Corso di laurea in Scienze biologiche molecolari

Corso di Matematica e statistica B - Lista di esercizi n.3

1. Sia f derivabile in $]a, b[$. Si scriva l'equazione della retta perpendicolare al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

2. Scrivere la derivata delle seguenti funzioni, segnalando i punti dove essa non esiste:

   (i) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, (ii) $f(x) = x^2 - x|x|$,

   (iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, (iv) $f(x) = \log_x 3$,

   (v) $f(x) = x|x^2 - 1|$, (vi) $f(x) = \arcsin|2x - \pi|$,

   (vii) $f(x) = e^{|x|}$, (viii) $f(x) = |\cos x|$,

   (ix) $f(x) = ||x + 2| - |x^3||$, (x) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{|x|}}$.

3. Calcolare, dove ha senso, la derivata delle seguenti funzioni:

   (i) $f(x) = x^x$, (ii) $f(x) = (x \ln x)^{\sin\sqrt{x}}$,

   (iii) $f(x) = \ln\sin\sqrt{x}$, (iv) $f(x) = 3^{3^x}$,

   (v) $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$, (vi) $f(x) = \log|\log|x||$,

   (vii) $f(x) = x^{1/x}$, (viii) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$,

   (ix) $f(x) = \log_x(2^x - x^2)$, (x) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

4. Scrivere l'equazione della tangente all'ellisse definita da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   (ove a e b sono fissati numeri reali non nulli) nel generico punto (x_0, y_0).

5. Scrivere l'equazione della tangente all'iperbole definita da

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   (ove a e b sono fissati numeri reali non nulli) nel generico punto (x_0, y_0).

6. Si provi che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^3+x^5 = a$ ha un'unica soluzione reale $x = x_a$. Si provi poi che la funzione $g(a) = x_a$ è continua su $\mathbb{R}$, e si dica in quali punti è derivabile. Si calcolino infine, se esistono, i valori $g'(2)$ e $g'(-2)$.

7. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$; (ii) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln\sin 2x}$;

   (iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x}$; (iv) ; $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

   (v) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$; (vi) $\lim_{x\to 0}\tan x\cdot\ln\sin x$;

   (vii) $\lim_{x\to 1^+}(\ln x)\ln\ln x$; (viii) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sin^2 x}$;

   (ix) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$; (x) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$.

8. Scrivere il decimo polinomio di Taylor di centro 0 per le funzioni:

   (a) $x\sin x^2$; (b) $x\sin^2 x$; (c) $\log(1+3x^3)$; (d) $\sqrt{1-2x^4}$.

9. Scrivere l'm-simo polinomio di Taylor di centro $\frac{\pi}{4}$ per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$.

10. Sia $f(x) = x + x^4$; scrivere tutti i polinomi di Taylor di f di centro 1.

11. Si calcoli una approssimazione di $\sin 1$ a meno di 10^{-4}.

12. Calcolare, usando la formula di Taylor, i seguenti limiti:

   (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}$; (ii) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin^2\sqrt{x}-\sin^2 x}{x^2}$;

   (iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)$; (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\log\cos x}{x^4}$;

   (v) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(5^x-2^x)}{\sin x-\log(1-x)}$; (vi) $\lim_{x\to+\infty}\left[-2x^2-x^3\log\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)\right]$;

   (vii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$; (viii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{\sin x}\right)$.