Esame di Analisi I A - Informatica

Prova scritta del 6 febbraio 2003 - tema n.1

Esercizio 1 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 12^{k/n} \ .$$

Esercizio 2 Analizzare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = e^x(\sin x - \cos x).$$

Esercizio 3 **(i)** Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{1}{x}\, y(x) = -\log x.$$

(ii) Provare che non esiste alcuna soluzione $y(x)$ che sia positiva sulla semiretta $]0, \infty[$.

Soluzioni

Esercizio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 12^{k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(12^{1/n}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{12-1}{12^{1/n}-1}\,,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 12^{k/n} = \frac{11}{\log 12}\,.$$

Esercizio 2 Anzitutto, si riconosce che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ non esiste;}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty.$$

Poi, calcoliamo la derivata: si ha

$$f'(x) = 2e^x \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

cosicché $f'(x) \geq 0$ se s solo se $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Dunque vi sono infiniti punti di massimo relativo, vale a dire

$$x_k = (2k+1)\pi, \quad \text{con} \quad f(x_k) = e^{(2k+1)\pi}\,,$$

e infiniti punti di minimo relativo, cioè

$$\xi_k = 2k\pi, \quad \text{con} \quad f(\xi_k) = -e^{2k\pi}\,.$$

Analizziamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = 2e^x(sinx + cosx) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

e dunque $f''(x) \geq 0$ se e solo se $\sin x \geq -\cos x$, il che avviene se e solo se $x \in [2k\pi - \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$. In definitiva si hanno infiniti punti di flesso e precisamente:

$$\eta_k = \left(2k - \frac{1}{4}\right)\pi \quad \text{(da concava a convessa),}$$

$$\zeta_k = \left(2k + \frac{3}{4}\right)\pi \quad \text{(da convessa a concava)},$$

con $f(\eta_k) = f'(\eta_k) = -\sqrt{2}e^{\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi}$ e $f(\zeta_k) = f'(\zeta_k) = \sqrt{2}e^{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}$.

Esercizio 3 Le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$y(x) = -x\left(\frac{log^2 x}{2} + c\right), \quad x > 0,$$

e se fosse

$$-x\left(\frac{log^2 x}{2} + c\right) > 0 \qquad \forall x > 0$$

avremmo

$$c < -\frac{\log^2 x}{2} \qquad \forall x > 0$$

da cui $c = -\infty$: ciò è assurdo e pertanto nessuna soluzione è positiva sull'intera semiretta $]0, \infty[$.