Esame di Analisi matematica A - Informatica

Prova scritta del 24 giugno 2003

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \cdot 3^{-(n^5-n^3)}}{\log(7 + 5\sqrt[3]{n})}.$$

Esercizio 2 Sia

$$f(x) = (x-1)|x-1| - x|x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si determinino le seguenti caratteristiche del grafico della funzione f:

(i) eventuali limiti a $\pm\infty$;

(ii) eventuali asintoti;

(iii) eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo;

(iv) intervalli di convessità e di concavità.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, l'integrale

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx.$$

Soluzione

Esercizio 1 Scrivendo

$$\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}\cdot 3^{-(n^5-n^3)}}{\log(7+5^{\sqrt[3]{n}})}=\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}\cdot 3^{-n^3(n^2-1)}}{\log(5^{\sqrt[3]{n}})+\log(1+7\cdot 5^{-\sqrt[3]{n}})}$$

si verifica subito che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot 3^{-n^3(n^2-1)}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\log(1+7\cdot 5^{-\sqrt[3]{n}})=0,$$

cosicché

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}\cdot 3^{-(n^5-n^3)}}{\log(7+5^{\sqrt[3]{n}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\log(5^{\sqrt[3]{n}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}\log 5}=\frac{1}{\log 5}\,.$$

Esercizio 2 (i) Si ha

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-x^2 &=& -2x+1 & \text{se } x\geq 1,\\ -(x-1)^2-x^2 &=& -2x^2+2x-1 & \text{se } 0\leq x\leq 1,\\ -(x-1)^2+x^2 &=& 2x-1 & \text{se } x\leq 0.\end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x+1)=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty.$$

(ii) Poiché la funzione ha andamento rettilineo nelle due semirette $]-\infty,0]$ e $[1,+\infty[$, è immediato verificare che le corrispondenti rette sono asintoti di f: precisamente, f ha l'asintoto obliquo $y=-2x+1$ per $x\to+\infty$ e l'asintoto obliquo $y=2x-1$ per $x\to-\infty$.

(iii) La funzione f cresce in $]-\infty,0]$, con $f(0)=-1$, e cresce in $[1,\infty[$, con $f(1)=-1$. Nell'intervallo $[0,1]$ si ha

$$f'(x)=-4x+2\geq 0\qquad\Longleftrightarrow\qquad 0\leq x\leq\frac{1}{2}\,,$$

da cui si deduce che f cresce in $[0,\frac{1}{2}]$ e decresce in $[\frac{1}{2},1]$, con $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$. Dunque si conclude che f non ha né minimi relativi né minimo assoluto, mentre ha un massimo relativo (e assoluto) pari a $-\frac{1}{2}$ nel punto $x = \frac{1}{2}$.

(iv) La funzione è sia concava che convessa nelle semirette $]-\infty, 0]$ e $[1, \infty[$; nell'intervallo $[0,1]$ si ha $f''(x) = -4$, e quindi f è concava in $[0,1]$. In particolare, f è concava in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 L'integrale $\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx$ è improprio, poiché l'integrando non è limitato nel secondo estremo. Però, essendo la funzione integranda sempre positiva, l'integrale esiste sicuramente, finito o infinito. Calcoliamolo: con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha $dx = 2t\, dt$ e quindi

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \log \frac{1}{1-t}\, 2t\, dt = -\int_0^1 2t \log(1-t) dt.$$

Con una integrazione per parti si trova

$$-\int_0^1 2t \log(1-t) dt = \left[-t^2 \log(1-t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1-t}\, dt;$$

scrivendo $\frac{t^2}{1-t} = -(t+1) + \frac{1}{1-t}$, otteniamo

$$\begin{aligned} -\int_0^1 2t \log(1-t) dt &= \left[-t^2 \log(1-t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(t+1) + \frac{1}{1-t}\right) dt = \\ &= \left[-t^2 \log(1-t) + \frac{t^2}{2} + t + \log(1-t)\right]_0^1. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx = \left[-(t^2-1)\log(1-t) + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1,$$

ed essendo

$$\lim_{t\to 1^-} [-(t^2-1)\log(1-t)] = \lim_{t\to 0^+} [-(t^2-1)\log(1-t)] = 0,$$

si conclude che

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$