ANALISI MATEMATICA, corso A - INFORMATICA

Prova scritta del 4 giugno 2003 - tema n.1

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_{n+1} = \sqrt{5a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e se ne determini il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 2 Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^{kx}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}\,.$$

ANALISI MATEMATICA, corso A - INFORMATICA

Prova scritta del 4 giugno 2003 - tema n.2

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{7} \\ a_{n+1} = \sqrt{7a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e se ne determini il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 2 Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 6^{kx}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}\,.$$

ANALISI MATEMATICA, corso A - INFORMATICA

Prova scritta del 4 giugno 2003 - tema n.3

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e se ne determini il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 2 Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^{kx}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^4 x}\,.$$

ANALISI MATEMATICA, corso A - INFORMATICA

Prova scritta del 4 giugno 2003 - tema n.4

Esercizio 1 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Si provi che $\{a_n\}$ è monotona e se ne determini il limite per $n \to \infty$.

Esercizio 2 Calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{kx}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}\,.$$

Soluzione del tema n.1

Esercizio 1 Proviamo che la successione $\{a_n\}$ è monotona. La funzione $x \mapsto \sqrt{5x}$ è crescente, quindi preserva la monotonia: dunque la successione sarà crescente o decrescente a seconda che sia $a_2 \geq a_1$ oppure $a_2 \leq a_1$. Nel nostro caso,

$$a_2 = \sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}\sqrt[4]{5} > \sqrt{5} = a_1 \,,$$

quindi $\{a_n\}$ è crescente.
Sia L il limite della successione: sarà $\sqrt{5} < L \leq +\infty$. Passando al limite nella relazione ricorrente si trova

$$L = \sqrt{5L}, \qquad \text{ossia} \qquad L^2 = 5L,$$

da cui $L = +\infty$ oppure $L = 5$.
D'altronde per induzione si ottiene subito $a_n \leq 5$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$: infatti per $n = 1$ ciò è vero, e se $a_n \leq 5$ allora

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n} \leq \sqrt{5 \cdot 5} = 5.$$

Dunque il limite della successione $\{a_n\}$ è 5.

Esercizio 2 Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^{kx} = \frac{1}{\log 4} \cdot \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} 4^{kx} = \frac{1}{\log 4} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{4^{(n+1)x} - 1}{4^x - 1} - 1 \right);$$

dunque

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k \cdot 4^{kx} &= \frac{(n+1)4^{(n+1)x}(4^x - 1) - (4^{(n+1)x} - 1)4^x}{(4^x - 1)^2} = \\ &= \frac{n \cdot 4^{(n+2)x} - 4^{(n+1)x} - 4^x}{(4^x - 1)^2} \,. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Integriamo per parti, ricordando che $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$: si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \\ &= \left[\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{2 \tan x \cdot \sin x}{\cos^3 x} \, dx \end{aligned}$$

Dato che

$$\frac{2\tan x \cdot \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x},$$

si ottiene

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} = \left[\frac{\tan x}{\cos^2 x}\right]_0^{\pi/3} - 2\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} + 2\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

e quindi

$$3\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} = \left[\frac{\tan x}{\cos^2 x}\right]_0^{\pi/3} + 2\left[\tan x\right]_0^{\pi/3}.$$

Pertanto

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}(4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Risultati del tema n.2

Esercizio 1 La successione $\{a_n\}$ è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 7.$$

Esercizio 2 Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 6^{kx} = \frac{n \cdot 6^{(n+2)x} - 6^{(n+1)x} - 6^x}{(6^x - 1)^2}.$$

Esercizio 3 Risulta

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9\sqrt{3}}.$$

Risultati del tema n.3

Esercizio 1 La successione $\{a_n\}$ è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

Esercizio 2 Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^{kx} = \frac{n \cdot 5^{(n+2)x} - 5^{(n+1)x} - 5^{x}}{(5^{x}-1)^2}\,.$$

Esercizio 3 Risulta

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{4}{9\sqrt{3}}\,.$$

Risultati del tema n.4

Esercizio 1 La successione $\{a_n\}$ è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 6.$$

Esercizio 2 Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{kx} = \frac{n \cdot 3^{(n+2)x} - 3^{(n+1)x} - 3^{x}}{(3^{x}-1)^2}\,.$$

Esercizio 3 Risulta

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\,.$$