, allora, per ogni parte H di Ω , con $P(H) \neq 0$, lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P_H)$ è il nuovo spazio che l'individuo è naturalmente indotto a scegliere, in sostituzione del precedente, qualora egli riceva (e accetti per buona) la seguente informazione supplementare: “l'evento H si è realizzato” (ossia “il risultato dell'esperimento cade in H ”). Più precisamente: la scelta consistente nel sostituire (Ω, \mathcal{A}, P) con $(\Omega, \mathcal{A}, P_H)$ è la più naturale che l'individuo possa compiere qualora egli intenda aggiornare le proprie opinioni alla luce della nuova informazione, ma senza modificare l'insieme delle eventualità. Infatti P_H è l'unica misura di probabilità sull'insieme delle parti di Ω che prenda, sul generico evento A , un valore proporzionale alla probabilità, secondo la vecchia misura P , dell'insieme $A \cap H$ (che è, nel nuovo stato d'informazione, “la parte di A che conta”).

9. La formula di Bayes. Sia (Ω, \mathcal{A}, P) uno spazio probabilizzato che un certo individuo ha deciso di associare ad un esperimento aleatorio. Sia A un evento (cioè un elemento di \mathcal{A}), e sia \mathcal{H} un insieme *finito* (o *numerabile*) di eventi a due a due incompatibili, la riunione dei quali coincida con Ω . Si riconosce allora immediatamente che gli eventi della forma $A \cap H$, con $H \in \mathcal{H}$ sono a due a due incompatibili, e si ha:

$$(9.1) \quad P(A) = \sum_{H \in \mathcal{H}} P(A \cap H).$$

Se poi si suppone che ciascuno degli elementi H di \mathcal{H} , non sia *trascurabile*, cioè che sia $P(H) \neq 0$ per ogni $H \in \mathcal{H}$, allora è possibile, al secondo membro della relazione precedente, moltiplicare e dividere ciascun termine della somma per $P(H)$. Si trova così:

$$(9.2) \quad P(A) = \sum_{H \in \mathcal{H}} P(H)P(A|H).$$

Questa formula è detta talvolta *formula della disintegrazione*. Essa esprime la probabilità di A secondo P , come la *media ponderata* delle probabilità condizionali $P(A|H)$, con $H \in \mathcal{H}$: ciascuna di esse interviene nella media con il peso $P(H)$.

Dalla formula della disintegrazione si ricava immediatamente, per ogni elemento A di \mathcal{A} , con $P(A) \neq 0$, e ogni elemento di K di \mathcal{H} , la seguente *formula di Bayes*:

$$P(K|A) = \frac{P(K)P(A|K)}{\sum_{H \in \mathcal{H}} P(H)P(A|H)}.$$

Il contenuto intuitivo di quest'ultima eguaglianza è evidente: se (Ω, \mathcal{A}, P) denota lo spazio probabilizzato che un certo individuo ha deciso di associare ad un esperimento aleatorio, e se \mathcal{H} denota l'insieme di tutte le possibili cause che spiegano il realizzarsi dell'esperimento, l'informazione "A si è realizzato" permette di affermare che uno (ed uno soltanto) degli eventi appartenenti ad \mathcal{H} dev'essersi realizzato, cioè una delle cause deve aver agito. Una volta osservato che l'evento A si è realizzato, l'individuo si può allora domandare quale sia la probabilità che una particolare causa K del risultato dell'esperimento si sia realizzata; la risposta a questo problema viene data appunto dalla formula di Bayes.

10. Indipendenza di due eventi. Sia (Ω, \mathcal{A}, P) uno spazio probabilizzato. Dati due eventi A, H , si dice che essi sono tra loro *indipendenti* (o che l'uno è indipendente dall'altro) se risulta

$$(10.1) \quad P(A \cap H) = P(A)P(H).$$

Si osservi che questa relazione è automaticamente verificata (riducendosi alla forma banale $0 = 0$) se H ha probabilità nulla. Supposto invece $P(H) \neq 0$, se si dividono per $P(H)$ i due membri della precedente relazione, questa assume la forma equivalente

$$(10.2) \quad P(A|H) = P(A).$$

Il contenuto intuitivo di quest'ultima eguaglianza è evidente: per un individuo che abbia deciso di distribuire la propria fiducia tra i vari eventi secondo la misura di probabilità P , il fatto che A risulti indipendente da H significa semplicemente questo: l'ipotetica informazione supplementare “ H si è realizzato”, anche se può convincere l'individuo a cambiare la distribuzione globale della fiducia tra i vari eventi considerati (inducendolo a sostituire P con P_H), non è però capace di alterare la fiducia dell'individuo nell'evento A (nel senso che questo evento continua a ricevere, secondo P_H , la stessa probabilità che riceveva secondo P).

11. Il concetto di variabile aleatoria discreta. Un individuo che compia un esperimento aleatorio è spesso interessato a studiare delle quantità che sono “funzione” del risultato dell'esperimento; anzi, si può dire che in moltissime situazioni probabilistiche è proprio la funzione del risultato che è interessante, più dell'esperimento in sé e per sé. Si capisce dunque perché queste funzioni hanno assunto un ruolo centrale nel calcolo delle probabilità, dove intervengono da protagoniste, sotto il nome di *variabili aleatorie*.

Più precisamente, se (Ω, \mathcal{A}, P) è lo spazio probabilizzato che un individuo ha deciso di associare ad un esperimento aleatorio, e se E è un qualsiasi insieme *finito* (o *numerabile*), una “variabile aleatoria discreta” sullo spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , a valori in E , si può pensare come ad un'applicazione X che, ad ogni eventualità ω di Ω , associ un elemento $X(\omega)$ di E (o, se si preferisce, come una funzione che, in corrispondenza di ogni ipotetico risultato dell'esperimento, assuma un ben determinato valore, appartenente ad E) e che rispetti la condizione seguente: la tribù \mathcal{A} degli eventi sia abbastanza ricca da contenere tutti gli eventi “esprimibili mediante X ”, cioè della forma:

$$(11.1) \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

con A parte qualsiasi di E . (Naturalmente, questa condizione è verificata in modo automatico nel caso elementare in cui \mathcal{A} sia l'insieme di tutte le parti di Ω .)

Se X è una siffatta funzione, allora, per ogni parte A di E , l'evento (11.1) (che è realizzato da tutte e sole le eventualità ω di Ω tali che $X(\omega)$ appartenga ad A) si indica brevemente con $\{X \in A\}$ (da leggere: “ X cade in A ”). Inoltre la probabilità di un siffatto evento, anziché con $P(\{X \in A\})$, si denota più semplicemente con $P\{X \in A\}$ e si chiama anche “la probabilità che la variabile aleatoria X cada nell'insieme A ”. Nel caso particolare in cui A coincida col singoletto $\{x\}$, l'evento $\{X \in A\}$ si denota con $\{X = x\}$, e la corrispondente probabilità, denotata con $P\{X = x\}$, si chiama “la probabilità che X prenda il valore x ”.

Si riconosce immediatamente che, se X è una variabile aleatoria (definita su uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , a valori in un insieme finito E), gli eventi della forma $\{X = x\}$, con $x \in E$, sono a due a due incompatibili, e la loro riunione coincide con l'insieme Ω .

Nello studio delle variabili aleatorie, ciò che interessa maggiormente è calcolare la probabilità degli eventi “esprimibili mediante X ”. A questo scopo, riesce utile introdurre la definizione seguente.

(11.2) Definizione. Sia X una variabile aleatoria discreta, definita su uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , a valori in un arbitrario insieme finito E . Si chiama la *legge* (o *distribuzione*) di X (secondo P), e si denota con $X(P)$, l'applicazione definita, nell'insieme di tutte le parti di E , da

$$A \mapsto P\{X \in A\}.$$

Si riconosce immediatamente che la legge di X secondo P è una misura di probabilità nell'insieme di tutte le parti dell'insieme finito E .

La legge di una variabile aleatoria X (definita su un certo spazio probabilizzato, a valori in un opportuno insieme finito) si può pensare come ad una “fotografia” delle varie probabilità assegnate a tutti gli eventi “esprimibili mediante X ”. Più precisamente il significato della nozione di legge è espresso dall'osservazione seguente.

(11.3) Osservazione. Sia (Ω, \mathcal{A}, P) lo spazio probabilizzato che un individuo ha deciso di associare ad un esperimento aleatorio. Egli consideri una ben determinata funzione X del risultato dell'esperimento, cioè un'applicazione X , definita su Ω , a valori in un insieme *finito* E . L'individuo voglia dunque studiare da un punto di vista aleatorio l'esperimento avente come risultato il valore assunto dalla funzione del risultato dell'esperimento originario.

Come insieme delle eventualità egli potrà allora scegliere l'insieme E ; una parte A di E si potrà pensare come un evento legato al risultato del nuovo esperimento e, in quest'ottica, l'insieme $\{X \in A\}$ rappresenterà quell'evento, relativo all'esperimento originale, che è realizzato da tutte e sole le eventualità ω di Ω tali che il risultato $X(\omega)$ del nuovo esperimento cada in A . Sarà allora naturale pretendere che la misura di probabilità μ , da mettere sull'insieme di tutte le parti di E , verifichi la relazione

$$\mu(A) = P\{X \in A\} \quad \text{per ogni parte } A \text{ di } E,$$

o, ciò ch'è lo stesso, che essa coincida con la legge di X secondo P .

(11.4) Esempio. (*Lancio di dieci dadi*) Si supponga che l'esperimento consista nel lancio di un dado per dieci volte consecutive. Cominciamo con l'associare all'esperimento aleatorio uno spazio probabilizzato. Si tratta di un esperimento “composto”, costituito dall'esecuzione di dieci esperimenti “semplici”, che per convenzione sarà comodo chiamare “prove”. La prima prova sarà dunque il primo lancio del dado, la seconda prova sarà il secondo lancio del dado, e così via.

Mettiamoci dapprima nell'ambito di una singola prova (per esempio, tanto per fissare le idee, la prima), considerata come a sé stante. A questo esperimento semplice, sappiamo già (si veda (1.1)) che è naturale associare, come insieme delle eventualità, l'insieme, diciamolo E , degl'interi compresi tra 1 e 6.

Cerchiamo ora il naturale spazio probabilizzato da associare all'esperimento composto.

(a) Come *insieme delle eventualità* si potrà prendere l'insieme Ω costituito da tutte le possibili sequenze di dieci interi compresi tra 1 e 6. Naturalmente è da intendere che la generica di queste sequenze,

$$(11.5) \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}),$$

rappresenti il risultato che si ottiene quando, per ciascun indice j compreso tra 1 e 10, la prova di indice j dia come risultato il numero ω_j . Corrispondentemente, come tribù degli eventi \mathcal{A} , si potrà prendere l'insieme di tutte le parti di Ω . Sarà comodo, inoltre, denotare con X_j l'applicazione che, alla generica sequenza (11.5), associa il suo termine di indice j . Si tratta di una variabile aleatoria discreta, a valori nell'insieme E degli interi compresi tra 1 e 6, che rappresenta il risultato della prova di indice j . Per ogni intero x compreso tra 1 e 6, l'evento $\{X_j = x\}$ (ossia la parte di Ω costituita da tutte le sequenze il cui termine di indice j coincide con x) è l'evento che si realizza se e solo se la prova di indice j dà come risultato x .

(b) Come *misura di probabilità* da mettere sulla tribù degli eventi (cioè sull'insieme delle parti di Ω) sarà naturale scegliere la ripartizione uniforme P . Si riconosce immediatamente che la legge della variabile aleatoria X_j coincide con la ripartizione uniforme sull'insieme E degli interi compresi tra 1 e 6, cioè quell'unica misura sull'insieme delle parti di E , che associa ad ogni singoletto la medesima probabilità (in questo caso eguale a $1/6$).

12. Indipendenza tra variabili aleatorie, schema delle prove indipendenti.

Date, su di un fissato spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , due variabili aleatorie discrete X, Y , a valori negli insiemi finiti E, F rispettivamente, può accadere che per ogni parte A di E , ed ogni parte B di F , siano tra loro indipendenti gli eventi $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$. Si dice allora che le variabili aleatorie X, Y sono tra loro *indipendenti*. Si riconosce immediatamente, dalla definizione d'indipendenza tra due eventi, che, affinché le variabili aleatorie X, Y siano tra loro indipendenti occorre e basta che sia

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \quad \text{per ogni } A \subset E \text{ e } B \subset F.$$

La relazione precedente permette di estendere la definizione di indipendenza ad una sequenza finita di variabili aleatorie.

(12.1) Esempio. Mettiamoci nel quadro dell'Esempio (11.4), e osserviamo che le variabili aleatorie X_1, \dots, X_{10} sono tra loro indipendenti, così come si riconosce immediatamente dal fatto che P è la ripartizione uniforme sull'insieme Ω costituito da tutte le sequenze di dieci elementi di E .

L'esempio precedente suggerisce un metodo "canonico" per costruire uno spazio probabilizzato da associare ad una vasta classe di problemi molto comuni nel calcolo delle probabilità. Si tratta del cosiddetto "schema delle prove indipendenti".

S'immagini che un individuo voglia studiare un esperimento aleatorio "composto" consistente nell'eseguire, simultaneamente o in un certo ordine, n esperimenti "semplici" convenzionalmente chiamati "prove". Si supponga che, per la generica di queste

prove, l'individuo abbia deciso di associare come insieme delle eventualità l'insieme finito E , come tribù degli eventi l'insieme di tutte le sue parti, e come misura di probabilità, la misura μ (definita appunto nell'insieme di tutte le parti dell'insieme finito E). Ciò significa, in particolare, che in ogni caso, il risultato di questa prova sarà rappresentato da un ben determinato elemento di E .

Si supponga inoltre che le condizioni nelle quali si svolgono le singole prove siano tali da ritenere che eventuali informazioni riguardanti l'esito di alcune prove (considerate singolarmente o nel loro complesso) non siano in grado di alterare le sue opinioni sui risultati delle rimanenti prove.

Sarà allora naturale associare, all'esperimento "composto", come insieme delle eventualità, l'insieme prodotto $\Omega = E^n$: il suo generico elemento

$$(12.2) \quad \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

rappresenterà così il risultato globale che si ottiene quando, per ogni indice j , la prova di indice j dia come risultato x_j . Come tribù \mathcal{A} degli eventi si potrà tranquillamente prendere l'insieme di tutte le parti di Ω . Per ogni indice j , l'applicazione X_j di Ω in E che, alla generica sequenza (12.2) (pensata come un rappresentante dell'ipotetico risultato dell'esperimento composto), associa il suo termine di indice j , rappresenterà allora il corrispondente risultato parziale relativo alla prova di indice j .

Come misura di probabilità, nella tribù \mathcal{A} delle parti di Ω , si potrà allora prendere quell'unica misura di probabilità P avente come densità discreta la funzione che, alla generica sequenza (12.2), associa il prodotto

$$\mu\{x_1\}\mu\{x_2\}\cdots\mu\{x_n\}.$$

La misura di probabilità P così costruita si chiama talvolta la *misura prodotto* di n copie della misura μ . Si riconosce immediatamente che, nell'ambito dello spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , le variabili aleatorie X_1, \dots, X_n sono tra loro indipendenti ed hanno tutte la stessa legge μ : si esprime questo fatto dicendo che le variabili aleatorie X_1, \dots, X_n sono tra loro *isonome* (o *somiglianti*, o *identicamente distribuite*).

(12.3) Esempio. (*Lo schema di Bernoulli*) Sia p un numero reale compreso tra 0 e 1. La misura di probabilità, nell'insieme delle parti di $\{0, 1\}$, la cui densità discreta vale p nel punto 1 (e quindi $1 - p$ nel punto 0) si chiama la *legge di Bernoulli* di parametro p . Una variabile aleatoria discreta, definita su un opportuno spazio probabilizzato, a valori in $\{0, 1\}$, che l'ammette come legge si dice brevemente una variabile aleatoria *bernoulliana*.

Lo schema delle prove indipendenti permette allora di costruire uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) e, su di esso, n variabili aleatorie X_1, \dots, X_n , a valori in $\{0, 1\}$, indipendenti e bernoulliane di parametro p ; lo schema

$$((\Omega, \mathcal{A}, P), X_1, \dots, X_n)$$

così costruito si chiama anche lo *schema di Bernoulli* di parametro p . Lo si potrà interpretare, tanto per fissare le idee, come una sequenza di n estrazioni con rimessa

da un'urna contenente palline rosse e bianche, in cui p denoti il rapporto tra il numero di palline rosse e il numero totale di palline presenti nell'urna.

Nel quadro sopra descritto, si usa spesso un linguaggio tradizionale, assai suggestivo: l'evento $\{X_i = 1\}$ (risp. $\{X_i = 0\}$) si indica convenzionalmente con le parole "successo (risp. insuccesso) all'istante i (o nella prova di indice i)", mentre il parametro p si chiama la *probabilità di successo* (in una singola prova).

Seguendo il linguaggio adottato, ci si potrà allora domandare quale sia la probabilità di avere esattamente k successi nel corso delle n prove. A questo scopo, osserviamo che la variabile aleatoria

$$S = X_1 + \cdots + X_n$$

rappresenta, appunto, il numero di successi nel corso delle n prove. Ci s'interessa dunque alla probabilità dell'evento $\{S = k\}$, che si riconosce facilmente essere:

$$P\{S = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La legge di S (che, come subito si riconosce, dipende soltanto dai parametri n, p) si chiama la legge *binomiale* di parametri n, p .

13. Lo schema di Bayes. Lo schema delle prove indipendenti permette di costruire un'ampia classe di spazi probabilizzati da poter utilizzare in molte applicazioni. Un'altra vasta classe di problematiche è modellizzata dal cosiddetto "schema di Bayes".

S'immagini che un individuo voglia studiare un esperimento aleatorio "composto" da due esperimenti "semplici". Si supponga che l'individuo abbia deciso di associare, come insieme delle eventualità per il primo di questi esperimenti, l'insieme *finito* E , e, come misura di probabilità (nell'insieme di tutte le parti di E), la misura μ . Ciò significa, in particolare, che, in ogni caso, il risultato di questa prova sarà rappresentato da un ben determinato elemento x di E .

Si supponga poi che l'individuo abbia deciso di associare, come insieme delle eventualità per il secondo esperimento, l'insieme *finito* F , e che le condizioni nel quale si svolgono i due esperimenti siano tali da indurre l'individuo a pensare che il primo esperimento possa alterare il suo grado di fiducia sui possibili eventi legati al secondo esperimento. Egli decida dunque di associare, in corrispondenza di ciascun ipotetico risultato x del primo esperimento, una misura di probabilità ν_x nell'insieme di tutte le parti di F .

Sarà allora naturale associare, all'esperimento "composto", come insieme delle eventualità, l'insieme prodotto $\Omega = E \times F$: il suo generico elemento $\omega = (x, y)$ rappresenterà così il risultato globale quando la prima prova dia come risultato x , e la seconda prova dia come risultato y . Come tribù \mathcal{A} degli eventi si potrà tranquillamente prendere l'insieme di tutte le parti di Ω . Si denoterà poi con X (risp. Y) l'applicazione che, al generico elemento (x, y) di Ω , associa il suo primo termine x (risp. il suo secondo

termine y). Come misura di probabilità, nella tribù \mathcal{A} delle parti di Ω , si potrà allora prendere quell'*unica* misura di probabilità P che abbia come densità discreta la funzione $(x, y) \mapsto \mu\{x\}\nu_x\{y\}$. Si riconosce immediatamente che, nell'ambito dello spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , la variabile aleatoria discreta X ha come legge μ , mentre Y soddisfa la relazione seguente:

$$P(\{Y \in B\}|\{X = x\}) = \nu_x(B) \quad \text{per ogni } B \subset F, x \in E,$$

o, ciò ch'è lo stesso, Y ha come legge, secondo la misura di probabilità $P(\cdot|\{X = x\})$, dedotta da P sotto la condizione $\{X = x\}$, la misura ν_x . Si esprime questo fatto dicendo che Y ammette $(\nu_x)_{x \in E}$ come *legge condizionale* rispetto a X . Lo schema

$$((\Omega, \mathcal{A}, P), X, Y)$$

così ottenuto si chiama lo *schema di Bayes* associato alle misure $\mu, (\nu_x)_{x \in E}$.

(13.1) Esempio. (*Estrazioni da due urne*) Si supponga di avere due urne, la prima delle quali contenga dieci palline bianche e cinque palline rosse, mentre la seconda ne contenga cinque bianche e nove rosse. Si estragga, dalla prima urna, una pallina, e la si metta (senza guardarne il colore) nella seconda; dunque si estragga una pallina dalla seconda urna. Lo schema di Bayes permette allora di costruire uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) e, su di esso, una coppia (X, Y) di variabili aleatorie a valori in $\{0, 1\}$, la prima delle quali abbia come legge la legge di Bernoulli di parametro $1/3$ (si veda (12.3)) mentre la seconda abbia come legge, secondo la misura di probabilità $P(\cdot|\{X = 1\})$, la legge di Bernoulli di parametro $2/3$, e, secondo la misura di probabilità $P(\cdot|\{X = 0\})$, la legge di Bernoulli di parametro $2/5$.

Secondo questo modello, la variabile aleatoria X rappresenterà il colore della pallina estratta dalla prima urna, mentre variabile aleatoria Y rappresenterà il colore della pallina estratta dalla seconda urna (con la convenzione che 1 significhi "rosso" e 0 significhi "bianco").

Rassegna di esercizi

UN PO' DI LOGICA

Esercizio 1. Negare le seguenti frasi:

- (a) Tutti gli studenti del corso abitano a Pisa.
- (b) Almeno uno studente del corso prenderà trenta all'esame.
- (c) Tutte le studentesse del corso hanno occhi celesti e capelli biondi.
- (d) Tutti i docenti del corso di laurea svolgono almeno un corso oppure sono all'estero per motivi di studio.
- (e) Tutti gli studenti dell'università credono agli oroscopi.
- (f) Qualche studente del corso gioca a calcio oppure suona il pianoforte.
- (g) Tutti i docenti del corso di laurea vanno ai convegni e non praticano sport.
- (h) Qualche docente del corso di laurea conosce il tedesco oppure il francese.

Esercizio 2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando la risposta):

- (a) Se x è un numero dispari, allora $x + 1$ è pari.
- (b) Se x è un multiplo di 3 allora $2x$ è un multiplo di 6.
- (c) Ogni numero maggiore di 3 o è pari o è primo.
- (d) Esiste un numero positivo maggiore di 10 e primo.
- (e) Se x è un numero pari, allora $x/2$ è primo.
- (f) Se x è un numero maggiore di 3, allora $3x + 1$ è minore di 9.
- (g) Tutti i multipli di 6 sono anche multipli di 3.
- (h) Tutti i multipli di 9 sono anche multipli di 10.
- (i) C'è almeno un multiplo di 3 che è anche multiplo di 8.

Esercizio 3. Date le proposizioni p, s **vere** e le proposizioni q, r **false**, determinare quali delle seguenti espressioni logiche sono vere:

- (a) $(\text{non } p \vee q) \wedge (\text{non } r \vee s)$
- (b) $(p \wedge q \wedge \text{non } r) \vee (r \wedge \text{non } r \wedge \text{non } p)$
- (c) $[\text{non } s \wedge (q \vee s)] \vee (p \wedge \text{non } r)$
- (d) $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee \text{non } s)$

Esercizio 4. Stabilire la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche (cioè il loro valore vero o falso in funzione delle possibili alternative di verità delle proposizioni dalle quali sono formate):

- (a) $(p \vee \text{non } q) \Rightarrow (r \wedge q)$
- (b) $\text{non}(p \vee q) \wedge (\text{non } p \wedge \text{non } q)$
- (c) $(p \Rightarrow \text{non } q) \vee (\text{non } p \Rightarrow q)$
- (d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } p \Leftrightarrow r)$
- (e) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\text{non } p \vee \text{non } q)$
- (f) $(p \Leftrightarrow \text{non } q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \text{non } p)$

Esercizio 5. Assegnati i due predicati seguenti:

$$p(x) = \text{“}x \text{ è maggiore di } 2\text{”} \quad \text{e} \quad q(x) = \text{“}x \text{ è multiplo di } 3\text{”}$$

individuare quali delle seguenti proposizioni sono vere:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------|---|
| (a) $p(1) \wedge q(1)$ | (b) $p(3) \wedge q(9)$ | (c) $p(1) \Rightarrow q(2)$ |
| (d) $p(5) \wedge \text{non } q(1)$ | (e) $p(6) \vee p(-1)$ | (f) $q(6) \Rightarrow p(-1)$ |
| (g) $(\forall x) p(x)$ | (h) $(\exists x) p(x)$ | (i) $(\forall x) p(x) \Rightarrow q(x)$ |

Esercizio 6. Si ponga $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 > 0\}$, e si considerino i due predicati seguenti:

$$p(x) = \text{“}x \text{ è un elemento di } A\text{”} \quad \text{e} \quad q(x) = \text{“}x \text{ è maggiore di } 0\text{”}$$

Individuare quali delle seguenti proposizioni sono vere:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $p(3) \wedge q(3)$ | (b) $p(1) \Rightarrow \text{non } q(1)$ | (c) $p(1) \Leftrightarrow q(1)$ |
| (d) $(\forall x) p(x) \Rightarrow q(x)$ | (e) $(\exists x) p(x) \wedge q(x)$ | (f) $(\exists x)(\forall y) p(x) \wedge q(y)$ |

Esercizio 7. Sia A un sottoinsieme *non vuoto* di \mathbb{R} . Scrivere la negazione delle seguenti affermazioni:

- | | |
|--|---|
| (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in A) \quad x < y$ | (b) $(\forall x \in A)(\exists y \in A) \quad x < y$ |
| (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y, z \in A) \quad y < x < z$ | (d) $(\exists x \in A)(\exists y, z \in A) \quad y < x < z$ |

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Esercizio 1. Dopo aver delimitato l'insieme dei valori dei parametri per i quali la scrittura ha senso, eseguire le operazioni riducendo ad una forma più semplice le seguenti espressioni frazionarie:

- | | |
|--|---|
| (a) $\left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{10x - 16}$ | (b) $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \frac{a^2 - 1}{2a}$ |
| (c) $\left(\frac{1}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 - 3a + 2}\right) : \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-2}\right)$ | (d) $\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) : \frac{1 - a + a^2}{2a^3}$ |
| (e) $\left(\frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1}\right) : \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}\right)$ | (f) $\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 - \frac{1}{2x}} - 1$ |

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni numeriche intere:

$$(a) \quad 2(x+1) - 3x = x - 3(x-1)$$

$$(b) \quad x - \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{1-x}{4} - \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad (2x-1)^2 + x - 3 - \frac{1}{2} = 2x(2x+1) - \frac{2x-1}{2}$$

$$(d) \quad \frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}(x+4) = \frac{3x+16}{5} - \frac{1}{2}x$$

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni numeriche fratte:

$$(a) \quad \frac{2x-5}{2-x} - 1 = -4 \qquad (b) \quad \frac{2x-3}{x} - 2 = 3 + \frac{1}{x}$$

$$(c) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x+1} = 0 \qquad (d) \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}$$

Esercizio 4. Risolvere e discutere le seguenti equazioni letterali, intere rispetto all'incognita x :

$$(a) \quad x(a-1) = a^2 - a$$

$$(b) \quad x(2+a) = a(3x+1) - 5$$

$$(c) \quad ax(a+1) - 2x + a = a^2 + 3(1-a)$$

$$(d) \quad a^2(x-1) + b(ax+b) = 0$$

$$(e) \quad 2x - a + bx = b$$

$$(f) \quad (a-b)x + a = (a+b)x - b$$

Esercizio 5. Risolvere e discutere le seguenti equazioni letterali, fratte rispetto all'incognita x :

$$(a) \quad \frac{a}{x} = \frac{2a+1}{x+1}$$

$$(b) \quad \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$$

$$(c) \quad \frac{x+a}{2x-a} + \frac{a^2}{4x^2-a^2} = \frac{1}{2}$$

$$(d) \quad \frac{\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a}}{\frac{2x}{x-a}} - \frac{a}{x-a} = 0$$

Esercizio 6. Risolvere le seguenti equazioni in x nelle quali compaiono dei valori assoluti:

$$(a) \quad |x+8| = 2$$

$$(b) \quad |3-x| = 5+2x$$

$$(c) \quad |2x-1| = 1$$

$$(d) \quad |4x+3| = 3-x$$

$$(e) \quad |x+8| = -2$$

$$(f) \quad |5-2x| = x-1$$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a) \quad (x+1)(x-1) > 0 \qquad (b) \quad (x+3)(x-5)(x+1) > 0 \qquad (c) \quad \frac{3x-6}{x(x-1)} \geq 0$$

$$(d) \quad \frac{(x+1)(x-3)}{1-2x} \geq 0 \qquad (e) \quad \frac{2-x}{x+4} \leq 0 \qquad (f) \quad \frac{x^2-1}{x+3} > \frac{3}{x+3}$$

Esercizio 8. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$(a) \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ \frac{x-1}{2} \geq x-1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \frac{x-1}{5-x} > 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \frac{1}{x-4} \geq 0 \\ \frac{7}{5-x} \geq 0 \end{cases}$$

I RADICALI

Esercizio 1. Utilizzando la ben nota proprietà $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$ (valida per ogni numero reale a maggiore di zero, e per ogni coppia m, n d'interi positivi), ridurre a una forma più semplice i seguenti radicali:

$$\begin{array}{llll} (a) \sqrt[6]{4} & (b) \sqrt[4]{9} & (c) \sqrt[10]{32} & (d) \sqrt[10]{25} \\ (e) \sqrt[10]{81} & (f) \sqrt[4]{0,01} & (g) \sqrt[3]{0,001} & (h) \sqrt[8]{36} \\ (i) \sqrt[12]{a^2b^4} & (l) \sqrt[9]{a^6b^3} & (m) \sqrt[20]{a^2b^6c^{14}} & (n) \sqrt[6]{a^2b^3} \end{array}$$

Esercizio 2. Utilizzando la ben nota proprietà $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (valida per ogni coppia a, b di numeri reali maggiori di zero, e ogni intero positivo n), ridurre a una forma più semplice i seguenti radicali:

$$\begin{array}{llll} (a) \sqrt{27} & (b) \sqrt[3]{16} & (c) \sqrt{72} & (d) \sqrt{0,001} \\ (e) \sqrt[3]{a^6b^2} & (f) \sqrt{a^4b^5c^3} & (g) \sqrt{4ab^3} & (h) \sqrt[3]{27a^5b^6} \end{array}$$

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali:

$$\begin{array}{ll} (a) 2x\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} & (b) 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} \\ (c) x\sqrt{2} - x = \sqrt{2} + 1 & (d) x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}(1-x) \\ (e) (x\sqrt{2} - 1)^2 - (x\sqrt{2} + 1)^2 = 0 & (f) (x-1)(1 - \sqrt{2} + \sqrt{6}) = \sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{3} \end{array}$$

Esercizio 4. Risolvere e discutere le seguenti equazioni letterali a coefficienti irrazionali, rispetto all'incognita x :

$$\begin{array}{ll} (a) x\sqrt{ab} = \sqrt{a} + \sqrt{b} & (b) x(1 - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - a \\ (c) \frac{x-a}{a} + \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1 & (d) \frac{x-1}{\sqrt{a}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{a}+1} \end{array}$$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$$\begin{array}{ll} (a) \sqrt{x-1} = 1 & (b) \sqrt{x^2-x} = x+1 \\ (c) \sqrt{x^2+1} = x+1 & (d) \sqrt[3]{x+1} = 1 \end{array}$$

ANCORA SU EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Esercizio 1. Risolvere le seguenti semplici equazioni numeriche di secondo grado:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x^2 + 2x = 0 & \text{(b)} \quad 3x^2 - 4x = 0 & \text{(c)} \quad 2x^2 - 8 = 0 \\ \text{(d)} & 12x^2 - 1/2 = 0 & \text{(e)} \quad 3x^2 - 12 = 0 & \text{(f)} \quad \sqrt{3}x^2 + \sqrt{6}x = 0 \end{array}$$

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni numeriche di secondo grado:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x^2 - 8x + 7 = 0 & \text{(b)} \quad x^2 - x - 2 = 0 & \text{(c)} \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ \text{(d)} & x^2 - 7x + 12 = 0 & \text{(e)} \quad 6x^2 + x - 1 = 0 & \text{(f)} \quad x^2 + 4 = 4x \end{array}$$

Esercizio 3. Risolvere le seguenti equazioni numeriche fratte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{1}{x} + \frac{x-8}{x+6} = 0 & \text{(b)} & \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2} = 4 \\ \text{(c)} & \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{3} & \text{(d)} & \frac{x-5}{x-1} + \frac{x-1}{x-5} + 2 = 0 \end{array}$$

Esercizio 4. Risolvere e discutere le seguenti equazioni letterali fratte, rispetto all'incognita x :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{x^2}{2x-a^2} = a & \text{(b)} & \frac{x-a}{x} = x-2a + \frac{1}{2} \\ \text{(c)} & \frac{(2+a)x^2}{x+1} = \frac{a^2}{2} & \text{(d)} & \frac{x-a}{x+a} = \frac{x+a}{x-a} - \frac{2x^2+2a^2}{x^2-a^2} \\ \text{(e)} & 2x+a = \frac{2-a-2x}{2x+a} & \text{(f)} & \frac{2ab}{x+2b-a} = x \\ \text{(g)} & \frac{2x^2+3ax+a^2}{x+a} = x & \text{(h)} & \frac{x}{x+3a} + \frac{1}{x} = \frac{3a}{x^2+3ax} \end{array}$$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado e rappresentare graficamente le soluzioni.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 3x^2 + 8x - 3 < 0 & \text{(b)} \quad 2x^2 - 3x - 2 > 0 & \text{(c)} \quad -2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ \text{(d)} & (x+1)^2 - 25 \geq 0 & \text{(e)} \quad x(1-x) \leq -6 & \text{(f)} \quad x(x-2) > 15 \end{array}$$

Esercizio 6. Risolvere le seguenti disequazioni fratte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{x+1}{x^2-3x+1} > 0 & \text{(b)} & \frac{x+1}{x^2+2x-3} > 0 \\ \text{(c)} & \frac{x}{x^2-2x-8} < 0 & \text{(d)} & \frac{7}{x-2} < 3 - \frac{8}{x-5} \end{array}$$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti disequazioni dove compaiono dei valori assoluti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & |x^2 + x| > 2 & \text{(b)} & |x - 2| > x^2 & \text{(c)} & |x^2 - 3x - 8| \geq 3x - 1 \\ \text{(d)} & \left| \frac{x - 8}{x^2 - 1} \right| > 5 & \text{(e)} & \left| \frac{x^2 + 8x}{x - 3} \right| < 48 & \text{(f)} & \frac{|x - 5| - 4}{|x + 1| - 2} \leq 0 \end{array}$$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \sqrt{x - 1} = 1 & \text{(b)} & \sqrt{x^2 + 5} = 3 & \text{(c)} & \sqrt{x^2 - x} = x + 1 \\ \text{(d)} & \sqrt{x + 1} = x + 1 & \text{(e)} & \sqrt{6x - 5} = x + 1 & \text{(f)} & 3x = 2\sqrt{3x + 1} \\ \text{(g)} & 5x - 1 = \sqrt{10x + 6} & \text{(h)} & \sqrt{4 - 3x} = -x - 7 & \text{(i)} & \sqrt{x - x^2} = \sqrt{7 - 2x} \end{array}$$

Esercizio 9. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \sqrt{x^2 - 2x + 1} < 4 & \text{(b)} & x + 1 \leq \sqrt{2x + 5} & \text{(c)} & \sqrt{3 - 2x} \leq x + 2 \\ \text{(d)} & \sqrt{6x - x^2} \geq 3 - 2x & \text{(e)} & \sqrt{x + 3} \geq |x| & \text{(f)} & \sqrt[3]{x^3 - 4x} < x + 3 \end{array}$$

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Esercizio 1. Calcolare il valore dei seguenti logaritmi:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log_2 8 & \text{(b)} & \log_2 16 & \text{(c)} & \log_{1/2} 64 & \text{(d)} & \log_8 2 \\ \text{(e)} & \log_{1/3} \frac{1}{9} & \text{(f)} & \log_3 \frac{1}{27} & \text{(g)} & \log_{1/3} 81 & \text{(h)} & \log_3 81 \\ \text{(i)} & \log_{1/10} 100 & \text{(l)} & \log_{10} 0,01 & \text{(m)} & \log_{1/5} 125 & \text{(n)} & \log_3 \sqrt{3} \end{array}$$

Esercizio 2. Determinare l'argomento dei seguenti logaritmi:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log_{10} x = 4 & \text{(b)} & \log_{2/5} x = 2 & \text{(c)} & \log_{\sqrt{2}} x = \frac{1}{2} & \text{(d)} & \log_{1/2} x = 4 \\ \text{(e)} & \log_{1/8} x = 1 & \text{(f)} & \log_3 x = -3 & \text{(g)} & \log_{1/25} x = -\frac{1}{2} & \text{(h)} & \log_{\sqrt{3}} x = 3 \end{array}$$

Esercizio 3. Determinare la base dei seguenti logaritmi:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log_x 16 = 4 & \text{(b)} & \log_x 2 = 2 & \text{(c)} & \log_x 64 = 2 & \text{(d)} & \log_x 9 = -2 \\ \text{(e)} & \log_x \frac{1}{81} = 4 & \text{(f)} & \log_x \frac{1}{8} = -3 & \text{(g)} & \log_x 3 = \frac{1}{4} & \text{(h)} & \log_x \sqrt[4]{3} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Esercizio 4. Verificare le eguaglianze seguenti, valide per ogni coppia a, b di numeri reali e ogni numero reale α diverso da zero:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \log_a b = -\log_a \frac{1}{b} & \text{(b)} & \log_a b = -\log_{1/a} b \\ \text{(c)} & \log_{1/a} \frac{1}{b} = \log_a b & \text{(d)} & \log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b \end{array}$$

Esercizio 5. Applicando le proprietà dei logaritmi, trasformare le seguenti espressioni in un unico logaritmo:

- (a) $\log x - \log y + 2 \log y$ (b) $3 \log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{4} \log z$
 (c) $\frac{1}{2} \log(x + y) - 2 \log(x - y) + 3 \log x$ (d) $2 + \log x - \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{2} \log z$

Esercizio 6. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

- (a) $3^{2x+1} = 1$ (b) $2^{2-x} = 8$ (c) $9^{4-x} = \frac{1}{3}$
 (d) $7^{2x+5} = 7^{\frac{x-1}{2}}$ (e) $3^{x+7} = \frac{1}{3^{x-3}}$ (f) $4^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x}$
 (g) $2^{\frac{2x+9}{1-x}} = 1/4$ (h) $7^{\sqrt{x^2-1}} = 49$ (i) $(2^{x+3})^{x-4} = 1$
 (l) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-4|} = 5^{2x}$ (m) $4^{\sqrt{|x+2|}} = 16$ (n) $5^{1+\sqrt{x}} + 5^{1-\sqrt{x}} = 10$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

- (a) $1 - 7^{1+x} \geq 0$ (b) $3^{\sqrt{x+1}} < 9$ (c) $\frac{1}{2^{x^2}} \geq \frac{1}{4}$
 (d) $3^{\sqrt{3+x-2x^2}} < 3^{2-x}$ (e) $2^{\frac{x^2-x}{x+1}} < 1$ (f) $\frac{2^x - 1}{8 - 2^x} \geq 0$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- (a) $2 \log(x + 4) = \log(2 - x)$ (b) $2 \log \sqrt{x - 3} = \log(3x - 4)$
 (c) $2 \log \sqrt{3x} = \log(x^2 - 4)$ (d) $\log |3x - 1| = \log |x|$
 (e) $2 \log x + \log(x^2 + 1) = \log(3 - x^2)$ (f) $\log^2 x + \log x = 0$
 (g) $\log_{1/3} \log_{1/3}(5x + 9) = 0$ (h) $\sqrt{1 + \log_{\sqrt{2}} x} = 3$
 (i) $\log x = \log_{10} x$ (l) $\sqrt{\log x} = 1 - \log x$
 (m) $\frac{\log(10 - x)}{\log(4 - x)} = 2$ (n) $\log \frac{x^2 - 1}{x} = \log 2x$

Esercizio 9. Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

- (a) $\log_{10}(x - 3) > 1$ (b) $\log_{1/10}(x - 4) > 1$
 (c) $\log_{1/2}(3x - 5) > 2$ (d) $\log_{1/2}(x^2 - x) \geq \log_{1/2} 6$
 (e) $\log_2 \sqrt{x} \leq 2$ (f) $(2^{\sqrt{x}} - 2^x)(\log^2 x - 4) \leq 0$
 (g) $\log_2 \frac{x+3}{x} \geq 1$ (h) $\log_5 \frac{1+|x|}{1-|x|} > \log_5 2$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Esercizio 1. Basandosi sulla definizione, calcolare la derivata della funzione f nel punto x_0 assegnato:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x) = 3x - 1 & x_0 = 0 \\ \text{(c)} & f(x) = \ln(x + 3) & x_0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{(b)} & f(x) = 4x^2 & x_0 = 1 \\ \text{(d)} & f(x) = e^{x-1} & x_0 = 2 \end{array}$$

Esercizio 2. Basandosi sulla definizione di derivata, calcolare la derivata (in un generico punto x) della funzione f :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x) = \sin x & \text{(b)} & f(x) = \cos x & \text{(c)} & f(x) = \operatorname{tg} x \\ \text{(d)} & f(x) = 2^x & \text{(e)} & f(x) = a^x & \text{(f)} & f(x) = \log_a x \end{array}$$

Esercizio 3. Applicando la ben nota regola di derivazione $(af + bg)' = af' + bg'$ (valida per ogni coppia f, g di funzioni derivabili e ogni coppia a, b di numeri reali) calcolare la derivata delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x \mapsto 3 + x + \sin x & \text{(b)} & x \mapsto 5 + \cos x & \text{(c)} & x \mapsto x + \ln x \\ \text{(d)} & x \mapsto e^x + 2 \cos x & \text{(e)} & x \mapsto 2^x + \sin x & \text{(f)} & x \mapsto 3^x + \log_2 x \end{array}$$

Esercizio 4. Applicando la ben nota regola di derivazione $(fg)' = f'g + g'f$ (valida per ogni coppia f, g di funzioni derivabili) calcolare la derivata delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x \mapsto xe^x & \text{(b)} & x \mapsto 3^x e^x & \text{(c)} & x \mapsto 3x \ln x \\ \text{(d)} & x \mapsto x^2 \sin x & \text{(e)} & x \mapsto x^2(x-2)(x-3) & \text{(f)} & x \mapsto \log_2 x \log_3 x \end{array}$$

Esercizio 5. Applicando la ben nota regola di derivazione $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (valida per ogni coppia f, g di funzioni derivabili, per cui $f \circ g$ abbia senso), calcolare la derivata delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x \mapsto \sin^2 x & \text{(b)} & x \mapsto \ln^2 x & \text{(c)} & x \mapsto \sin(\sin x) \\ \text{(d)} & x \mapsto \ln(\sin x) & \text{(e)} & x \mapsto \log_3 2^x & \text{(f)} & x \mapsto \log_2(\log_3 x) \end{array}$$

Esercizio 6. Dimostrare la regola di derivazione seguente: se f, g è una coppia di funzioni derivabili, con $g(x) \neq 0$ per ogni x , si ha:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Esercizio 7. Applicando le regole di derivazione note, calcolare la derivata delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x \mapsto \frac{\ln x}{1 + \ln x} & \text{(b)} & x \mapsto \frac{\sin x}{x + \cos x} & \text{(c)} & x \mapsto \frac{3^x}{x + \ln x} \\ \text{(d)} & x \mapsto x \ln^3 x & \text{(e)} & x \mapsto 2 \sin^2 x + 2^x & \text{(f)} & x \mapsto \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x) \end{array}$$

Esercizio 8. Scrivere l'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico della funzione f nel punto x_0 assegnato:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = x^2 + 1 \quad x_0 = 1 \\ \text{(b)} & f(x) = 5 + \ln x \quad x_0 = 1 \\ \text{(c)} & f(x) = \frac{x+1}{x} \quad x_0 = -1 \\ \text{(d)} & f(x) = \sin^2 x - \cos x \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Esercizio 9. Trovare i punti di massimo e minimo delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y = x^2 - 2x^2 & \text{(b)} \quad y = \frac{x+1}{x^2} & \text{(c)} \quad y = e^x(x-1)^2 \\ \text{(d)} & y = \frac{\ln x}{x} & \text{(e)} \quad y = e^{\frac{x^2}{x+1}} & \text{(f)} \quad y = \log x - x \end{array}$$

Esercizio 10. Trovare le coordinate dei punti appartenenti al grafico della funzione f in cui la retta tangente ha per coefficiente angolare il numero m assegnato:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = 3x^2 + 4 \quad m = 6 \\ \text{(b)} & f(x) = 3x^3 - 5 \quad m = 9 \\ \text{(c)} & f(x) = \frac{5x}{x-4} \quad m = -\frac{5}{4} \\ \text{(d)} & f(x) = \frac{x}{x^2+2} \quad m = \frac{1}{9} \end{array}$$

LIMITI DI FUNZIONE

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 10x + 21}{x - 3} & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} \\ \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{1 - x^2} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - x^2 - 9}{2x - 6} \end{array}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 2} & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 - 4} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 4}{2 + 3x} \\ \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5}{3 - x^2} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x + 5}{4x^3 - 1} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{4x + x^2} \end{array}$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) & \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+1} - x) \\ \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{1-x}) & \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Esercizio 4. Tenendo presente i ben noti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\operatorname{sen} 2x) - \ln(2x)) \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} e^x}{3e^x} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos^2 x} \end{array}$$

Esercizio 5. Tenendo presente i ben noti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^x & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)^3}{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{1 - \cos e^x} \end{array}$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x}}{x} & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2^x} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2^x} \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^{2x} - 1} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x + 1} \\ \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{e^x + 1} & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{2x}} & \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} \end{array}$$

UN PO' DI TRIGONOMETRIA

Esercizio 1. Definire le funzioni *seno*, *coseno*, *tangente* di un numero reale, e spiegare il significato della frase: “*le funzioni seno, coseno e tangente sono periodiche*”.

Esercizio 2. Calcolare il valore delle seguenti espressioni:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} \pi - 3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - 2 \operatorname{sen} 0 & \text{(b)} \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \\ \text{(c)} \quad 2 \operatorname{tg} 0 + 5 \operatorname{sen} 2\pi - 5 \operatorname{tg} \pi + 3 \cos \frac{3\pi}{2} & \text{(d)} \quad 2 \cos \frac{\pi}{2} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \end{array}$$

Esercizio 3. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo α indicato:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & P = (1, 0), \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \text{(b)} & P = (2, -1), \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \\ \text{(c)} & P = (4, 0), \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} \\ \text{(d)} & P = (-2, 3), \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \end{array}$$

Esercizio 4. Dopo aver individuato per quali α le seguenti espressioni hanno senso, trasformarle in altre che contengono soltanto $\sin \alpha$:

$$\text{(a)} \quad \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1 \qquad \text{(b)} \quad \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \qquad \text{(c)} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Esercizio 5. Dopo aver individuato per quali α le seguenti espressioni hanno senso, trasformarle in altre che contengono soltanto $\cos \alpha$:

$$\text{(a)} \quad \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} + 1 \qquad \text{(c)} \quad (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$$

Esercizio 6. Dopo aver individuato per quali α le seguenti espressioni hanno senso, trasformarle in altre che contengono soltanto $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\text{(a)} \quad \sin \alpha + \cos \alpha \qquad \text{(b)} \quad \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 \cos^3 \alpha \qquad \text{(c)} \quad \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + 1$$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti equazioni goniometriche riconducendole a equazioni elementari:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(b)} \quad \cos x = 0 \\ \text{(c)} & \cos x = -\frac{1}{2} & \\ \text{(d)} & \sin 3x = \frac{1}{2} & \text{(e)} \quad 2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0 \\ \text{(f)} & \operatorname{tg} 3x - 1 = 0 & \\ \text{(g)} & \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 & \text{(h)} \quad \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 \\ \text{(i)} & \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} & \end{array}$$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

$$\text{(a)} \quad 3 \operatorname{tg}^2 x = 1 \qquad \text{(b)} \quad \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \qquad \text{(c)} \quad \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

Esercizio 9. Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche riconducendole a disequazioni elementari:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 2 \sin x - 1 > 0 & \text{(b)} \quad \operatorname{tg} 2x - 1 < 0 \\ \text{(c)} & 2 \cos^2 x - \cos x \geq 0 & \\ \text{(d)} & \cos^2 x + 2 \cos x < 0 & \text{(e)} \quad \operatorname{tg}^2 - 3 \geq 0 \\ \text{(f)} & 3 \sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0 & \end{array}$$

Esercizio 10. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O e raggio r si traccino le due tangenti alla circonferenza stessa, e siano A, B i punti di contatto. Sapendo che il coseno dell'angolo \widehat{APB} è $4/5$, determinare le lunghezze dei segmenti di tangenti PA e PB e la distanza di P dal centro O .

Esercizio 11. In un triangolo ABC , rettangolo in A , ha il cateto AB lungo $7a$ e la tangente dell'angolo \widehat{ABC} è $24/7$. Sul prolungamento dell'altezza AH relativa all'ipotenusa, dalla parte di H , si consideri un punto P la cui distanza da A sia $24a$. Calcolare la distanza di P da C .

Esercizio 12. In un trapezio, gli angoli alla base misurano $\pi/4$ e $\pi/6$ e la base maggiore, che è doppia della base minore, misura $4a$. Calcolare le lunghezze dei lati obliqui.

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO

Esercizio 1. Dimostrare che, tra tutti i rettangoli di area data, il quadrato è quello che ha il perimetro minore.

Esercizio 2. Dimostrare che tra tutti i rettangoli di area data il quadrato ha il cerchio circoscritto minore.

Esercizio 3. Sulla circonferenza di diametro AB di lunghezza $2r$ determinare il punto P per il quale sia massima l'area del triangolo PHB , essendo H la proiezione di P su AB .

Esercizio 4. Date due circonferenze di raggi R e r (con $r < R$) tangenti internamente, condurre una perpendicolare alla retta passante per i centri in modo tale che risulti massima la somma dei quadrati delle corde che le due circonferenze staccano su tale retta.

Esercizio 5. In un triangolo ABC l'angolo \widehat{C} ha ampiezza doppia rispetto a \widehat{B} e il segmento BC è lungo a . Determinare l'ampiezza dell'angolo \widehat{C} in modo tale che la somma dei quadrati delle altezze condotte dai vertici B e C risulti massima.

Esercizio 6. In un cerchio di raggio r determinare una corda in modo che risulti massima la differenza fra due triangoli isosceli inscritti nella circonferenza e aventi per base la corda stessa.

Esercizio 7. Dato un angolo retto $X\widehat{O}Y$ ed un punto A sul lato OX , tale che sia $\overline{OA} = a$, considerare, internamente all'angolo, un punto P tale che l'angolo \widehat{OPA} abbia ampiezza $\pi/3$ e in modo tale che sia massima la somma $\overline{OP} + \overline{OA}$.

Esercizio 8. Dato un cerchio di raggio r , determinare una corda in modo che risulti massimo il triangolo avente per vertici il centro O e gli estremi della corda.

Esercizio 9. Nel triangolo ABC rettangolo in A , il cateto AB misura $3a$ e l'angolo acuto adiacente ha seno eguale a $4/5$. Nel semipiano individuato dalla retta AC contenente B determinare un punto P in modo tale che l'angolo \widehat{APC} abbia ampiezza $\pi/2$ e in modo tale che risulti minima la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici A, B, C .

Esercizio 10. È dato un settore AOB di un cerchio di raggio r ; l'angolo al centro \widehat{AOB} è acuto ed ha ampiezza α . Inscrivere in esso un rettangolo $PQMN$ con la base PQ sul raggio OA e M sull'arco AB avente area massima.

Esercizio 11. Data la parabola $4y - x^2 + 4x - 12 = 0$, determinare la normale n ad essa nel suo punto di intersezione C con l'asse y , indicando con D l'ulteriore punto di intersezione di n con la parabola. Determinare il punto P sull'arco CD di parabola tale che l'area del triangolo PCD sia massima.

Esercizio 12. Sull'iperbole di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$ determinare il punto P che formi con l'origine degli assi e con il punto $A = (1, 1)$ il triangolo di area minima.

Esercizio 13. Tra tutte le parabole del fascio $y = x^2 - 2kx + 1$, determinare quelle il cui vertice ha minima distanza dall'origine.

Esercizio 14. Nella regione di piano così definita:

$$x^2 - 4x + y \leq 0, \quad x^2 - 2x - y \geq 0,$$

inscrivere il triangolo, con un lato parallelo all'asse y e il vertice opposto nell'origine avente area minima.

Esercizio 15. Data una parabola $y = x^2 + x + 1$, determinare sull'asse x il punto P tale che, dette t_1, t_2 le rette tangenti da esso condotte alla parabola, l'angolo $\widehat{t_1 t_2}$ sia minimo.

Esercizio 16. Si consideri la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Detto AB l'arco del primo quadrante, determinare su di esso un punto P tale che, indicato con Q il punto di intersezione tra la tangente alla circonferenza in P e l'asse x , e con S l'intersezione della retta OP con la retta $y = 2$, l'area del triangolo QPS risulti minima.

Esercizio 17. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e la retta $y = 2$, determinare una retta passante per l'origine degli assi, in modo che, detta M la sua ulteriore intersezione con la circonferenza, e H la proiezione di M sulla retta data, risulti minima la somma $s = \overline{OM}^2 + \overline{MH}^2$.

Esercizio 18. Siano A, B i punti di intersezione della retta $y = 8 - 2x$ con gli assi cartesiani. Determinare, sul segmento AB , il punto P per il quale è massimo il prodotto delle coordinate.

Esercizio 19. Data la retta $y = ax + a - 1$ rappresentare graficamente la funzione $S(a)$, che rappresenta l'area del triangolo che essa stacca sugli assi coordinati al variare di a . Rappresentare graficamente anche la sua derivata prima.

Esercizio 20. Dopo aver determinato a, b in modo tale che la curva di equazione

$$y = \frac{1}{x^2 + ax + b}$$

abbia un massimo relativo nel punto $(3/2, -4)$, tracciare il grafico γ della funzione così ottenuta. Considerato poi il fascio di rette passanti per il punto C di intersezione di γ con l'asse y , determinare le rette del fascio che intersecano γ in altri due punti

reali. Detti P, Q tali punti, determinare il luogo \mathcal{C} descritto dal punto medio del segmento PQ .

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Esercizio 1. Servendosi del teorema di de l'Hôpital, calcolare i limiti seguenti:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x + \sin x}$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - 1}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 3x \cos x}{4x^2 \sin x}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{x^2}$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 - x)}{\operatorname{tg} x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ |
| (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x - 1}$ | (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{e^x}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| (o) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x^2}$ | (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ | (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(1 - x)$ |
| (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x e^{1/x}$ | (s) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \sin x$ | (t) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{2/x}$ |
| (u) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_{1/2} x$ | (v) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$ | (z) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x - 1}{x + 1}$ |

Esercizio 2. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| (a) $y = x^3(x - 2)$ | (b) $y = x\sqrt{2x + 1}$ | (c) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x + 1}$ |
| (d) $y = x^2 \ln(x + 1)$ | (e) $y = x e^{-x^2}$ | (f) $y = x + \ln x$ |
| (g) $y = e^x \operatorname{tg} x + 3$ | (h) $y = e^x + e^{-x}$ | (i) $y = x + \log_{1/2} x$ |

Esercizio 3. Sia f una funzione *pari* (cioè verificante la relazione $f(-x) = f(x)$ per ogni x). È possibile che f sia crescente in un intorno del punto $x_0 = 0$? È possibile che f sia strettamente crescente in un intorno del punto $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 4. Determinare i punti di massimo e di minimo delle funzioni seguenti:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| (a) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2x$ | (b) $y = x(x^2 - 3x)$ | (c) $y = x^3(3x^2 - 15x)$ |
| (d) $y = x\sqrt[3]{x}$ | (e) $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ | (f) $y = x^{-2}e^x$ |
| (g) $y = x \ln^2 x$ | (h) $y = \ln(\sqrt{x} - x)$ | (i) $y = x^{-1} \ln x$ |

Esercizio 5. Determinare per quali valori dei parametri reali λ, μ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x + 2 & \text{per } x \geq 1, \\ \mu x^2 + 5x & \text{per } x < 1, \end{cases}$$

è continua e derivabile per ogni numero reale x .

Esercizio 6. Dimostrare che, per ogni scelta del parametro reale m , la funzione

$$f(x) = \frac{2x(x - m)}{x^2 + x + 6}$$

ammette massimi e minimi.

Esercizio 7. Determinare per quali valori del parametro reale a , la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x + 4}$$

non ammette né massimi né minimi.

Esercizio 8. Determinare per quali valori del parametro reale a , la funzione

$$f(x) = \frac{\log_a x}{x}$$

è crescente nell'intervallo $[e, \infty[$.

Esercizio 9. Determinare per quali valori del parametro reale k , la funzione

$$f(x) = kx^3 - 6x^2 + 3kx - 2$$

è decrescente per ogni numero reale x .

Esercizio 10. Determinare per quali valori dei parametri reali a, b , la funzione

$$f(x) = a \ln^2 x + b \ln x$$

ha un minimo relativo nel punto $(\sqrt{e}, -1/4)$.

GLI INTEGRALI

Esercizio 1. Definire la *primitiva* di una funzione continua e spiegare perché, se F, G sono due distinte primitive di una funzione continua f , allora $G - F$ è costante.

Esercizio 2. Definire l'*integrale* di una funzione continua e spiegare il collegamento che sussiste tra l'integrale e la ricerca di una primitiva.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti semplici integrali:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\int_0^2 x \, dx$ | (b) $\int_{-1}^1 x^3 \, dx$ | (c) $\int_0^3 \sqrt{x} \, dx$ |
| (d) $\int_{-2}^2 \sqrt[3]{x} \, dx$ | (e) $\int_0^2 \sqrt[4]{x} \, dx$ | (f) $\int_0^3 x^2 \, dx$ |
| (g) $\int_0^{1/2} (3x^2 + 2x) \, dx$ | (h) $\int_{-1}^1 (12x^5 + 3x^2) \, dx$ | (i) $\int_0^6 (\sqrt{x} + 1)^2 \, dx$ |
| (l) $\int_0^\pi (\sin x - \cos x) \, dx$ | (m) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2 + \tan^2 x) \, dx$ | (n) $\int_0^\pi (\sin x + \cos x) \, dx$ |
| (o) $\int_1^2 (2/x) \, dx$ | (p) $\int_0^e (x + 2x) \, dx$ | (q) $\int_1^2 (2^x + 3^x) \, dx$ |
| (r) $\int_0^1 e^{2-x} e^x \, dx$ | (s) $\int_0^1 e^{x+1} \, dx$ | (t) $\int_0^{e^2} (3^{2x} + x) \, dx$ |
| (u) $\int_0^\pi \frac{\cos^3 x + 5}{\cos^2 x} \, dx$ | (v) $\int_1^e \frac{x - 2 + 4x^2}{2x} \, dx$ | (z) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} \, dx$ |

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali utilizzando il metodo della sostituzione:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^1 \frac{5}{x+1} dx & \text{(b)} \int_{-1}^1 \frac{2}{3-x} dx & \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+4} dx \\
 \text{(d)} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx & \text{(e)} \int_0^\pi \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx & \text{(f)} \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx \\
 \text{(g)} \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3-2)^4} dx & \text{(h)} \int_{1/2}^1 \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x}} dx & \text{(i)} \int_{1/2}^1 \frac{4x-1}{\sqrt[3]{2x^2-x}} dx \\
 \text{(l)} \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 dx & \text{(m)} \int_0^2 e^x \cos e^x dx & \text{(n)} \int_{-\pi}^\pi \cos x \cos(\operatorname{sen} x) dx
 \end{array}$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali utilizzando il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx & \text{(b)} \int_0^1 x e^x dx & \text{(c)} \int_1^2 x \log_2 x dx \\
 \text{(d)} \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x dx & \text{(e)} \int_0^\pi x^2 \cos x dx & \text{(f)} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{tg} x dx \\
 \text{(g)} \int_0^\pi e^x \cos x dx & \text{(h)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x dx & \text{(i)} \int_{-\pi/2}^\pi e^{2-x} \operatorname{sen} x dx
 \end{array}$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_1^3 (x^2 - 2x) dx & \text{(b)} \int_1^2 (x - \sqrt{x}) dx & \text{(c)} \int_2^4 (x+1)(x-3) dx \\
 \text{(d)} \int_{-1}^1 x(1-x^2)^3 dx & \text{(e)} \int_0^3 \sqrt{1+x} dx & \text{(f)} \int_1^2 e^{2x+1} dx \\
 \text{(g)} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2x dx & \text{(h)} \int_0^\pi \operatorname{sen} 2x \cos x dx & \text{(i)} \int_0^{2\sqrt{2}} x \sqrt{x^2+1} dx \\
 \text{(l)} \int_0^2 \frac{x^2+2x+1}{x+1} dx & \text{(m)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx & \text{(n)} \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx \\
 \text{(o)} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx & \text{(p)} \int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx & \text{(q)} \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx
 \end{array}$$

Esercizio 7. Calcolare graficamente l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione f definita da

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = 5/2$ e $x = 3$.

Esercizio 8. Dopo aver tracciato il grafico della funzione f definita da $f(x) = 4/x$, calcolare l'area della parte A del piano costituita dalle coppie (x, y) verificanti la relazione

$$1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Esercizio 9. Calcolare l'area della regione di piano limitata dai grafici delle equazioni:

$$f(x) = (x-1)^2, \quad y = x+1.$$

Esercizio 10. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 8$, dalla retta di equazione $2x + y - 8 = 0$ e dall'esse delle ascisse.

ANCORA SUGLI INTEGRALI

Esercizio 1. Dare un esempio di funzione continua, non identicamente nulla, definita sull'intervallo $[-1, 1]$, il cui integrale valga zero.

Esercizio 2. Esistono funzioni continue, non identicamente nulle, definite sull'intervallo $[0, 1]$, con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, il cui integrale sia nullo?

Esercizio 3. Siano f, g due funzioni reali, continue sull'intervallo $[0, 1]$, con $f \geq g$ e tali che esista un numero reale x_0 , con $f(x_0) < g(x_0)$. Dimostrare che è

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 g(x) dx.$$

Esercizio 4. Sia f una funzione reale, definita su $[0, 4]$ ed ivi continua. Sia

$$\int_0^4 f(x) dx = 10.$$

Calcolare:

- (a) $\int_0^2 f(2x) dx$ (b) $\int_{-1}^3 2f(x+1) dx$ (c) $\int_{-1}^1 3f(2x+2) dx$
 (d) $\int_0^2 xf(x^2) dx$ (e) $\int_1^{e^4} (f(\ln x)/x) dx$ (f) $\int_0^{\pi/2} f(4\sin x) \cos x dx$

Esercizio 5. Sia f una funzione reale, definita su $[0, 2]$ ed ivi derivabile. Sia

$$\int_0^2 f(x) dx = 6.$$

Calcolare:

- (a) $\int_{-1}^1 2f(x+1) dx$ (b) $\int_0^1 f(2x) dx$ (c) $\int_0^2 xf'(x) dx$

Esercizio 6. Verificare con un esempio che non sussiste l'eguaglianza

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right).$$

Esercizio 7. Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$ (c) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin(2x) dx$
 (d) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$ (e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/6} (3 + \operatorname{tg}^2 x) dx$ (f) $\int_0^{\pi} \cos(2x) dx$
 (g) $\int_{-1}^2 e^{3-x} e^{2x} dx$ (h) $\int_0^3 (e^x + e^{-x})^2 dx$ (i) $\int_{-1}^1 e^{2x+1} dx$
 (l) $\int_{-1}^2 x\sqrt{1+x^2} dx$ (m) $\int_{-1}^1 \sqrt{2x+3} dx$ (n) $\int_1^3 (2/x^2) dx$
 (o) $\int_{-1}^2 e^{2x^2+4} x dx$ (p) $\int_1^2 (e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}) dx$ (q) $\int_0^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx & \text{(b)} \int_0^1 \frac{3x+2}{4x+5} dx & \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2+1} dx \\
 \text{(d)} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx & \text{(e)} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx & \text{(f)} \int_{1/e}^e \frac{1}{x \ln x} dx
 \end{array}$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la formula di integrazione per parti (eventualmente per più di una volta):

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^{\pi/3} x \sin^2 x dx & \text{(b)} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} x \cos^2 x dx & \text{(c)} \int_e^{e^2} x \ln x dx \\
 \text{(d)} \int_{-1}^1 x e^{2x} dx & \text{(e)} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx & \text{(f)} \int_0^1 x^2 e^x dx \\
 \text{(g)} \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx & \text{(h)} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 x dx & \text{(i)} \int_{1/e}^e \ln^2 x dx
 \end{array}$$

Esercizio 10. Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_1^{\pi} \ln x (\sin x + x \cos x) dx & \text{(b)} \int_1^2 \ln x (x e^x + e^x) dx \\
 \text{(c)} \int_0^1 \ln(1+x^3) x^2 dx & \text{(d)} \int_0^{\pi/3} x \sin x \cos^2 x dx \\
 \text{(e)} \int_0^{\pi/6} x \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx & \text{(f)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x \ln^2 \sin x dx
 \end{array}$$

ANCORA PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO

Esercizio 1. Fra tutti i rettangoli, di cui perimetro misura $2p$, trovare quello di area massima.

Esercizio 2. Fra tutti i rettangoli, il cui perimetro misura $2p$, trovare quello di diagonale minima.

Esercizio 3. Fra tutti i triangoli isosceli, il cui perimetro misura $2p$, trovare quello per il quale è minima la somma delle aree dei quadrati dei suoi tre lati.

Esercizio 4. In un triangolo equilatero, il cui lato misura l , inscrivere un altro triangolo equilatero di area minima.

Esercizio 5. In un triangolo isoscele assegnato, inscrivere un rettangolo, avente un lato sulla base del triangolo dato, di area massima.

Esercizio 6. In una circonferenza, il cui raggio misura r , inscrivere il triangolo isoscele per il quale è massima la somma dei quadrati dei suoi tre lati.

Esercizio 7. In una circonferenza, il cui raggio misura R , è inscritto un triangolo equilatero ABC . Condurre una retta \mathcal{R} parallela alla retta del lato AB in modo che

sia massima la somma dei quadrati delle corde intercettate su \mathcal{R} dalla circonferenza data e dal triangolo ABC .

Esercizio 8. In un triangolo isoscele ABC la base e l'altezza relativa CH misurano l : determinare su CH un punto P tale che risulti minima la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici del triangolo dato.

Esercizio 9. In una circonferenza, il cui diametro AB misura $2r$, è condotta la corda AC che misura $r\sqrt{3}$: determinare su tale corda un punto P in modo che, indicata con H la sua proiezione su AB , risulti minima la somma dei tre quadrati aventi come lati rispettivamente i segmenti AH, PH, PB .

Esercizio 10. È dato un settore circolare AOB , ampio $2\pi/3$, di centro O e il cui raggio misura r ; indicato con M il punto medio dell'arco AB , determinare, sul segmento OM , un punto P tale che risulti minima la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti A, B, M .

Esercizio 11. In un trapezio rettangolo $ABCD$, retto in A e in D , la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC ; sapendo che il segmento AB misura l e che il segmento BC misura $l/2$, determinare un punto P sulla diagonale AC in modo che sia minima la somma dei quadrati delle distanze di P dal lato AB e dai vertici C, D .

Esercizio 12. È data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$; determinare su di essa un punto P tale che, indicata con T la proiezione di P sulla tangente in A alla circonferenza data, risulti massima la somma $PB + 2PT$.

Esercizio 13. Sopra una semicirconferenza, il cui diametro AB misura $2r$, determinare un punto P tale che, indicato con H l'ulteriore punto d'intersezione della semicirconferenza data con la parallela ad AB condotta per P , risulti massimo il perimetro del quadrilatero convesso $OBPH$, essendo O il centro della semicirconferenza data.

Esercizio 14. In una circonferenza, il cui raggio misura r , inscrivere un triangolo isoscele ABC nel quale risulti massima la differenza fra l'altezza CH relativa alla base AB e la base stessa.

Esercizio 15. È dato il triangolo rettangolo ABC , retto in A , con i lati AB e AC eguali di lunghezza l . Con centro in O , punto medio di AB , descrivere una semicirconferenza di diametro AB , che intersechi il lato BC in M . Determinare sulla semicirconferenza un punto P in modo che il quadrilatero $OPCA$ abbia area massima.

Esercizio 16. Assegnato un settore AOB , di un cerchio di raggio r , di ampiezza $\pi/2$, sia M il punto medio del segmento OB : determinare sull'arco dato un punto P tale che, indicata su H la sua proiezione sul raggio OA , risulti massima la somma delle misure dei segmenti PH e PM .

Esercizio 17. Dato un triangolo isoscele ABC , retto in A , condurre per il vertice A una retta non secante il triangolo, in modo tale che, indicate con D, E le proiezioni ortogonali dei vertici B, C su tale retta, risulti massimo il perimetro del trapezio $BCED$.

Esercizio 18. In un triangolo rettangolo ABC , l'ipotenusa BC misura $2l$ e l'angolo \widehat{ABC} misura $\pi/3$. Descritto il quarto di circonferenza di centro A e tangente all'ipotenusa, determinare su di esso un punto P in modo tale che risulti minima la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici B, C .

Esercizio 19. Assegnato un settore AOB di un cerchio di raggio r , di ampiezza $2\pi/3$, determinare un punto P in modo tale che il quadrato $OAPB$ abbia area massima.

Esercizio 20. In un triangolo isoscele ABC , la base BC ed i lati obliqui misurano, rispettivamente, $2a$ e $4a$. Determinare, sul lato obliquo AC , un punto P in modo che risulti minima la somma dei quadrati delle distanze di P dai punti B, H , essendo H il punto medio di BC .

PRIMI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Esercizio 1. Un individuo lancia un dado equilibrato. Calcolare la probabilità che egli veda uscire la faccia corrispondente al numero 5 oppure quella corrispondente al numero 3.

Esercizio 2. Un individuo lancia una coppia di monete. Calcolare la probabilità che escano esattamente due teste.

Esercizio 3. È dato un mazzo di quaranta carte. Un individuo ne sceglie a caso una. Calcolare la probabilità che esca una figura.

Esercizio 4. Quattro individui si danno appuntamento al Grand Hotel di Parigi. Ci sono però cinque alberghi che portano questo nome. Se le quattro persone si recano a caso, e indipendentemente l'una dall'altra, in uno dei cinque alberghi, qual è la probabilità che tutti e quattro si trovino nello stesso albergo?

Esercizio 5. Un test di matematica è costituito da dieci domande a crocette. Alle domande si può rispondere soltanto "sì" oppure "no". L'esame viene superato se si risponde correttamente ad almeno sei domande. Calcolare la probabilità che un individuo che compili il test a caso possa passare l'esame.

Esercizio 6. Un test di matematica è costituito da dieci domande a crocette. Per ciascuna domanda ci sono esattamente quattro risposte, una sola delle quali è vera. Per passare l'esame, il candidato deve rispondere esattamente ad almeno sei domande. Calcolare la probabilità che un individuo che compili il test a caso possa passare l'esame.

Esercizio 7. Un individuo ha a disposizione quindici palline identiche. Egli abbia a disposizione tre urne eguali. Calcolare la probabilità che, mettendo a caso le palline nelle urne, ciascuna di esse abbia lo stesso numero di palline.

Esercizio 8. È data un'urna contenente quindici palline bianche e dieci palline rosse. Se ne estraggono, in sequenza, quattro, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcolare la probabilità che esca ogni volta una pallina dello stesso colore. È più probabile che escano per quattro volte palline di colore bianco o di colore rosso?

Esercizio 9. Nove persone arrivano ad un ristorante con tre sale. Ciascuno sceglie a caso la sala. Calcolare la probabilità che ci sia una sala nella quale non c'è nessuna delle nove persone.

Esercizio 10. Si lanciano a caso tre dadi. Calcolare la probabilità che escano tre numeri diversi.

Esercizio 11. In un albergo ci sono quindici camere. Arrivano all'albergo otto clienti, e l'albergatore li dispone a caso nelle camere. Qual è la probabilità che tutti i clienti vadano a finire in stanze separate?

Esercizio 12. Un'urna contiene dieci palline numerate. Se ne estraggono a caso tre. Calcolare la probabilità che la somma dei numeri presenti sulle prime due palline coincida col numero presente sulla terza pallina.

Esercizio 13. Un'urna contiene otto palline, cinque bianche e tre rosse. Se ne estraggono due contemporaneamente. Calcolare la probabilità che entrambe siano rosse.

Esercizio 14. Si lanciano insieme un dado ed una moneta. Calcolare la probabilità che escano testa ed un numero pari.

Esercizio 15. Si lanciano insieme due dadi. Calcolare la probabilità che la somma dei numeri usciti sia 10.

PROBLEMI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Esercizio 1. Da un'urna, contenente dieci palline, numerate da 1 a 10, si esegue un'estrazione.

- (1) Calcolare la probabilità che il numero estratto sia inferiore o eguale a 5.
- (2) Calcolare la stessa probabilità di (1) sapendo che il numero estratto è pari.
- (3) Se il numero estratto è pari, calcolare la probabilità che esso sia inferiore o eguale a 5.

Esercizio 2. Un individuo abbia a disposizione cinque urne numerate, ed abbia a disposizione trenta palline tutte eguali tra di loro. Egli decida di mettere a caso le palline nelle urne. Dopo aver formalizzato il problema tramite un opportuno spazio probabilizzato, calcolare la probabilità che l'urna numero 1 resti vuota. Calcolare poi la probabilità che le urne abbiano tutte lo stesso numero di palline.

Esercizio 3. Ad un concorrente di un gioco viene chiesto di lanciare una moneta e, successivamente un dado. Se nel lancio della moneta esce testa, egli vincerà un numero di euro corrispondente al numero apparso sul dado. Nel caso in cui esca croce, invece, egli riceverà il corrispettivo in euro del doppio del numero apparso sul dado.

- (1) Calcolare la probabilità che il concorrente guadagni cinque euro.
- (2) Calcolare la probabilità che il concorrente guadagni dieci euro.
- (3) Se il concorrente guadagna quattro euro, calcolare la probabilità che sia uscito croce nel lancio della moneta.

Esercizio 4. Ad un concorrente di un gioco viene chiesto di lanciare due monete e, successivamente, un dado. Se nel lancio delle monete esce due teste, egli riceverà un numero di euro corrispondente al doppio del numero apparso sul dado. In caso contrario egli riceverà il corrispondente esatto in euro del numero apparso sul dado.

- (1) Calcolare la probabilità che il concorrente guadagni dieci euro.
- (2) Calcolare la probabilità che il concorrente guadagni quattro euro.

- (3) Sapendo che il concorrente ha guadagnato quattro euro, calcolare la probabilità che siano uscite due teste.

Esercizio 5. Sono assegnate due urne numerate. La prima di queste contiene otto palline rosse e due bianche; la seconda contiene quattro palline rosse e sei bianche. Si sceglie a caso un'urna, e poi si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che si sia scelto la prima urna, sapendo che è uscita una pallina bianca.

Esercizio 6. Due fabbriche producono entrambe uno stesso oggetto. La prima di esse produce pezzi difettosi con una frequenza del 3%, la seconda con una frequenza del 4%. Un individuo compra un oggetto, il quale risulta difettoso. Qual è la probabilità che esso sia stato costruito nella prima fabbrica?

Esercizio 7. Tre mobili, tra loro indistinguibili, contengono ciascuno due cassetti. Il primo contiene una moneta d'oro in ciascuno dei cassetti, il secondo contiene una moneta d'oro nel primo cassetto, ed una d'argento nel secondo cassetto, il terzo una moneta d'argento in ciascuno dei cassetti. Si apre un cassetto a caso, e si trova una moneta d'oro. Calcolare la probabilità che anche nel secondo cassetto vi sia una moneta d'oro.

Esercizio 8. Da un'urna contenente b palline bianche e r palline rosse, ne viene estratta una che viene messa da parte senza guardarla. Calcolare la probabilità che la seconda estratta sia bianca.

Esercizio 9. Una popolazione biologica è composta per il 60% da individui che posseggono, nel proprio patrimonio genetico, una determinata caratteristica a . È noto che l'80% della popolazione priva della caratteristica a è affetta da una malattia m , mentre la medesima malattia è presente soltanto nel 4% della popolazione dotata della caratteristica a . Si sceglie a caso un individuo dalla popolazione.

- (1) Calcolare la probabilità che l'individuo sia affetto dalla malattia m .
- (2) Calcolare la probabilità che l'individuo abbia la caratteristica genetica a , sapendo che egli è affetto dalla malattia m .

Esercizio 10. Un paesino, disperso nelle campagne toscane, tra Firenze e Pisa, riceve il segnale televisivo per il 40% dall'antenna del monte Morello, e per il restante 60% dall'antenna sul monte Serra. Il segnale può essere di due tipi: "lungo" o "breve".

È noto che l'antenna del monte Morello trasmette un segnale "lungo" il 52% delle volte, mentre l'antenna del monte Serra trasmette il medesimo segnale soltanto il 37% delle volte. Se un abitante del paesino riceve, in un certo istante, un segnale "breve", qual è la probabilità che esso provenga dall'antenna sul monte Serra?

LO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Esercizio 1. Della funzione assegnata, descrivere il dominio, individuare il segno, determinare gli eventuali asintoti, individuare gli intervalli di monotonia, ed infine

tracciare un grafico approssimativo:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad x \mapsto \frac{2x+3}{x-1} & \text{(b)} \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1} & \text{(c)} \quad x \mapsto \frac{x^2-x}{3x+x^2} \\
 \text{(d)} \quad x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x} & \text{(e)} \quad x \mapsto \frac{x^2-2x}{x^2-2x-3} & \text{(f)} \quad x \mapsto \frac{x+1}{4x^2+8x+1} \\
 \text{(g)} \quad x \mapsto \frac{x^2+2}{x} & \text{(h)} \quad x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x} & \text{(i)} \quad x \mapsto \frac{2x^2-3}{x^2-1}
 \end{array}$$

Esercizio 2. Della funzione assegnata, descrivere il dominio, individuare il segno, determinare gli eventuali asintoti, individuare gli intervalli di monotonia, ed infine tracciare un grafico approssimativo:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad x \mapsto \sqrt{x-x^2} & \text{(b)} \quad x \mapsto \sqrt{4-x^2} & \text{(c)} \quad x \mapsto \sqrt{x^3-12x} \\
 \text{(d)} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(e)} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{(f)} \quad x \mapsto (x+3)\sqrt{x-1} \\
 \text{(g)} \quad x \mapsto \sqrt[3]{3x^2-x^3} & \text{(h)} \quad x \mapsto \sqrt[3]{x-x^3} & \text{(i)} \quad x \mapsto (x^2+x)\sqrt{x}
 \end{array}$$

Esercizio 3. Della funzione assegnata, descrivere il dominio, individuare il segno, determinare gli eventuali asintoti, individuare gli intervalli di monotonia, ed infine tracciare un grafico approssimativo:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x-1} & \text{(b)} \quad x \mapsto \frac{e^x+2}{e^x} & \text{(c)} \quad x \mapsto \frac{2e^x}{e^x-1} \\
 \text{(d)} \quad x \mapsto e^{2x}-2e^x-3 & \text{(e)} \quad x \mapsto e^x+e^{-x}+1 & \text{(f)} \quad x \mapsto (e^x-1)^2 \\
 \text{(g)} \quad x \mapsto \ln \frac{x-3}{x-1} & \text{(h)} \quad x \mapsto \ln \frac{x^2+2x-3}{x+1} & \text{(i)} \quad x \mapsto \ln \frac{x^3}{x+1} \\
 \text{(l)} \quad x \mapsto \ln(x^2-2x-3) & \text{(m)} \quad x \mapsto \ln(x^3-x) & \text{(n)} \quad x \mapsto \ln(3x-x^2)
 \end{array}$$

Esercizio 4. Della funzione assegnata, descrivere il dominio, individuare il segno, determinare gli eventuali asintoti, individuare gli intervalli di monotonia, ed infine tracciare un grafico approssimativo:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad x \mapsto (x-1)e^x & \text{(b)} \quad x \mapsto (x-2)(e^x+1) & \text{(c)} \quad x \mapsto e^x-x \\
 \text{(d)} \quad x \mapsto x-\ln x & \text{(e)} \quad x \mapsto x \ln^2 x & \text{(f)} \quad x \mapsto \frac{2-\ln x}{x} \\
 \text{(g)} \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x} & \text{(h)} \quad x \mapsto \ln \frac{x^2}{|x|+2} & \text{(i)} \quad x \mapsto \ln \left| \frac{x^2}{x-1} \right| \\
 \text{(l)} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}} & \text{(m)} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \text{(n)} \quad x \mapsto \sqrt[3]{x^4} \\
 \text{(o)} \quad x \mapsto \frac{1}{x-\sqrt[3]{x^2}} & \text{(p)} \quad x \mapsto x-\sqrt[3]{x^2} & \text{(q)} \quad x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{1-x}
 \end{array}$$