

Indice

1	Teoria dei segnali unificata	5
1.1	Segnali	5
1.2	Celle elementari	9
1.3	L'integrale di Haar	12
1.4	Trasformata di Fourier	16
1.5	Trasformazioni sui segnali	19
1.6	Teorema di campionamento	23
2	Acquisizione e trasmissione di immagini	27
2.1	Acquisizione di un'immagine	27
2.2	Analisi di Fourier dell'acquisizione	34
2.3	Ricostruzione di un'immagine	36

Introduzione

Lo scopo della tesi è quello di descrivere l'acquisizione e la riproduzione di un segnale tridimensionale $l(x, y, t)$, illimitato nello spazio e nel tempo. L'acquisizione dell'immagine in tempo reale, rappresentata dal segnale l , simboleggia l'operazione effettuata da una videocamera, il cui prodotto finale è un segnale video in una dimensione.

Preliminare a questa descrizione è la trattazione della teoria unificata dei segnali: daremo una formulazione astratta e generale della nozione di segnale e delle sue proprietà. Il dominio di un segnale è un gruppo abeliano, e la caratteristica principale dei segnali, ossia la loro periodicità o aperiodicità, viene definita tramite un altro gruppo abeliano, nel quale l'aperiodicità non è altro che il caso degenerare della periodicità.

Introdurremo poi l'integrale di Haar come operatore universale agente sui segnali: ciò ci permetterà di definire in forma unificata le principali operazioni che si utilizzano per i segnali, ovvero trasformata di Fourier, trasformazioni lineari e convoluzione. La trasformata di Fourier sarà impiegata per la costruzione del dominio delle frequenze, che rappresenta il duale del dominio dei segnali; analizzeremo le simmetrie tra i due insiemi.

L'uso della teoria generale permette, inoltre, di introdurre in maniera naturale le trasformazioni tra segnali, in cui i segnali in ingresso e in uscita possono appartenere alle stesse classi o a classi diverse. In particolare, tratteremo in maniera unificata le trasformazioni lineari mediante l'integrale di Haar. La classe delle trasformazioni lineari comprende particolari trasformazioni, dette campionamenti. Nella teoria classica, per ogni campionamento vengono considerati altrettanti teoremi di campionamento; con la teoria unificata, invece, è possibile formulare un unico teorema, detto teorema di campionamento unificato, dal quale si possono ottenere tutti i casi particolari.

Affronteremo l'acquisizione in due modi distinti: il primo metodo farà uso della teoria enunciata; il secondo utilizzerà il teorema del cambio di dimensione. Per concludere, passeremo attraverso il teorema di campionamento per riprodurre il segnale, ovvero ricostruire l'immagine.

Capitolo 1

Teoria dei segnali unificata

1.1 Segnali

Il dominio dei nostri segnali astratti sarà un gruppo abeliano G ; sono quindi ben definite l'operazione di traslazione e di passaggio all'inverso

$$G + p = G \quad \forall p \in G \quad -G = G$$

Non tutti i gruppi abeliani sono utili per la teoria dei segnali, ma solamente quelli che ammettono l'integrale di Haar, ossia i gruppi *abeliani localmente compatti* (detti anche *regolari*).

Premettiamo la definizione di *gruppo primitivo*:

Definizione 1. *Un gruppo **primitivo** è un gruppo su cui agisce un'azione primitiva, ossia un'azione transitiva e che non ha orbite non banali.*

Tutti i gruppi abeliani localmente compatti G di \mathbb{R}^m possono essere generati da gruppi primitivi H attraverso la trasformazione lineare data dalla matrice non singolare $\mathbf{G} \in M(\mathbb{R}, m, m)$ nel modo seguente: $G = \mathbf{G}H \iff G = \{\mathbf{G}h \mid h \in H\}$ che rappresenta un'azione di gruppo primitiva. (credo, sto andando a naso, devo verificare) La matrice \mathbf{G} è detta *base* del gruppo, il gruppo primitivo H è la *caratteristica* del gruppo e la coppia (\mathbf{G}, H) è una rappresentazione del gruppo G , in simboli

$$(\mathbf{G}, H) \rightarrow G. \tag{1.1}$$

La base di un gruppo non ha un'unica rappresentazione, motivo per cui usiamo la scrittura (1.1) per enfatizzare che la rappresentazione (\mathbf{G}, H) indica il gruppo G . Detto $\mathcal{G}(\mathbb{R}^m)$ l'insieme dei gruppi abeliani localmente compatti, i gruppi primitivi che troviamo in questo insieme sono della forma:

$$H = \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q \times \mathbb{O}^r \quad \text{con } p + q + r = m, \quad p, q, r \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

o una loro permutazione¹. Questi gruppi rappresentano la caratteristica nella generazione di altri gruppi abeliani localmente compatti di \mathbb{R}^m . In generale, tale caratteristica determina la natura del gruppo:

- Se $H = \mathbb{R}^m$, il gruppo G è \mathbb{R}^m stesso (gruppo *continuo* di dimensione m);
- Se $H = \mathbb{Z}^m$, il gruppo G è un *reticolo* (gruppo *discreto* di dimensione m);
- Se $H = \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^{m-p}$, con $1 \leq p < m$ o una permutazione di tali fattori, il gruppo G si dice *grata* (gruppo *misto* di dimensione m).

Quindi per $G = \mathbb{R}$ ($m = 1$), vediamo che i gruppi primitivi sono \mathbb{R} , \mathbb{Z} e \mathbb{O} . In questo caso, la mappa lineare $\mathbf{G}h$ è data semplicemente dal prodotto per uno scalare T , ovvero da Th , per $T > 0$. Questa mappa, applicata al gruppo primitivo \mathbb{Z} , restituisce il gruppo $G = \mathbb{Z}(T)$ dei multipli interi di T . Poiché l'applicazione della mappa lineare ai gruppi \mathbb{R} e \mathbb{O} restituisce i gruppi stessi, segue che gli unici gruppi non primitivi di $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ sono dati da $\mathbb{Z}(T)$, al variare di $T \in \mathbb{R}^+$. Abbiamo così dimostrato il

Teorema 1. *Gli unici gruppi abeliani localmente compatti di \mathbb{R} sono \mathbb{R} , $\mathbb{Z}(T)$, $T \in (0, +\infty)$, e il gruppo degenero $\mathbb{O} = \{0\}$.*

Introduciamo ora la definizione di gruppo separabile:

Definizione 2. *Un gruppo si dice separabile se è dato dal prodotto cartesiano di gruppi di dimensione 1, ovvero*

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m, \quad G_i \in \mathcal{G}(\mathbb{R}). \quad (1.3)$$

I gruppi separabili possono essere rappresentati da una matrice a base diagonale.

Viceversa, un gruppo si dice non separabile se non può essere espresso nella forma (1.3). In questo caso, diventa necessaria la rappresentazione tramite caratteristica di una base.

Un esempio di gruppo non separabile è dato dal reticolo a forma di quincunce (quincunx) $\mathbb{Z}_2^1(d_1, d_2)$, definito dalle seguenti base e caratteristica:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2d_1 & d_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad H = \mathbb{Z}^2.$$

Quindi, il generico punto del reticolo (t_1, t_2) ha coordinate $t_1 = 2d_1h_1 + d_2h_2$ e $t_2 = d_2h_2$, al variare di h_1, h_2 in H .

¹ \mathbb{Q} non compare perché non è un gruppo abeliano localmente compatto.

Proposizione 1. Se G è un reticolo con base \mathbf{G} , allora tutte le basi di G sono della forma \mathbf{GE} , dove \mathbf{E} è una matrice tale che $\det \mathbf{E} = \pm 1$

Proposizione 2. La base di un sottoreticolo G di un dato reticolo G_0 si scrive nella forma $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0\mathbf{A}$, dove \mathbf{G}_0 è una base di G_0 e \mathbf{A} è una matrice non singolare a valori in \mathbb{Z} .

Se $|\det \mathbf{A}| = 1$ si ha $G = G_0$, mentre se $|\det \mathbf{A}| > 1$ allora G è un sottoreticolo proprio di G_0 .

Definizione 3. Data una rappresentazione (\mathbf{G}, H) di un gruppo G , il valore assoluto del determinante di una base di G è detto determinante del gruppo.

$$d(G) = |\det G|.$$

Il suo reciproco è detto densità del gruppo, e si scrive

$$\mu(G) = \frac{1}{|\det G|}.$$

A questo punto abbiamo tutte le carte in regola per dare la definizione di segnale:

Definizione 4. Siano I_0 e P due gruppi abeliani, con $P \subseteq I_0$. Un segnale è una funzione

$$s : I_0/P \rightarrow \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

Il modulo P rappresenta la periodicità del segnale, mentre I_0 è il dominio del segnale.

Scriveremo I_0/P e indicheremo i segnali (1.4) nella forma

$$s(t), t \in I_0/P.$$

Periodicità del segnale e gruppi quoziente

Mostriamo in questa sezione che, così come il dominio di un segnale è un gruppo abeliano localmente compatto, anche la periodicità può essere descritta da un sottogruppo abeliano localmente compatto del dominio. Introduciamo la periodicità in modo generale, così da includere l'aperiodicità come un caso degenero.

Sia $s(t)$ un segnale definito sul dominio I_0 , con I_0 gruppo regolare. Diciamo che $s(t)$ è *invariante per traslazione* rispetto a $p \in I_0$ se

$$s_p(t) := s(t - p) = s(t), \quad t \in I_0. \tag{1.5}$$

Abbiamo quindi il seguente

Teorema 2. Sia P_0 un insieme invariante per traslazione per un segnale $s(t)$, $t \in I_0$,

$$P_0 = \{p \in I_0 | s_p = s\}.$$

Allora P_0 è un sottogruppo del dominio I_0 .

Dimostrazione. La quantità p in (1.5) deve appartenere al dominio I_0 del segnale (perché s è un segnale), quindi P_0 deve essere un sottoinsieme di I_0 . Dobbiamo provare che P_0 è un gruppo. Allora P_0 sarà abeliano localmente compatto perché $P_0 \subseteq I_0$. Vediamo per prima cosa che la condizione $s_p(t) = s(t)$ è sempre verificata per $p = 0$, quindi 0 appartiene a P_0 . Se $p \in P_0$, allora $s(t-p) = s(t)$ per ogni t in I_0 ; ponendo $t' = t-p$, otteniamo $s(t') = s(t'+p)$, da cui si ricava $-p \in P_0$. Analogamente, se $p, q \in P_0$, allora $p-q \in P_0$; per quanto detto sopra, anche $p+q \in P_0$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Possiamo allora classificare i segnali nelle tre seguenti categorie:

- Segnali *costanti* se $P_0 = I_0$;
- Segnali *periodici* se $\{0\} \subset P_0 \subset I_0$;
- Segnali *aperiodici* se $P_0 = \{0\}$.

Chiameremo P_0 la *periodicità massimale* del segnale, mentre con il termine *periodicità* ci riferiremo a ogni sottogruppo P di P_0 .

Nella definizione (1.4) avevamo visto che il dominio del segnale era I_0/P , con la condizione P sottogruppo di I_0 , $\{0\} \subset P \subset I_0$. Tale condizione è detta *condizione di compatibilità* del gruppo quoziente I_0/P .

Poiché il dominio di un segnale è un gruppo quoziente, dobbiamo verificare la proprietà di gruppo regolare anche per i gruppi quoziente, al fine di rendere la teoria consistente. Presa la classe $\mathcal{G}(G_0)$ dei sottogruppi abeliani localmente compatti di G_0 , una classe di gruppi quoziente regolari può essere generata secondo il seguente

Teorema 3. Sia G un gruppo abeliano localmente compatto e sia P un gruppo abeliano localmente compatto sottogruppo di G . Allora il gruppo quoziente G/P è abeliano localmente compatto.

cercare una dimostrazione, probabilmente c'è sul Manetti

Da questo teorema, segue

Corollario 1. I gruppi quoziente di \mathbb{R} abeliani localmente compatti sono

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}/\mathbb{O}, \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z}(T), \quad \mathbb{Z}(T) = \mathbb{Z}(T)/\mathbb{O}, \quad \mathbb{Z}(T)/\mathbb{Z}(NT),$$

per $T > 0$.

Per $m > 1$ il discorso è simile: dal teorema precedente, la classe dei gruppi quoziente regolari è

$$\mathcal{Q}(\mathbb{R}^m) = \{G/P \mid P \subset G, P, G \subset \mathcal{G}(\mathbb{R}^m)\},$$

dove entrambi G e P sono generati dalle rappresentazioni $(\mathbf{G}, H) \rightarrow G$ e $(\mathbf{P}, K) \rightarrow P$ definite in (1.1). Inoltre, assumeremo sempre che G abbia dimensione m e che P sia un insieme discreto, di dimensione minore o uguale a m . *troppo stringato, rivedere*

1.2 Celle elementari

A grandi linee, una cella è un sottoinsieme di un gruppo G tale che le sue copie traslate formano una copertura senza sovrapposizioni di G . Più precisamente:

Definizione 5. *Sia G un gruppo abeliano, C e P sottoinsiemi non vuoti di G . L'insieme C è una **cella** di G modulo P se le sue copie traslate, ovvero gli insiemi*

$$C + p = \{c + p \mid c \in C\},$$

rappresentano una partizione di G , cioè

$$(C + p) \cap (C + q) = \emptyset, \quad p \neq q, p, q \in P,$$

$$\bigcup_{p \in P} (C + p) = G.$$

Le celle vengono denotate² come $[G/P]$ e l'insieme P viene anche chiamato *insieme dei centri di ripetizione*. Inoltre la partizione del gruppo G può essere scritta in modo sintetico come

$$[G/P] + P = G.$$

Notiamo che, se C è una cella, allora lo sono anche tutte le traslate $C + p_0$ di C , per ogni $p_0 \in G$ e, in particolare, per $p_0 \in P \subset G$. Inoltre per ogni coppia (G, P) , la partizione in celle elementari non è unica. Infine se $P = \{0\}$, l'unica cella è $C = G$.

Proposizione 3. *Se C è una cella di G modulo P , allora anche P è una cella di G modulo C .*

Dimostrazione. Dalla definizione di cella, vediamo che

$$G = \bigcup_{p \in P} (C + p) = \bigcup_{c \in C} \bigcup_{p \in P} (c + p) = C + P$$

²Questa notazione non identifica tanto una cella specifica, quanto una *classe* di celle. Ad esempio $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}(T_p)]$ può essere identificato come $[0, T_p)$ oppure $[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p)$, o qualsiasi altro intervallo di lunghezza T_p

da cui segue che c'è una simmetria tra la cella C e il modulo P . \square

Ci sono due tipi di celle: quelle aperiodiche e quelle periodiche. Entrambi i tipi sono fondamentali nella teoria dei segnali.

Le celle aperiodiche sono quelle per cui P è un sottogruppo di G . Un esempio è dato dall'intervallo $[0, 1)$ su \mathbb{R} modulo \mathbb{Z} , ovvero $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}] = [0, 1)$. Un secondo esempio è dato dalla coppia $G = \mathbb{Z}(T)$, $P = \mathbb{Z}(4T)$, in cui una cella è data da $C = \{0, T, 2T, 3T\}$. Infatti basta traslare C sui centri di ripetizione del tipo $4kT$ per ricoprire tutto $\mathbb{Z}(T)$.

Le celle periodiche sono quelle in cui P è esso stesso una cella aperiodica, tipicamente di cardinalità finita. Per chiarire meglio, diamo la seguente

Definizione 6. *Un sottoinsieme A di un gruppo G è periodico con periodicità P se A è invariante rispetto ai traslati di P , ovvero se $A + p = A$, per ogni p in P .*

La periodicità può anche essere scritta come $A + P = A$. È conveniente introdurre le celle periodiche a partire da tre gruppi tali che:

$$P \subset P_0 \subset G.$$

Questo tipo di suddivisione ci dà una partizione in celle aperiodiche come segue:

$$G = [G/P_0] + P_0, \quad G = [G/P] + P, \quad P_0 = [P_0/P] + P.$$

Combinando la prima e l'ultima, otteniamo

$$G = [G/P_0] + [P_0/P] + P, \tag{1.6}$$

quindi la cella $C = [G/P_0] + P$ ha, per costruzione, periodicità P e verifica la condizione $G = C + R$, con $R = [P_0/P]$, e pertanto C è una cella periodica con centri di ripetizione R .

Vediamo infine il collegamento tra una cella aperiodica $[I_0/P]$ e la rappresentazione di un segnale tramite un gruppo quoziente I_0/P .

Un segnale $s(t)$, $t \in I_0/P$, deve essere definito su tutto il dominio I_0 . Possiamo però sfruttare la sua periodicità in modo da limitarci alla definizione di $s(t)$ su una cella $C = [I_0/P]$. Questo ci permette di ottenere $s(t)$ su tutte le celle $C + p$ secondo la relazione

$$s(t + p) = s(t) \quad t \in C, \quad p \in P,$$

e poiché le celle $C + p$ ricoprono tutto I_0 , il segnale è automaticamente definito su tutto il dominio.

In conclusione, la descrizione di un segnale rappresentato su un gruppo quoziente I_0/P può essere limitata a una cella $[I_0/P]$. Nel caso limite $P = \{0\}$, otteniamo

$$C = [I_0/\{0\}] = I_0$$

e di conseguenza la specifica del segnale deve essere per forza su tutto il dominio I_0 .

Sui quozienti di \mathbb{R} le celle assumono in generale la forma di intervalli. Ad esempio, per le celle $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}(T_p)]$ si ha $[t_0, t_0 + T_p)$ o $(t_0, t_0 + T_p]$, con t_0 arbitrario. Possiamo trovare anche celle che non sono connesse, come ad esempio $[0, \frac{1}{2}T_p) \cup [\frac{3}{2}T_p, 2T_p)$ che è dato dall'unione di due intervalli disgiunti, ma rappresenta una cella $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}(T_p)]$.

Nel caso del quoziente $\mathbb{Z}(T)/\mathbb{Z}(NT)$, le celle sono date da insiemi di N punti consecutivi di $\mathbb{Z}(T)$

$$\{n_0T, (n_0 + 1)T, \dots, (n_0 + N - 1)T\}$$

con $n_0 \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Possiamo anche trovare celle che non sono costituite da punti consecutivi: è il caso dell'insieme

$$\mathbb{Z}(T)/\mathbb{Z}(5T) = \{2T, 4T, 5T, 6T, 8T\}$$

che è una cella, così come $\{0, T, 2T, 3T, 4T\}$

Il caso \mathbb{R}^m comprende le celle della forma $[\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m)$ e $[\mathbb{R}^m/(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{O}^q))$ con $p + q = m$. Queste sono dette *celle primitive*, dalle quali otteniamo altre celle del tipo $[\mathbb{R}^m/L)$ con L un arbitrario sottoreticolo di \mathbb{R}^m , e altri generi di celle. Per proseguire abbiamo bisogno della seguente

Proposizione 4. *Se $C_1 = [G_1/P_1)$ e $C_2 = [G_2/P_2)$ sono delle celle dei gruppi G_1 e G_2 , allora il prodotto cartesiano $C_1 \times C_2$ è una cella di $G_1 \times G_2/P_1 \times P_2$:*

$$[G_1/P_1) \times [G_2/P_2) = [G_1 \times G_2/P_1 \times P_2).$$

Segue che $[\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m) = [\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m = [0, 1)^m$, dove $[0, 1)$ è un rappresentante della cella $[\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Quindi una cella $[\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m)$ è data dal cubo m -dimensionale $[0, 1)^m$.

Nel caso delle celle $[\mathbb{R}^m/(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{O}^q))$, dove $p + q = m$, è sufficiente notare che $\mathbb{R}/\mathbb{O} = \mathbb{R}$, pertanto:

$$[\mathbb{R}^m/(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{O}^q)) = [\mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p) \times [\mathbb{R}^q/\mathbb{O}^q) = [0, 1)^p \times \mathbb{R}^q$$

Che può essere interpretata come striscia multidimensionale.

Nel caso di un reticolo L di dimensione m in \mathbb{R}^m , poiché L è isomorfo a \mathbb{Z} tramite l'isomorfismo $t = \mathbf{L}k$, per k in \mathbb{Z}^m e \mathbf{L} base di L , si ha che:

$$[\mathbb{R}^m/L) = \{\mathbf{L}h | h \in [0, 1)^m\} \quad (1.7)$$

e tale insieme viene detto *parallelepipedo fondamentale*. Se la dimensione di L è minore di m , la sua caratteristica sarà $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{O}^q$, con $p + q = m$. Allora la cella assumerà la forma

$$[\mathbb{R}^m/L) = \{\mathbf{L}h | h \in [0, 1)^p \times \mathbb{R}^q\}. \quad (1.8)$$

Osserviamo che la misura delle celle del tipo (1.7) è data dal determinante di L , ovvero:

$$mis([\mathbb{R}/L]) = |\det(L)| = d(L),$$

mentre le celle (1.8) hanno misura infinita.

Dalle celle $[\mathbb{R}^m/L]$ possiamo ottenerne altre della forma generale $[G/L]$, dove G è un qualsiasi sottogruppo di \mathbb{R}^m che contiene L . Per proseguire abbiamo bisogno di sapere come si comporta l'intersezione di un gruppo con una cella.

Proposizione 5. *Sia G un sottogruppo del gruppo G_0 e sia $C_0 = [G_0/P]$, con P sottoinsieme di G . Allora l'intersezione*

$$C = G \cap C_0 = [G/P]$$

è una cella di G modulo P .

Da questa proposizione, segue che da una cella di \mathbb{R}^m possiamo trovare una cella di G per intersezione, per ogni gruppo G che contiene L :

$$C_0 = [\mathbb{R}^m/L] \Rightarrow C = G \cap C_0 = [G/L].$$

Il caso più interessante si ottiene quando G e L sono reticoli: si ha infatti che la cella $[G/L]$ è ottenuta dall'intersezione di G con il parallelepipedo fondamentale $[\mathbb{R}^m/L]$ e ha cardinalità finita, data da

$$N = mis([G/L]) = \frac{|\det(\mathbf{L})|}{|\det(\mathbf{G})|} = \frac{d(L)}{d(G)} = (G : L),$$

dove con $(G : L)$ denotiamo l'indice di L in G .

1.3 L'integrale di Haar

Come detto in precedenza, lo sviluppo della teoria unificata richiede di individuare un operatore lineare, che permetta di introdurre le operazioni fondamentali della teoria dei segnali, quali convoluzione e trasformate di Fourier. Tale operatore è l'integrale di Haar, che verrà denotato nella forma

$$\int dt s(t).$$

Misura di Haar

Definizione 7. *Una **misura di Haar sinistra** (rispettivamente, **destra**) su un gruppo topologico localmente compatto G è una misura boreliana regolare positiva μ invariante a sinistra (rispettivamente, a destra) per la moltiplicazione del gruppo, ovvero tale che³*

$$\mu(hE) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(G), \forall h \in G,$$

³Rispettivamente $\mu(Eh) = \mu(E)$.

dove $\mathcal{B}(G)$ rappresenta gli insiemi boreliani di G .

Se una misura di Haar è invariante sia a sinistra che a destra, si dice *misura di Haar biinvariante*. Poichè nel nostro caso il gruppo è abeliano, non c'è distinzione tra misura destra e misura sinistra, quindi parleremo di misura di Haar senza ulteriori specifiche.

Teorema 4. *Se G è un gruppo abeliano localmente compatto, allora esiste un'unica misura di Haar su G .*

Dimostrazione. □

Introduciamo allora una misura boreliana tramite l'integrale che essa definisce sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto \mathcal{C} . Possiamo di conseguenza definire l'applicazione:

$$I : \mathcal{C}_{c0}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$I(f + g) = I(f) + I(g), \quad I(cf) = cI(f), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}_{c0}(G), c \in \mathbb{R},$$

dove \mathcal{C}_{c0} è l'insieme delle funzioni a supporto compatto non negative. Essendo G un gruppo localmente compatto, I rappresenta esattamente l'integrale di Haar.

Proprietà fondamentali. Esistenza e unicità

L'integrale di Haar ha le stesse proprietà dell'integrale di Lebesgue sulla retta reale, e precisamente:

1. l'integrale è un *operatore lineare*;
2. l'integrale non è identicamente nullo;
3. l'integrale di un segnale reale e non negativo è un segnale reale non negativo;
4. l'integrale è *invariante* rispetto all'operazione di *ribaltamento*, ovvero

$$\int_I dt s(-t) = \int_I dt s(t);$$

5. l'integrale è *invariante* rispetto all'operazione di *traslazione*, ovvero

$$\int_I dt s(t - p) = \int_I dt s(t).$$

Queste regole assicurano che è lecito ogni cambio di variabile del tipo $-t \rightarrow t$ e $t - p \rightarrow t$, di conseguenza, sono lecite anche le loro combinazioni $\pm t \pm p \rightarrow t$.

Il risultato fondamentale riguarda l'esistenza e l'unicità dell'integrale di Haar.

Teorema 5. *Su ogni gruppo abeliano localmente compatto è possibile definire un integrale che verifica le precedenti proprietà. Tale integrale è l'integrale di Haar ed è unico, a meno di una costante moltiplicativa.*

scrivere la dimostrazione

Questo teorema ci permette di identificare l'integrale di Haar nei casi specifici. Ad esempio, l'integrale di Lebesgue su \mathbb{R} verifica tutte le proprietà 1-5 e pertanto è proprio l'integrale di Haar su \mathbb{R} . Per quanto riguarda la costante moltiplicativa, converrà scegliere quella più adeguata in modo da evitare ambiguità.

Se I_0 è un gruppo regolare e P è un sottoreticolo di I_0 , possiamo calcolare l'integrale su I_0 in due fasi, secondo la regola

$$\int_I dt s(t) = \int_{I_0/P} du \sum_{p \in P} s(u - p),$$

e più in generale, per $P \subset P_0 \subset I_0$ e $s(t)$ con periodicità P , si ha

$$\int_{I_0/P} dt s(t) = \int_{I_0/P_0} du \sum_{p \in P_0/P} s(u - p)$$

Nel caso in cui I_0 e P siano reticoli, $P \subset I_0$, è possibile esprimere l'integrale su I_0 in termini dell'integrale su P :

$$\int_{I_0} dt s(t) = \frac{1}{N} \sum_{p \in [I_0/P]} \int_P du s(u + p)$$

dove $N = (I_0 : P) = d(P)/d(I_0)$ è la cardinalità della cella $[I_0/P]$ data dall'indice di P in I_0 .

Estensione e durata di un segnale

Definizione 8. *Il supporto di un segnale $s(t)$, $t \in I_0/P$, ovvero il sottoinsieme di I_0 dove $s(t)$ è diverso da zero,*

$$e_0(s) = \{t | s(t) \neq 0\},$$

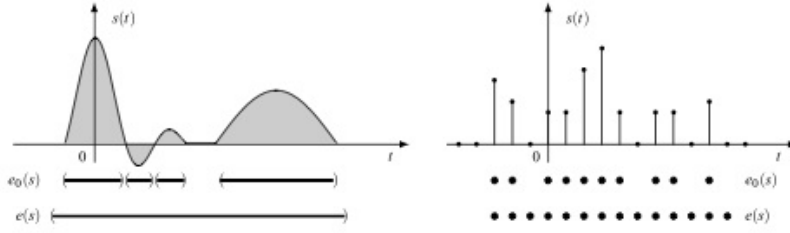
*viene chiamato **estensione minima** del segnale.*

Inoltre, diciamo che ogni sottoinsieme del dominio I_0 che contiene la minima estensione

$$e(s) \supset e_0(s)$$

*è un' **estensione** di $s(t)$. La misura dell'insieme $e(s)$ è detta **durata** del segnale $s(t)$ e si scrive:*

$$D(s) = \text{mis}(e(s)).$$



Osserviamo che per un'estensione $e(s)$ vale $s(t) = 0, t \notin e(s)$, ovvero al di fuori dell'estensione il segnale è zero. Questo non implica che all'interno dell'estensione il segnale sia necessariamente diverso da zero in tutti i punti. L'idea di un'estensione ci permette di migliorare la scelta del dominio e della periodicità del segnale. Infatti, in pratica, il segnale ha un dominio naturale, inteso come insieme sul quale conosciamo i valori del segnale. D'altro canto è obbligatorio scegliere un gruppo come dominio del segnale. Quindi resta il problema di completare la definizione di segnale fuori dal suo dominio naturale. Un modo ovvio per farlo è porre il segnale a zero al di fuori del dominio naturale:

$$s(t) = 0, t \in I_0, t \notin C,$$

con C il dominio naturale e I_0 gruppo abeliano localmente compatto tale che $C \subset I_0$. Abbiamo così ottenuto per costruzione un'estensione finita $e(s) = C$. Un modo alternativo è usare la periodicità per estendere il segnale. In questo caso C dovrà essere una cella di I_0/P , per un certo P . Possiamo allora definire il segnale fuori dal dominio naturale C come

$$s(t+p) = s(t), \quad t \in I_0, p \in P,$$

in modo da ottenere il segnale sul gruppo quoziente I_0/P . Infine, abbiamo la seguente

Proposizione 6. *La classe dei segnali su un dominio I_0 con estensione finita C ha una corrispondenza iniettiva con la classe dei segnali descritta su I_0/P , in cui anche C è una cella di I_0 modulo P .*

Infatti, se $s_0(t)$ è un segnale definito su I_0 con estensione C , la ripetizione periodica

$$s(t) = \sum_{p \in P} s_0(t-p)$$

fornisce un segnale con periodicità P . Viceversa, da $s(t)$ possiamo ottenere $s_0(t)$ moltiplicando $s(t)$ per la funzione indicatrice della cella C , ovvero

$$s_0(t) = s(t)\chi_C(t).$$

Convoluzione e impulsi

Definizione 9. La convoluzione $x * y$ di due segnali x e y , definiti sullo stesso gruppo I , è un segnale ancora definito su I che al generico istante t in I è dato dall'integrale

$$x * y = \int_I x(t-u)y(u) du. \quad (1.9)$$

La classe dei segnali assolutamente integrabili, ossia lo spazio $L_1(I)$, forma un'algebra commutativa di Banach se il prodotto è definito dalla convoluzione⁴. Segue che l'algebra della convoluzione su I ha un elemento unitario $\delta(t)$ se e solo se il gruppo I è discreto. Possiamo allora estendere le proprietà della funzione $\delta(t)$ su tutta la classe dei segnali $\mathcal{S}(I)$. Il segnale di $\mathcal{S}(I)$ con le stesse proprietà sarà denotato con $\delta_I(t)$. Quindi se I è discreto, abbiamo, per ogni segnale $s(t)$, t in I ,

$$s(t) * \delta_I(t) = s(t).$$

L'elemento che verifica tale uguaglianza verrà chiamato *impulso ideale*. Se I non è discreto, un tale segnale δ_I non esiste come funzione, ma può essere definito come una distribuzione.

Infine vediamo che moltiplicando il segnale $s(t)$ per l'impulso ideale applicato all'istante t_0 e integrando, si "rivela" il valore del segnale nello stesso istante:

$$\int_I s(t)\delta_I(t-t_0) dt = s(t_0). \quad (1.10)$$

Questa proprietà è detta *proprietà rivelatrice*.

1.4 Trasformata di Fourier

Introduciamo in questo capitolo la trasformata di Fourier usando l'integrale di Haar:

$$S(f) = \int_I dt s(t)\psi^*(f,t), \quad f \in \hat{I},$$

La trasformata sposta l'analisi del segnale dal suo dominio I al dominio delle frequenze \hat{I} . L'elemento $\psi^*(f,t)$ è il *nucleo* della trasformata. Inoltre, dalla trasformata possiamo ricavare il segnale $s(t)$ attraverso l'antitrasformata:

$$s(t) = \int_{\hat{I}} df S(f)\psi(f,t), \quad t \in I,$$

⁴Questo segue dalle proprietà commutativa, associativa e distributiva della convoluzione e dalla disuguaglianza $\|x * y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

dove $\psi(f, t)$ è il nucleo dell'antitrasformata, nonché il coniugato di $\psi^*(f, t)$. Tale nucleo è ottenuto imponendo le condizioni di separabilità e la condizione di modulo unitario

$$\begin{aligned}\psi(f, t_1 + t_2) &= \psi(f, t_1)\psi(f, t_2) \\ \psi(f_1 + f_2, t) &= \psi(f_1, t)\psi(f_2, t) \\ |\psi(f, t)| &= 1.\end{aligned}$$

Osserviamo che, per una frequenza f fissata, ogni funzione $\psi(f, t)$ che verifica le condizioni suddette, è detta un *carattere* del gruppo I e l'insieme di tutti i caratteri identifica il nucleo della trasformata di Fourier sul gruppo I . Inoltre, l'insieme di variabilità di f identifica il dominio delle frequenze \hat{I} , che è detto gruppo *duale*. Esso ha la stessa struttura del gruppo quoziente I_0/P su cui abbiamo definito il segnale:

$$\hat{I} = I_{0f}/P_f$$

dove chiamiamo I_{0f} dominio della frequenza e P_f periodicità della frequenza. La relazione tra il gruppo $I = I_0/P$ e il suo duale $\hat{I} = I_{0f}/P_f$ passa attraverso la definizione di gruppo reciproco.

Definizione 10. Il *reciproco* J^* di un gruppo J è un gruppo definito dal nucleo $\psi(f, t)$ come

$$J^* = \{f | \psi(f, t) = 1, t \in J\}.$$

Inoltre il gruppo reciproco è un gruppo abeliano localmente compatto. Da questo, possiamo facilmente ottenere il gruppo duale secondo il

Teorema 6. *Nel duale \hat{I} di un gruppo quoziente I_0/P , il dominio è dato dal reciproco della periodicità, mentre la periodicità è data dal reciproco del dominio*

$$I = I_0/P \longrightarrow \hat{I} = P^*/I_0^* \quad (1.11)$$

Questo teorema è anche noto come *Teorema della Dualità di Pontryagin*.

Dimostrazione. Proviamo che se la funzione $\psi(f, t)$, con f fissato, è definita su I_0 e ha periodicità P , allora la funzione $\psi(f, t)$, con t fissato, è definita su P^* con periodicità I_0^* . La periodicità di $\psi(f, t)$ ci dice che $\psi(f, t + u) = \psi(f, t)$, con $u \in P$, e ricordando le proprietà di separazione, si ha

$$\psi(f, u) = 1, \quad u \in P. \quad (1.12)$$

Quindi, ogni frequenza f che soddisfa (1.12) assicura la periodicità P rispetto al dominio di u . L'insieme di queste frequenze è il reciproco di P ,

$$P^* = \{f | \psi(f, u) = 1, u \in P\},$$

che definisce il dominio del nucleo rispetto alla frequenza f .

Analogamente, la possibile periodicità della funzione $\psi(f, t)$ rispetto a f è espressa dalla condizione $\psi(f + v, t) = \psi(f, t)$, $t \in I_0$, che è equivalente a $\psi(v, t) = 1$ per $t \in I_0$. Le frequenze v che verificano questa condizione, costituiscono il reciproco di I_0 e, di conseguenza, la periodicità del gruppo duale è data da I_0^* . \square

Osserviamo che poiché fare il reciproco $(J^*)^*$ del gruppo reciproco J^* ci riporta al gruppo originale J , essendo il gruppo duale definito dal gruppo reciproco, anche il duale del duale riporta al gruppo originale:

$$\hat{\hat{I}} = I \tag{1.13}$$

Simmetria tra segnali e trasformate di Fourier

Per un dato gruppo I , la classe $\mathcal{S}(I)$ dei segnali definiti su I , può essere interpretata anche come una classe di trasformate di Fourier dei segnali con dominio I . Infatti, dato un segnale con dominio I , dalla relazione (1.13) segue che possiamo considerare I come il dominio delle frequenze dei segnali definiti su \hat{I} .

Come abbiamo definito estensione e durata di un segnale, possiamo definire simmetricamente lo *spettro* e la *larghezza di banda*.

Definizione 11. *Definiamo spettro di un segnale $s(t)$, $t \in I$, come l'estensione della sua trasformata di Fourier $S(f)$, $f \in \hat{I}$:*

$$\mathcal{E}(s) := e(S). \tag{1.14}$$

La misura di Haar di $\mathcal{E}(s)$ definisce la larghezza di banda di $s(t)$:

$$B(s) = \text{mis}(\mathcal{E}(s)).$$

Come per le estensioni dei segnali, distingueremo tra spettro *minimo*, data da $\mathcal{E}_0(s) = \{f | S(f) \neq 0\}$, e lo spettro generale $\mathcal{E}(s)$, definito come ogni sottoinsieme di \hat{I} contenente $\mathcal{E}_0(s)$.

Dalle definizioni di durata e di banda di un segnale, segue che *più corta è la durata di un segnale, più lunga è la sua banda*, e viceversa. (spiegare meglio la relazione tra i due)

1.5 Trasformazioni sui segnali

D'ora in poi, considereremo segnali complessi definiti su una coppia dominio/periodicità.

Definizione 12. Una *trasformazione di segnali* è una terna

$$(I, U, \varphi),$$

dove

- I è il dominio dei segnali all'ingresso;
- U è il dominio dei segnali in uscita;
- φ è il funzionale che a partire dal segnale d'ingresso x nella classe dei segnali in $\mathcal{S}(I)$ dà il segnale in uscita y nella classe dei segnali in $\mathcal{S}(U)$

La definizione così data è molto generale: infatti i domini I e U possono essere gruppi di qualsiasi natura, anche diversi tra loro. Nel caso generale, sono definiti come i gruppi quoziente

$$I = I_0/P_1, \quad U = U_0/P_2,$$

dove I_0 e U_0 sono i domini, mentre P_1 e P_2 le periodicità. Anche le dimensioni possono essere diverse, per cui si possono avere un segnale m -dimensionale in ingresso e uno n -dimensionale in uscita. Inoltre possiamo avere dei segnali di tipo *vettoriale*, cioè con M componenti in ingresso e N componenti in uscita. Trasformazioni di questo tipo sono dette *trasformazioni vettoriali*.

Trasformazioni lineari, quasi-invarianti e ideali

Le trasformazioni lineari costituiscono la classe più importante delle trasformazioni. In generale, una trasformazione lineare $I \rightarrow U$ ha la seguente rappresentazione integrale:

$$y(t) = \int_I h(t, u)x(u) du \quad t \in U \quad (1.15)$$

dove il nucleo $h(t, u)$ è una funzione complessa, $h : I \times U \rightarrow \mathbb{C}$, che caratterizza la trasformazione. Il nucleo $h(t, u)$ della trasformazione lineare ha il seguente significato: applicando l'impulso ideale $\delta_I(u - u_0)$ all'ingresso della trasformazione e utilizzando la proprietà rivelatrice (1.10), si trova

$$\varphi[\delta_I(\cdot - u_0)|t] = h(t, u_0), \quad (1.16)$$

ovvero $h(t, u_0)$ rappresenta la risposta in uscita al tempo t quando all'ingresso si applica l'impulso ideale all'istante u_0 . La notazione (1.16) rappresenta la relazione ingresso/uscita della trasformazione, e in particolare indica il valore della risposta in uscita al tempo t .

Definizione 13. Una trasformazione lineare $I \rightarrow U$ si dice **quasi invariante** se il nucleo è esprimibile nella forma

$$h(t, u) = g(t - u), \quad t \in U, u \in I \quad (1.17)$$

cioè se dipende soltanto dalla differenza tra gli argomenti.

La relazione di ingresso/uscita⁵ di una trasformazione lineare quasi-invariante è, al variare di t in U ,

$$y(t) = \int_I g(t - u)x(u) du. \quad (1.18)$$

La funzione $g(t)$ viene chiamata *risposta impulsiva*, e la sua trasformata di Fourier $G(f)$ è detta risposta in frequenza (frequency response). Una sottoclasse delle trasformazioni lineari quasi-invarianti è costituita dalle trasformazioni la cui risposta impulsiva è data dall'impulso ideale:

$$g(t) = \delta_E(t),$$

dove E è il dominio della risposta impulsiva $g(t)$. Queste trasformazioni prendono il nome di *trasformazioni ideali*. La relazione ingresso/uscita è un caso particolare della formula (1.18) e le sue proprietà variano a seconda del dominio E .

$$y(t) = \int_I \delta_E(t - u)x(u) du. \quad (1.19)$$

Ad esempio, se $E = I$, allora si applica la proprietà rivelatrice e si ottiene $y(t) = x(t)$, cioè la trasformazione ideale rappresenta l'identità. Il dominio e la periodicità della risposta impulsiva sono definiti rispettivamente come

$$E_0 = I_0 + U_0, \quad P = P_1 + P_2,$$

dove I_0 e U_0 sono i domini dei segnali in entrata e in uscita rispettivamente, e P_1 e P_2 sono le periodicità. Inoltre, essendo I_0 e U_0 gruppi abeliani localmente compatti, segue che anche E_0 è un gruppo abeliano localmente compatto. Pertanto la risposta impulsiva ha come dominio

$$E = E_0/P = (I_0 + U_0)/(P_1 + P_2) := I + U.$$

A questo punto, possiamo osservare che le trasformazioni lineari quasi-invarianti coinvolgono tre domini: i domini esterni I e U e il dominio interno E , che è anche quello più grande, in quanto contiene gli altri due. La trasformazione parte da I e arriva in U , passando per E , e per ogni passaggio possiamo avere un cambio di dominio/periodicità.

⁵Nonostante la somiglianza, tale relazione è una convoluzione solo quando i domini sono uguali.

Il caso più semplice si ha quando i gruppi sono tutti uguali:

$$I_0 = E_0 = U_0, \quad P_1 = P = P_2;$$

si ha invece una situazione più complessa nel caso in cui

$$I_0 \neq E_0 \neq U_0, \quad P_1 \neq P \neq P_2.$$

Definiamo allora la *complessità di dominio* di una trasformazione lineare quasi-invariante come il numero di insiemi diversi che entrano in gioco in una trasformazione. (questa cosa si può decisamente dire meglio.) Possiamo allora dare la definizione di trasformazione elementare.

Definizione 14. Una trasformazione *elementare* è una trasformazione ideale con un'unica complessità di dominio.

Poiché solo uno dei quattro insiemi coinvolti può essere diverso dagli altri, questo ci dà la possibilità di avere quattro trasformazioni elementari possibili.

- Campionamento decrescente o down-sampling: $I_0 \supset U_0$, $P_1 = P_2$.

Il campionamento decrescente è una trasformazione decrescente, tale che $E = I$. Dalla formula (1.19) segue che $y(t) = x(t)$ per t in U . Questo implica che il segnale in uscita y è equivalente al segnale in ingresso x , ma tale uguaglianza è ristretta solo al dominio di uscita.

- Campionamento crescente o up-sampling: $I_0 \subset U_0$, $P_1 = P_2$.

Questa trasformazione determina un aumento del dominio. La relazione (1.19) rimane la stessa, solo che in questo caso abbiamo $E = U$.

- Up periodization: $I_0 = U_0$, $P_1 \subset P_2$

In questo caso, la trasformazione produce un segnale periodico da un aperiodico o, a partire da un segnale con una certa periodicità, produce un segnale con una periodicità maggiore (nel senso di più ampia). In generale, la relazione ingresso/uscita è data da

$$y(t) = \int_{I_0/P_1} \delta_{I_0/P_2}(t-u)x(u) du \quad t \in I_0/P_2. \quad (1.20)$$

In particolare, possiamo usare il fatto che l'impulso su un gruppo quoziente è dato da

$$\delta_{I_0/P}(t) = \sum_{p \in P} \delta_{I_0}(t-p);$$

inoltre se P è un sottogruppo di P_0 , possiamo scrivere

$$\delta_{I_0/P}(t) = \sum_{p \in [P_0/P]} \delta_{I_0/P}(t-p).$$

Segue che possiamo applicare la proprietà rivelatrice e ottenere

$$y(t) = \sum_{p \in [P_2/P_1]} x(t-p), \quad (1.21)$$

dove la cella $[P_2/P_1]$ fornisce i centri di ripetizione.

- Down-periodization: $I_0 = U_0$, $P_1 \supset P_2$.

In questo caso, $E = I$, da cui segue che la trasformazione $I \rightarrow U$ ha la seguente relazione

$$y(t) = \int_I \delta_I(t-u)x(u) = x(t), \quad t \in I_0/P_2 = U.$$

Infine, osserviamo che non possiamo *invertire* il campionamento decrescente e l'up-periodization, ovvero non possiamo recuperare il segnale in ingresso dopo tali trasformazioni elementari. Nel primo caso, alcune informazioni in ingresso vengono perse in uscita; nel secondo, l'aumentare della periodicità non permette il recupero del segnale.

Vogliamo ora enunciare il teorema di dualità per trasformazioni. Per farlo abbiamo però bisogno di qualche premessa sui domini I , U ed E coinvolti. Per prima cosa, facciamo caso all'ordinamento: passando al duale, infatti, i contenimenti si ribaltano, ovvero

$$I \supset U \xrightarrow{\text{duale}} \hat{I} \subset \hat{U},$$

e viceversa. Successivamente, notiamo che il passaggio al duale *scambia* le relazioni di somma e intersezione tra insiemi:

$$E = I + U \xrightarrow{\text{duale}} \hat{I} \cap \hat{U}, \quad I \cap U \xrightarrow{\text{duale}} \hat{I} + \hat{U} = E_f$$

Infine diciamo che se (I_1, I_2) è una coppia di gruppi abeliani localmente compatti tali che $I_1 \cap I_2$ e $I_1 + I_2$ sono anch'essi gruppi abeliani localmente compatti, allora

$$\int_{I_1 \cap I_2} ds \delta_{I_1}(t-s)\delta_{I_2}(s-u) = \delta_{I_1+I_2}(t-u), \quad t \in I_1, u \in I_2$$

e la chiamiamo *identità nobile* (noble identity).

Possiamo ora enunciare il *Teorema di Dualità per trasformazioni*:

Teorema 7. *Il duale della trasformazione ideale $I \rightarrow U$ è la trasformazione ideale $\hat{I} \rightarrow \hat{U}$.*

Dimostrazione. L'identità nobile ci permette di scrivere il nucleo della trasformazione (1.15) come

$$h(t, u) = \delta_E(t-u) = \int_{I \cap U} ds \delta_U(t-s)\delta_I(s-u).$$

A questo punto, osserviamo che il duale di una trasformazione $I \rightarrow U$ lineare con nucleo $h(t, u)$, è una trasformazione lineare $\hat{I} \rightarrow \hat{U}$ con nucleo

$$\hat{h}(f, \lambda) = \int_U dt \int_I du e^{i2\pi ft} \delta_U(t - s) \delta_I(s - u) e^{-i2\pi \lambda u}.$$

A questo punto, dobbiamo usare la proprietà rivelatrice due volte. Questo ci permette di trascurare(drop) i primi due integrali ponendo $t = s$ e $s = u$, ovvero

$$\hat{h}(f, \lambda) = \int_{I \cap U} ds e^{-i2\pi(f-\lambda)s}.$$

Infine, usando le condizioni di ortogonalità della trasformata otteniamo

$$\hat{h}(f, \lambda) = \delta_{\widehat{I \cap U}}(f - \lambda) = \delta_{\hat{I} + \hat{U}}(f - \lambda).$$

Abbiamo così ottenuto il nucleo della trasformazione ideale $\hat{I} \rightarrow \hat{U}$. \square

Per le trasformazioni elementari vale

Corollario 2. *Il duale di una trasformazione elementare $I \rightarrow U$ è una trasformazione elementare $\hat{I} \rightarrow \hat{U}$.*

1.6 Teorema di campionamento

Tratteremo in questa parte solo della ricostruzione di segnali dopo un campionamento decrescente. Per prima cosa, ci serve trovare delle *condizioni di equivalenza* per i segnali. Il caso ideale consiste nell'esatta ricostruzione del segnale $s(t)$, ovvero, dato $s_0(t)$ il segnale finale, vorremmo avere

$$s_0(t) = s(t), \quad t \in I.$$

Questa condizione è però troppo restrittiva, in quanto implica che sia imposta su ogni segnale, definito sul dominio I . Possiamo però imporre una condizione più debole, e cioè

$$s_0(t) = s(t), \quad t \in I, s \in S_c(t),$$

dove $S_c(t)$ è una sottoclasse di segnali a banda limitata di $\mathcal{S}(I)$. Di conseguenza, il nostro obiettivo diventa trovare una identità parziale/condizionale (conditional identity).

Possiamo anche accettare una condizione in una forma più rilassata

$$s_0(t) = A_0 s(t - t_0), \quad t \in I, s \in S_c(I), \quad (1.22)$$

ovvero per ricostruire il segnale possiamo considerare una traslazione e una omotetia del segnale finale. La (1.22) è detta *condizione di Heaviside*.

Interpolazione

Per poter ricostruire il segnale dai campionamenti ottenuti occorre utilizzare un'interpolazione.

Definizione 15. Una interpolazione è una trasformazione lineare quasi-invariante crescente, in cui I è un sottogruppo di U e $E = U$, che esegue due operazioni differenti:

1. Un campionamento crescente da I in U : $I \rightarrow U$;
2. Applica un filtro al dominio in uscita U .

Un filtro è una trasformazione lineare in cui i domini coincidono⁶.

In particolare, abbiamo che il dominio I è spesso un dominio discreto, mentre U è un dominio continuo. Più in generale, l'interpolazione porta il segnale in un dominio più denso rispetto a quello di partenza.

L'interpolazione di un segnale non è unica, ma dipende dalla scelta della funzione interpolatrice $g_0(t) = d(I)g(t)$, con $g(t)$ risposta impulsiva. Vogliamo fare questa scelta in modo da conservare i valori iniziali del segnale nel risultato finale. Questa condizione di integrità viene chiamata *condizione di corretta interpolazione*. Nel caso di un'interpolazione da un insieme J a un insieme I , questa condizione si scrive come

$$\tilde{s}(t) = s(t), \quad t \in J.$$

Possiamo anche stabilire la condizione di interpolazione in termini di risposta impulsiva, o di risposta in frequenza, dell'interpolazione. Nel primo caso, la versione campionata della risposta impulsiva deve coincidere con l'impulso ideale su J , ovvero $g(t) = \delta_J(t)$. Nel secondo caso, la ripetizione periodica della risposta in frequenza deve essere unitaria, vale a dire

$$\sum_{p \in J_0^*/I_0^*} G(f - p) = 1.$$

Analizziamo ora il comportamento di un campionamento decrescente $I \rightarrow J$ seguito da un'interpolazione $J \rightarrow I$, dove I e J sono arbitrari gruppi quoziente, tali che

$$I = I_0/P \quad J = J_0/P, \quad J_0 \subset I_0,$$

in modo da arrivare a enunciare il teorema di campionamento unificato. La relazione di campionamento è

$$s_c(t) = s(t), \quad t \in I,$$

⁶Questo è il motivo per cui $E = U$.

con $s(t)$ il segnale originale e $s_c(t)$ il segnale campionato, verifica una restrizione dal dominio I_0 al dominio J_0 . Se P è la periodicità, i tre gruppi che stiamo considerando devono verificare la relazione

$$P \subset J_0 \subset I_0.$$

La relazione ingresso/uscita dell'interpolazione $J \rightarrow I$ è data da

$$\tilde{s}(t) = \int_J g(t-u)s_c(u) du, \quad t \in I \quad (1.23)$$

dove la risposta impulsiva $g(t)$ è definita sul dominio in ingresso I . In particolare, se J è discreto, nella relazione (1.23) possiamo sostituire l'integrale con una sommatoria e inoltre, usando la relazione di campionamento, possiamo sostituire $s_c(t)$ con s .

$$\tilde{s}(t) = \sum_{u \in J} s(u)g_0(t-u), \quad t \in I.$$

Dal teorema di dualità, abbiamo che il campionamento decrescente, diventa una up-periodization da $\hat{I} = P^*/I_0^*$ in $\hat{J} = P^*/J_0^*$. Inoltre la relazione di campionamento diventa

$$S_c(f) = \sum_{p \in R} S(f-p)G(f), \quad f \in \hat{I},$$

dove $R = [J_0^*/I_0^*)$ è l'insieme dei centri di ripetizione. La relazione di interpolazione è data da

$$\tilde{S}(f) = G(f)S_c(f), \quad f \in \hat{I},$$

dove $G(f)$ è la risposta in frequenza. Segue che

$$\tilde{S}(f) = \sum_{p \in R} S(f-p)G(f), \quad f \in \hat{I}.$$

Enunciamo allora il **Teorema di Campionamento Unificato**

Teorema 8. *Sia $s(t)$, t in I , un segnale campionato in modo decrescente da $I_0/P \rightarrow J_0/P$. Se lo spettro del segnale è limitato*

$$e(S) \subset C_0,$$

con C_0 un'opportuna cella elementare del dominio della frequenza, il segnale può essere esattamente ricostruito mediante un filtro interpolatore $J \rightarrow I$, la cui risposta in frequenza è data dalla funzione indicatrice della cella elementare C_0 .

Dimostrazione. Consideriamo il termine $S(f - p)$. La sua estensione è data da

$$e(S) + p, \quad p \in R = [J_0^*/I_0^*],$$

e inoltre vale la condizione

$$e(S) \cap (e(S) + p) = \emptyset, \quad p \neq 0, p \in R. \quad (1.24)$$

D'altro canto, notiamo che l'up-periodization $P^*/I_0^* \rightarrow P^*/J_0^*$ identifica una partizione di celle di P^* modulo R . Detta C_0 la cella di riferimento di tale partizione, abbiamo per definizione che

$$C_0 \cap (C_0 + p) = \emptyset, \quad p \neq 0, p \in R,$$

e pertanto se lo spettro $e(S)$ è contenuto⁷ in C_0 , $e(S) \subset C_0$, la condizione (1.24), detta di *non aliasing*, risulta verificata.

Per la ricostruzione della trasformata di Fourier, l'interpolazione deve essere scelta con risposta in frequenza data dalla funzione indicatrice della cella C_0 :

$$Q(f) := \chi_{C_0}(f) = \begin{cases} 1 & f \in C_0 \\ 0 & f \notin C_0. \end{cases}$$

In questo modo $\tilde{S}(f)$ è data da

$$\tilde{S}(f) = \sum_{p \in R} Q(f)S(f - p),$$

dove, dalla condizione di non aliasing, abbiamo

$$Q(f)S(f - p) = \begin{cases} S(f) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0. \end{cases}$$

Da questo segue l'esatta ricostruzione della trasformata di Fourier, $\tilde{S}(f) = S(f)$. Infine, usando l'antitrasformata, siamo in grado di ottenere l'esatta ricostruzione del segnale

$$\tilde{s}(t) = s(t), \quad t \in I.$$

□

⁷Questa condizione è la forma generale della limitazione di banda.

Capitolo 2

Acquisizione e trasmissione di immagini

2.1 Acquisizione di un'immagine

Definizione 16. *Un'immagine è una rappresentazione grafica di valori numerici. In dettaglio, un'immagine è una funzione $l(x, y)$, dove (x, y) prende valori in \mathbb{R}^2 e definisce la posizione dei punti nell'immagine. In genere, diciamo che $l(x, y)$ è un valore reale che definisce l'intensità nell'immagine nel punto (x, y)*

L'intensità dei punti nell'immagine è chiamata *luminanza*.

Un'immagine rappresentata come una funzione in tre dimensioni $l(x, y, t)$ è detta *immagine dinamica*, ovvero è un'immagine che varia nel tempo. Osserviamo che possiamo distinguere tra immagini in scala di grigio e immagini a colori: le prime sono rappresentate da una funzione scalare, mentre le seconde sono rappresentate da una funzione vettoriale di tre componenti, detti canali.

Normalmente un'immagine dinamica assume valori in \mathbb{R}^3 , ovvero, se $l(x, y, t)$ è un'immagine dinamica, le sue coordinate sono continue e illimitate. Nel dominio delle frequenze, l'immagine è rappresentata dalla trasformata di Fourier $L(f_x, f_y, f_t)$, dove f_x e f_y sono le frequenze relative alle coordinate spaziali, mentre f_t è la frequenza temporale.

Cominciamo considerando la forma più semplice di acquisizione continua: quella progressiva (che non sono sicura voglia dire analogica, perché già continua rientra nell'analogico). L'immagine fonte è illimitata nello spazio, perciò la prima operazione da fare è limitare l'immagine a un *frame*. L'immagine viene successivamente campionata temporalmente in *campi* ogni T_q secondi, e ogni campo viene diviso in N righe equidistanti. Infine le righe di ogni campo vengono lette in sequenza in modo da prendere un segnale proporzionale alla luminanza dell'immagine. Il segnale video consiste, quindi, di

repliche del segnale dell'immagine distribuite in modo limitato dal formato linea-campo. Il processo di acquisizione si divide, pertanto, in 3 tappe:

- Il *framing*, ovvero il passaggio da un'immagine illimitata nello spazio a un'immagine limitata a un rettangolo Q .

Tale rettangolo Q è della forma $Q = [0, D_x) \times [0, D_y)$. Osserviamo che, per definire il segnale relativo a $l(x, y, t)$, abbiamo bisogno di un gruppo abeliano localmente compatto, ma Q non lo è. Dobbiamo quindi considerare il più piccolo sottogruppo di \mathbb{R}^3 che contiene Q . Per farlo, abbiamo bisogno di estendere $l(x, y, t)$ a zero al di fuori di Q nel piano (x, y) . Poniamo pertanto:

$$l_Q(x, y, t) = \chi_Q(x, y)l(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3,$$

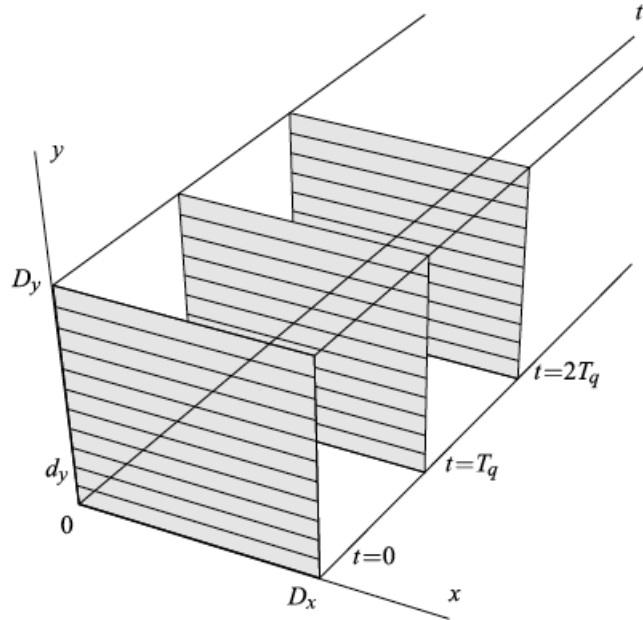
dove χ_Q è la funzione caratteristica di Q .

- La *grating operation* (non so assolutamente come tradurla), che consiste nel campionare temporalmente l'immagine in *campi* ogni T_q secondi, ognuno dei quali viene diviso in N *righe* equidistanti.

In questo modo il dominio dell'immagine è un sottogruppo di \mathbb{R}^3 che ha la forma

$$I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(d_y) \times \mathbb{Z}(T_q), \quad (2.1)$$

detto *grata*, dove $d_y = D_y/N$ è la distanza tra le righe verticali, e T_q rappresenta il periodo per i frame.



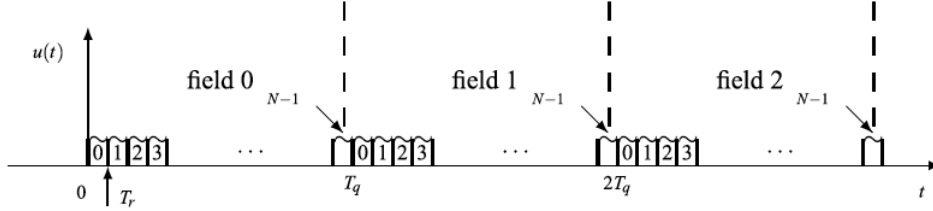
A questo punto, il campionamento decrescente $\mathbb{R}^3 \rightarrow I_S$ restituisce il segnale

$$l_{QS}(x, nd_y, kT_q) = l_Q(x, nd_y, kT_q), \quad (x, nd_y, kT_q) \in I_S$$

- Infine la *lettura*, che porta alla forma finale del segnale video $u(t)$.

Sia N il numero di righe per frame; allora il periodo delle righe e la velocità di lettura sono dati da

$$T_r = T_q/N, \quad v_x = D_x/T_r. \quad (2.2)$$



Per il frame 0, le righe sono lette nel modo seguente:

$$x = v_x(t - nT_r), \quad nT_r < t < (n + 1)T_r.$$

Per il frame successivo, la lettura è effettuata alla stessa maniera, ma avviene con un ritardo di T_q secondi e, in generale, per il frame k il ritardo è di kT_q secondi (non sono proprio sicura che siano secondi). Perciò, la lettura della riga n del frame k comincia al tempo

$$t_{nk} := nT_r + kT_q, \quad 0 \leq n \leq N, k \in \mathbb{Z};$$

la legge del moto per tale riga è

$$\begin{cases} x(t) = v_x(t - t_{nk}), \\ y(t) = nd_y, \end{cases} \quad t \in [t_{nk}, t_{nk} + T_r) := \mathcal{J}_{nk},$$

e produce il contributo del segnale

$$u_{nk}(t) = l(v_x(t - t_{nk}), nd_y, kT_q), \quad t \in \mathcal{J}_{nk}. \quad (2.3)$$

Osserviamo che l'espressione (2.3) assume valori fuori dal frame per t che non appartiene a \mathcal{J}_{nk} . Quindi per ottenere l'espressione corretta per ogni t in \mathbb{R} , è sufficiente rimpiazzare l'immagine illimitata l con l'immagine campionata l_{QS} :

$$u_{nk}(t) = l_{QS}(v_x(t - t_{nk}), nd_y, kT_q), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Questa sostituzione assicura che l'estensione di u_{nk} sia esattamente \mathcal{J}_{nk} .

Il segnale video completo è dato dalla somma di tutti i contributi u_{nk} , ovvero:

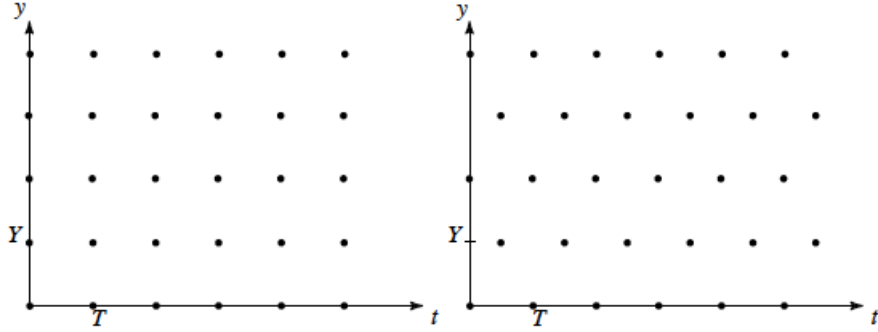
$$u(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_{QS}(v_x(t - t_{nk}), nd_y, kT_q), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo notare che la prima sommatoria può essere estesa da $-\infty$ a $+\infty$, in quanto, dopo la restrizione a l_{QS} , le somme infinite non aggiungono altri contributi. Quindi:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_{QS}(v_x(t - t_{nk}), nd_y, kT_q) \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^2} l_{QS}(v_x(t - nT_r - kT_q), nd_y, kT_q), \end{aligned} \quad (2.5)$$

che rappresenta l'espressione generale per l'acquisizione continua, ossia per t in \mathbb{R} .

Un altro metodo di acquisizione continua riguarda l'acquisizione *intrecciata*; in questo caso vengono prese in considerazione solamente le righe pari per i frame pari e le righe dispari per i frame dispari.



In questo caso la proiezione sul piano (y, t) ci dà il reticolo quince

$$\mathbb{Z}_2^1(d_y, \frac{1}{2}T_q).$$

Di conseguenza, il gruppo di acquisizione è la grata non separabile

$$I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2^1(d_y, \frac{1}{2}T_q).$$

È anche possibile eseguire questo tipo di acquisizione con un'ordine più alto. In generale, il reticolo così fornito dalla proiezione sul piano (y, t) è $\mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f)$, dove $T_f = T_q/i$, e pertanto la grata di acquisizione assume la seguente forma:

$$I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f).$$

L'indice i è detto ordine di intreccio (interlace order) e rappresenta la riduzione di densità delle righe, rispetto al formato (2.1) precedente. Il generico punto della grata ha coordinate $(r, nid_y + kbd_y, kT_f)$, per r in \mathbb{R} , n, k in \mathbb{Z} . Allora il k -esimo campo, ovvero la proiezione di I_S sul piano (x, y) per k fissato, è data da

$$C_k = \{(r, nid_y + kbd_y) | r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

In particolare, per $k = 0$ abbiamo

$$C_0 = \{(r, nid_y) \mid r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\},$$

da cui si deduce che i campi C_k , per k diverso da 0, sono tutte repliche traslate di C_0 :

$$C_k = C_0 + k(0, bd_y),$$

e tale sequenza di campi è periodica con periodo i .

L'acquisizione continua intrecciata di immagini dinamiche può avvenire nel modo classico, e quindi con un procedimento analogo a quello dell'acquisizione continua progressiva che ci porta a un segnale

$$u(t) = \sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}_i^b} l_{QS}(v_x(t - nT_r - kT_f), nd_y, kT_f), \quad (2.6)$$

oppure attraverso la riduzione della dimensione. Per fare questo abbiamo bisogno di introdurre delle definizioni. Consideriamo U un gruppo di dimensione p e V un gruppo di dimensione q .

Definizione 17. *Una trasformazione $U \times V \rightarrow U$ che riduce la dimensione, è detta zero reduction se le ultime q coordinate di un segnale di dimensione $p + q$ vengono poste a zero:*

$$y(u) = x(u, 0), \quad u \in U.$$

Definizione 18. *Sia V un reticolo. Una trasformazione $U \times V \rightarrow U$ che riduce la dimensione è detta sum reduction se*

$$y(u) = \sum_{v \in V} x(u, v) = \frac{1}{d(V)} \int_V x(u, v) dv.$$

Il duale di questa trasformazione è una zero reduction seguita dal prodotto per $1/d(V)$.

Definizione 19. *Una trasformazione $U \rightarrow U \times V$ che aumenta la dimensione, si dice hold increase se*

$$y(u, v) = x(u)(?), \quad (u, v) \in U \times V,$$

ovvero se il segnale $x(u)$, di dimensione p , si estende sul dominio di dimensione $p + q$ tramite una hold operation non so cosa sia.*

Notiamo che per la zero reduction, l'estensione del segnale deve rispondere alla condizione $e(x_0) \subset U \times \mathbb{O}^q$, mentre per quanto riguarda la sum reduction ci basta avere una condizione sulle righe di $U \times V$, ovvero sui sottoinsiemi $(U \times V)_v = \{(u, v) \in e(x_0) \mid u \in U\}$, che formano una partizione

in celle di $U \times V$. Le linee dell'estensione di un segnale $x_0(u, v)$ sono definite come

$$e(x_0)_v = e(x_0) \cap (U \times V)_v, \quad v \in V,$$

mentre le proiezioni delle linee sono sottoinsiemi di U della forma

$$\pi(x_0)_v = \{u | (u, v) \in e(x_0)_v, u \in U\}.$$

Infine enunciamo il **teorema della riduzione di dimensione** (o una cosa del genere)

Teorema 9. *Sia U un gruppo di dimensione p e sia V un reticolo di dimensione q . Un segnale $x_0(u, v)$, (u, v) in $U \times V$, che soddisfa la condizione*

$$\pi(x_0)_{v_1} \cap \pi(x_0)_{v_2} = \emptyset, \quad v_1 \neq v_2,$$

detta condizione di proiezione disgiunta, può essere perfettamente recuperato dopo una sum reduction tramite una hold increase, seguita dal prodotto per la funzione generatrice $\chi_{e(x_0)}(u, v)$.

La differenza con il teorema di campionamento sta nell'assunzione che la riduzione della dimensione viene effettuata sull'estensione del segnale, mentre il campionamento avviene sull'estensione della trasformata di Fourier del segnale, ovvero sullo spettro.

Nel nostro caso, abbiamo un segnale in tre dimensioni $l_{QS}(x, nd_y, kT_f)$, con (x, nd_y, kT_f) in I_S , con un'estensione limitata. Se esiste una trasformazione $I_S \rightarrow I_S$, che sia un cambio di coordinate tale che il segnale in uscita soddisfi la condizione di proiezione disgiunta, allora il segnale originale l_{QS} può essere recuperato perfettamente.

La lettura si divide, allora, in due parti: un cambio di coordinate, seguito da un'operazione di riduzione di dimensione.

Consideriamo la riduzione $I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f) \rightarrow \mathbb{R}$, e il segnale l_{QS} definito su I_S , la cui estensione è data dalla cella

$$C = [0, D_x) \times \mathbb{Z}_N(d_y) \times \mathbb{Z}(T_f).$$

Le righe di C sono pertanto date da

$$c_{nk} = [0, D_x) \times \{nd_y\} \times \{kT_f\},$$

con n in \mathbb{Z}_N e k in \mathbb{Z} . Inoltre osserviamo che l'intervallo $[0, D_x)$ è una proiezione in comune per le righe su \mathbb{R} . Eseguendo la traslazione $((n + kN)D_x, 0, 0)$, n e k come sopra, otteniamo le righe traslate

$$\begin{aligned} q_{nk} &= c_{nk} + ((n + kN)D_x, 0, 0) \\ &= [(n + kN)D_x, (n + kN)D_x + D_x) \times \{nd_y\} \times \{kT_f\}, \end{aligned}$$

che soddisfano la condizione di proiezione disgiunta. La matrice che si ottiene in questo caso è la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -Dx/dy & -NDx/T_f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e rappresenta uno dei modi per arrivare alla condizione di proiezione disgiunta. Possiamo, però, applicare qualsiasi cambiamento di base che ci permetta di arrivare a tale condizione. Applichiamo quindi al segnale l_{QS} un cambio di coordinate tramite la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_x & -v_x/v_y & -v_x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

dove v_y rappresenta la velocità media verticale, $v_y = d_y/T_r$, in modo da ottenere il segnale $l_{QSR}(x, nd_y, kT_f)$ che soddisfi la condizione di proiezione disgiunta:

$$\begin{aligned} l_{QSR}(t, nd_y, kT_f) &= l_{QS}(\mathbf{A}(t, nd_y, kT_f)) \\ &= l_{QS}(v_x t - (v_x/v_y)nd_y - v_x kT_f, nd_y, kT_f) \\ &= l_{QS}(v_x(t - nT_r - kT_f), nd_y, nT_f). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nella seconda parte bisogna applicare una sum reduction, da cui si ottiene il segnale

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} l_{QSR}(t, nd_y, kT_f) \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} l_{QS}(v_x(t - nT_r - kT_f), nd_y, nT_f), \end{aligned} \quad (2.9)$$

che coincide con la formula (2.6) trovata in precedenza.

Caso discreto

Per quanto riguarda il caso discreto, il gruppo di acquisizione diventa

$$I_{S1:1} = \mathbb{Z}(d_x) \times \mathbb{Z}(d_y) \times \mathbb{Z}(T_q),$$

dove $d_x = D_x/M$ rappresenta la spaziatura orizzontale, con M il numero di pixel per riga, dove definiamo *pixel* la componente elementare della sottomatrice delle coordinate (x, y) del gruppo $I_{S1:1}$. Allora il segnale video finale diventa a tempo discreto con dominio $\mathbb{Z}(T_0)$, con $T_0 = T_r/M = T_q/(MN)$ il periodo dei pixel. Nel caso generale, il reticolo di acquisizione I_S è un arbitrario sottoreticolo di $I_{S1:1}$, la cui base può essere scritta nella forma

$$\mathbf{I}_S = \begin{pmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & T_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & p & q \\ 0 & i & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_S = \mathbb{Z}^3, \quad (2.10)$$

dove la matrice diagonale rappresenta una base del reticolo $I_{S1:1}$. Come nel caso continuo, i e b descrivono l'intreccio verticale-temporale (intreccio perché è un reticolo, ma non ci incastra niente con l'interlace). I valori a, p e q sono interi tali che $0 \leq p, q < a$, dove a specifica la distanza orizzontale tra pixel tramite ad_x , e p e q completano le caratteristiche dell'intreccio del reticolo. La riduzione della densità dei pixel è data da

$$r(I_S) := \frac{\mu(I_S)}{\mu(I_{S1:1})} = ai,$$

dove a è la riduzione in orizzontale e i quella in verticale. Inoltre la distanza tra i tempi è data da aT_0 . Da (2.10), segue che il generico punto della grata I_S ha coordinate

$$x = (ma + np + kq)d_x, \quad y = (ni + kb)d_y, \quad t = kT_q, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Allora la proiezione dei pixel sul piano (x, y) , per $t = kT_q$, restituisce il k -esimo campo, dato dall'insieme discreto

$$C_k = \{((ma + np + kq)d_x, (ni + kb)d_y) | m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

In particolare per $k = 0$, troviamo

$$C_0 = \{((ma + np)d_x, nid_y) | m, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_i^p(ad_x, d_y),$$

e inoltre, anche in questo caso abbiamo che i C_k sono le copie traslate di C_0 :

$$C_k = C_0 + k(qd_x, bd_y),$$

e la loro successione è periodica di periodo finito L , dove L è il più piccolo intero tale che $L(qd_x, bd_y)$ appartiene a C_0 ; questa condizione assicura che $C_L = C_0$.

Osserviamo che possiamo usare la teoria della riduzione della dimensione anche nel caso discreto, basta sostituire opportunamente i gruppi in esame. Il segnale $u(t)$ che si trova alla fine ha la stessa forma del segnale (2.9) trovato nel caso continuo.

2.2 Analisi di Fourier dell'acquisizione

L'analisi di Fourier ci permette di analizzare il segnale mediante le frequenze. Per prima cosa analizziamo il reciproco del gruppo di acquisizione.

Nel caso discreto abbiamo

$$I_{S1:1} = \mathbb{Z}(d_x, d_y, T_q) \xrightarrow{*} I_{S1:1}^* = \mathbb{Z}(F_x, F_y, F_q),$$

dove

$$F_x = \frac{1}{d_x} = \frac{M}{D_x}, \quad F_y = \frac{1}{d_y} = \frac{N}{D_y}, \quad F_q = \frac{1}{T_q}.$$

Analogamente nel caso continuo troviamo

$$I_{S1:1} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(d_y, T_q) \xrightarrow{*} I_{S1:1}^* = \mathbb{O} \times \mathbb{Z}(F_y, F_q).$$

In generale, il gruppo di acquisizione I_S è un sottogruppo di $I_{S1:1}$, ad esempio $I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f)$. Quindi per i reciproci vale $I_S^* \supset I_{S1:1}^*$ e possiamo scrivere

$$I_S^* = I_{S1:1}^* + P, \quad P = [I_S^*/I_{S1:1}^*] \quad (2.11)$$

dove la cella P è un insieme finito di punti, dati da $r = r(I_S)$. In particolare $r = i$ nel caso continuo, $r = ai$ nel caso discreto.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier $L(f_x, f_y, f_t)$ dell'immagine fonte $l(x, y, t)$. L'operazione duale del framing è una convoluzione bidimensionale in \mathbb{R}^3 , data da

$$L_Q(f_x, f_y, f_t) = \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda_x d\lambda_y W_Q(\lambda_x, \lambda_y) L(f_x - \lambda_x, f_y - \lambda_y, f_t),$$

dove $W_Q(f_x, f_y)$ è dato da

$$\begin{aligned} W_Q(f_x, f_y) &= D_x \frac{\sin(f_x D_x)}{f_x D_x} \exp^{-i\pi f_x D_x} D_y \frac{\sin(f_y D_y)}{f_y D_y} \exp^{-i\pi f_y D_y} \\ &= D_x D_y \frac{\sin(f_x D_x) \sin(f_y D_y)}{f_x D_x f_y D_y} \exp^{-i\pi(f_x D_x + f_y D_y)} \end{aligned}$$

(non sono convinta della comprensibilità e necessità di questo pezzo sul framing)

Il campionamento $\mathbb{R}^3 \rightarrow I_S$ ha come duale la trasformazione up periodization, i cui centri di ripetizione sono dati dal gruppo reciproco I_S^* :

$$L_{QS} = \sum_{p \in I_S^*} L_Q(f_x - p_x, f_y - p_y, f_t - p_t), \quad (2.12)$$

dove (f_x, f_y, f_t) appartiene a \mathbb{R}^3/I_S^* e (p_x, p_y, p_t) sono i centri di ripetizione. Nell'acquisizione continua, il campionamento viene eseguito sulle coordinate (y, t) , e di conseguenza i centri di ripetizione dell'up-periodization sono collocati sul piano (f_y, f_t) ¹. Nel caso discreto, sono coinvolte tutte le coordinate (x, y, t) , pertanto anche l'up-periodization viene effettuata in tre dimensioni.

Nel caso dell'acquisizione effettuata con la teoria del cambio di dimensione, la lettura è basata sulla combinazione di due operazioni semplici: un cambio di coordinate e una sum reduction. Nel dominio delle frequenze il cambio di coordinate effettuato con la matrice \mathbf{A} in (2.7) diventa un cambio di coordinate con la matrice²

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1/v_x & 0 & 0 \\ 1/v_y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

¹Questo segue dal fatto che $I_S^* = \mathbb{O} \times (\mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f))^*$

² \mathbf{A}^* è l'inversa trasposta di \mathbf{A} .

e in particolare si ha

$$L_{QSR}(f_x, f_y, f_t) = \mu(\mathbf{A})L_{QS}(\mathbf{A}^*(f_x, f_y, f_t)).$$

D'altro canto, la sum reduction diventa una zero reduction, quindi detto $J_{vt} := \mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f)$:

$$U(f) = \mu(J_{vt})L_{QSR}(f, 0, 0) = \mu_0 L_{QS}(f/v_x, f/v_y, f),$$

dove $\mu_0 = \mu(J_{vt})/v_x$. Poiché $\mu(J_{vt}) = 1/(id_y T_f)$, $v_x = D_x/T_r$, $iT_f = T_q = NT_r$, e $Nd_y = D_y$, si ha che per ogni acquisizione $\mu_0 = 1/D_x D_y$:

$$U(f) = L_{QS}\left(\frac{f}{v_x}, \frac{f}{v_y}, f\right), \quad f \in \mathbb{R}/J^*, \quad (2.13)$$

dove J varia a seconda del caso continuo, $J = \mathbb{R}$, o del caso discreto, $J = \mathbb{Z}(T_0)$. Inoltre v_x è la velocità orizzontale, mentre $v_y = d_y/T_r$ rappresenta la velocità media verticale. Questo risultato funziona sia nel caso in cui il segnale $U(f)$ è aperiodico, ovvero $J^* = \mathbb{O}$, sia nel caso in cui $U(f)$ ha periodo dato dalla frequenza dei pixel, e quindi $J^* = \mathbb{Z}(F_0/a)$, $F_0 = 1/T_0$. Nel caso dell'acquisizione continua potremmo trovare un intreccio arbitrario, mentre nel caso discreto potrebbe avere un reticolo di acquisizione arbitrario.

La relazione (2.13) afferma che possiamo ottenere la trasformata di Fourier $U(f)$ del segnale video tramite la lettura della funzione $L_{QS}(f_x, f_y, f_t)$ lungo la riga di equazione

$$(f_x, f_y, f_t) = (f/v_x, f/v_y, f), \quad f \in \mathbb{R}.$$

Tale riga di lettura è inclinata rispetto al piano (f_y, f_t) e un punto di riferimento è $(1/D_x, F_y, NF_q)$.

2.3 Ricostruzione di un'immagine

La decomposizione dell'acquisizione in *campionamento* e *lettura*, porta alla procedura di ricostruzione. Partendo dal video segnale $u(t)$, ci sposteremo nel dominio delle frequenze, in modo da poter applicare il teorema di campionamento unificato. Ci limitiamo alla ricostruzione dopo un'acquisizione continua; il caso discreto si ottiene in modo analogo.

Partiamo analizzando nel dettaglio il gruppo I_S nel dominio delle frequenze. Abbiamo $I_S = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_i^b(d_y, T_f)$, quindi il suo reciproco sarà dato da

$$I_S^* = \mathbb{O} \times \mathbb{Z}_i^c(F_y/i, F_q), \quad (2.14)$$

in cui c è dato dalla soluzione dell'equazione $1 + cb = ki$, per k in \mathbb{N} . Poiché i punti di I_S^* giacciono nel piano (f_y, f_t) , possiamo usare la decomposizione (2.11) vista nel paragrafo precedente per scrivere:

$$\mathbb{Z}_i^c(F_y/i, F_q) = J_{vt1:1} + R, \quad (2.15)$$

$$R = [\mathbb{Z}_i^c(F_y/i, F_q)/J_{vt1:1}], \quad (2.16)$$

dove definiamo $J_{vt1:1} := \mathbb{Z}(F_y, F_q)$ come il reciproco del reticolo di acquisizione $I_{S1:1} = \mathbb{Z}(d_y, T_q)$. La cella R contiene i punti che possono essere scritti nella forma

$$(kc\frac{F_y}{i}, kF_q), \quad k = 0, 1, \dots, i - 1.$$

Come detto in precedenza, il campionamento decrescente diventa nel duale una up-periodization; l'uguaglianza (2.12) ci dà, allora, la relazione ingresso/uscita relativa all'immagine campionata nel dominio delle frequenze. In particolare, possiamo dividere il campionamento $\mathbb{R}^3 \rightarrow I_S$ nei due campionamenti consecutivi $\mathbb{R}^3 \rightarrow I_{S1:1}$ e $I_{S1:1} \rightarrow I_S$. In questo modo, passando al duale otteniamo che l'up-periodization è divisa in due parti: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/I_{S1:1}^*$ seguita da $\mathbb{R}^3/I_{S1:1}^* \rightarrow \mathbb{R}^3/I_S^*$, le cui relazioni ingresso/uscita sono:

$$L_{QS1:1}(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{p1} \in I_{S1:1}^*} L_Q(\mathbf{f} - \mathbf{p1}), \quad (2.17)$$

$$L_{QS}(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{p2} \in R} L_{QS1:1}(\mathbf{f} - \mathbf{p2}), \quad (2.18)$$

dove $P = [I_S^*/I_{S1:1}^*] = \mathbb{O} \times R$, in cui R è data da (2.16), e $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_t)$.

Ricapitolando, abbiamo un campionamento decrescente $\mathbb{R}^3 \rightarrow I_S$, in cui il periodo del segnale è il gruppo banale \mathbb{O} ; per poter ricostruire il segnale dobbiamo passare al duale, ovvero al dominio delle frequenze, in cui il campionamento diventa una up-periodization $\mathbb{R}^3/\mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}^3/I_S$. Possiamo allora usare la scomposizione fatta in precedenza tramite $I_{S1:1}$ e applicare la formula (1.6). In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= [\mathbb{R}^3/I_S^*] + [I_S^*/I_{S1:1}^*] + I_{S1:1}^* \\ &= C_0 + P, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$C_0 = [\mathbb{R}^3/I_S^*] + I_{S1:1}^*$$

A questo punto se lo spettro $e(L_{QS})$ è interamente contenuto nella cella C_0 la condizione di non aliasing è verificata e il l'immagine è perfettamente ricostruibile dalla sua trasformata. Per il teorema di campionamento unificato, la funzione interpolatrice è data dalla funzione indicatrice della cella C_0 ,

$$\chi_{C_0}(\mathbf{f}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{f} \in C_0 \\ 0 & \mathbf{f} \notin C_0. \end{cases}$$

In questo modo la relazione ingresso/uscita della trasformata del segnale è

$$\tilde{L}_Q(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{p} \in P} \chi_{C_0}(\mathbf{f}) L_Q(\mathbf{f} - \mathbf{p}).$$

Essendo valida la condizione di non aliasing, per ogni p in P , $L_Q(\mathbf{f} - \mathbf{p})$ è diverso da zero su C_0 se e solo se $p = 0$, in quanto C_0 e $C_0 + p$ non si intersecano. Vale quindi

$$\chi_{C_0}(\mathbf{f})L_Q(\mathbf{f} - \mathbf{p}) = \begin{cases} L_Q(\mathbf{f}) & p = 0 \\ 0 & p \neq 0. \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\tilde{L}_Q(\mathbf{f}) = L_Q(\mathbf{f})$$

Per recuperare l'immagine l_Q da cui eravamo partiti, ci basta applicare la trasformata inversa di Fourier:

$$l_i(x, y, t) = l_Q(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3,$$

dove l_i rappresenta l'antitrasformata dell'intepolazione \tilde{L}_Q .

Bibliografia

- [1] G. Cariolaro: *Unified Signal Theory*, Springer, 2011.
- [2] G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon: *Segnali e sistemi*, ch. 14, McGraw-Hill Companies srl, 2004.
- [3] E. Dubois: *Video Sampling and Interpolation*, ch. 2-3, University of Ottawa, 2000.
- [4] L. Angeloni, G Vinti: *Modulo di Imaging*, ch. 2-3, Università di Perugia.
- [5] G.B. Folland: *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, ch. 10, Wiley, 1999.