Appunti di Analisi funzionale

Paolo Acquistapace

14 agosto 2022

Indice

Capitolo 1

Misura di Lebesgue

1.1 Motivazioni

La teoria della misura e dell'integrazione secondo Riemann, concettualmente semplice e soddisfacente per molti aspetti, non è tuttavia così flessibile da consentire certe operazioni che pure appaiono naturali: ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

solo quando A è limitato e vi è convergenza uniforme delle f_n; se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti, la loro unione non è necessariamente misurabile, né, tanto meno, vale in generale la relazione

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n);$$

infine, le quantità

$$\int_A |f(x)|\,dx, \qquad \left[\int_A |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

non sono norme sullo spazio delle funzioni Riemann integrabili $\mathcal{R}(A)$, perché manca loro la proprietà di annullarsi se e solo se f è identicamente nulla (la f potrebbe essere non nulla in un insieme finito o anche numerabile di punti).

Vi sono poi altre, e più importanti, motivazioni "a posteriori": la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue ha dato l'avvio ad enormi sviluppi nell'analisi funzionale, nella teoria della probabilità, ed in svariatissime applicazioni (risoluzione di equazioni differenziali, calcolo delle variazioni, ricerca operativa, fisica matematica, matematica finanziaria, biomatematica, ed altre ancora).

Esporremo la teoria della misura di Lebesgue seguendo la presentazione introdotta da Carathéodory, che è quella che più facilmente si estende, come vedremo, al caso di misure astratte definite su insiemi arbitrari.

Esercizi 1.1

1. Esibire una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite su $[a,b]$, Riemann integrabili in $[a,b]$, puntualmente convergenti in $[a,b]$, e tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

2. Esibire una successione di sottoinsiemi $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}$, misurabili secondo Riemann e disgiunti, tali che la loro unione non sia misurabile secondo Riemann.

1.2 Lunghezza degli intervalli

Il punto di partenza, come è naturale, è l'attribuzione di una lunghezza agli intervalli della retta reale.

Definizione 1.2.1 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. La sua* lunghezza $\ell(I)$ *è data da*

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \textit{se }]a,b[\, \subseteq I \subseteq [a,b], \\ +\infty & \textit{se } I \textit{ è illimitato.} \end{cases}$$

La funzione $\ell(I)$ associa ad ogni intervallo di $\mathbb{R}$ un numero in $[0,+\infty]$ (si noti che, in particolare, $\ell(\emptyset)$ e $\ell(\{a\})$ valgono 0). Vogliamo estendere tale funzione a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ più generali, in modo da poterli "misurare". Sarebbe auspicabile poter definire una funzione di insieme m che verifichi le seguenti proprietà:

1. $m(E)$ è definita per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$;

2. $m(I) = \ell(I)$ per ogni intervallo I;

3. (*numerabile additività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti, allora

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n);$$

4. (*invarianza per traslazioni*) per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ si ha $m(x+E) = m(E)$, ove $x+E = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in E\}$.

Sfortunatamente si può dimostrare (si veda l'esercizio 2.1.8) che non è possibile soddisfare simultaneamente queste richieste: se si vogliono mantenere le proprietà 2, 3 e 4 non si potranno misurare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; se, al contrario, si vuole mantenere la proprietà 1, occorrerà indebolire qualcuna delle altre, ad esempio sostituire la 3 con la seguente:

3′. (*numerabile subadditività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

Considerazioni geometriche ci inducono a considerare irrinunciabili le proprietà 2, 3 e 4: di conseguenza, come si vedrà, la classe degli insiemi "misurabili" sarà un sottoinsieme proprio di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Esercizi 1.2

1. Si provi che la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$ aperti a destra è un'*algebra*, ossia è una classe contenente l'insieme vuoto e chiusa rispetto all'unione ed al passaggio al complementare.

2. Si verifichi che la famiglia delle unioni finite di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ non è un'algebra.

1.3 Misura esterna di Lebesgue

Cominciamo ad attribuire ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ una "misura esterna" che goda delle proprietà 1, 2, 3′ e 4 del paragrafo 1.2.

Definizione 1.3.1 *Se $E \subseteq \mathbb{R}$, la* misura esterna *$m^*(E)$ è data da*

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n .,\ I_n \text{ intervalli aperti}\right\}.$$

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 1.3.2 *Si ha:*

(i) $m^*(E) \geq 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}$*;*

(ii) $m^*(\emptyset) = m^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) (monotonia) *se $E \subseteq F$ allora $m^*(E) \leq m^*(F)$.*

Dimostrazione (i) Evidente.
(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\emptyset \subset \{x\} \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$; questo intervallo ha lunghezza 2ε e ricopre $\{x\}$ e $\emptyset$. Quindi, per definizione,

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq m^*(\{x\}) \leq 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.
(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento $\{I_n\}$ di F costituito da intervalli aperti è anche un ricoprimento di E, da cui

$$m^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n);$$

per l'arbitrarietà del ricoprimento di F, si ottiene $m^*(E) \leq m^*(F)$. $\square$

Verifichiamo ora la proprietà 2:

Proposizione 1.3.3 *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, allora $m^*(I) = \ell(I)$.*

Dimostrazione Supponiamo dapprima $I = [a, b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$ l'intervallo $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$ ricopre I, e quindi per definizione si ha

$$m^*(I) \leq \ell(\,]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\,) = b - a + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui $m^*(I) \leq b - a$.
Per provare la disuguaglianza opposta, sia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di I costituito da intervalli aperti; poiché I è compatto, esisterà un sottoricoprimento finito $\{I_{n_1}, \ldots, I_{n_m}\}$. Eliminando eventualmente qualcuno degli I_{n_k}, possiamo supporre che gli I_{n_k} siano tutti distinti fra loro, ed inoltre che il ricoprimento sia minimale, nel senso che togliendo un I_{n_k} gli intervalli residui non ricoprano più $[a, b]$.
Ordiniamo gli intervalli $I_{n_k} =]a_k, b_k[$ in modo che

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m;$$

si noti che non può aversi $a_k = a_{k+1}$, poiché in tal caso si avrebbe $I_{n_k} \subseteq I_{n_{k+1}}$ se $b_k < b_{k+1}$ e l'inclusione contraria se $b_k > b_{k+1}$: quindi potremmo eliminare uno dei due intervalli. Avremo poi $a_1 < a < b_1$, perché se fosse $b_1 \leq a$ potremmo eliminare I_{n_1}, e possiamo supporre $b_1 \leq b$, perché da $b < b_1$ segue $[a, b] \subset I_{n_1}$ e in tal caso si ha direttamente $\ell(I) = b - a < b_1 - a_1 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$, che è ciò a cui vogliamo arrivare). Risulta anche

$$a_1 < a \leq a_2 < b_1 < b_2 :$$

infatti se fosse $b_2 \leq b_1$ potremmo eliminare I_{n_2}, se fosse $b_1 \leq a_2$ risulterebbe $b_1 \in [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^m I_{n_k} = \emptyset$, e se fosse $a_2 < a$ potremmo eliminare I_{n_1}.
Ragionando in modo analogo troviamo che

$$a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < b_k, \qquad k = 3, 4, \ldots, m-1,$$

ed infine per l'indice m avremo

$$a_{m-1} < a_m < b_{m-1} \leq b < b_m.$$

Pertanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \geq \sum_{k=1}^m \ell(I_{n_k}) = \sum_{k=1}^m (b_k - a_k) > (b - b_{m-1}) + \sum_{k=2}^{m-1} (b_k - b_{k-1}) + (b_1 - a) = b - a.$$

Dall'arbitrarietà del ricoprimento segue $m^*(I) \geq b - a = \ell(I)$.
Sia ora I tale che $\overline{I} = [a, b]$. Poiché per ogni $\varepsilon \in]0, \frac{b-a}{2}[$ si ha $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset I \subseteq [a, b]$, dalla monotonia di m^* e da quanto già dimostrato segue

$$b - a - 2\varepsilon \leq m^*(I) \leq b - a \qquad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[,$$

e quindi $m^*(I) = b - a = \ell(I)$.
Infine, se I è illimitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo J_n di lunghezza n contenuto in I: quindi, per monotonia,

$$m^*(I) \geq m^*(J_n) = \ell(J_n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $m^*(I) = +\infty = \ell(I)$. $\square$

Verifichiamo ora che m^* gode della proprietà $3'$ del paragrafo 1.2.

Proposizione 1.3.4 *La misura esterna m^* è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione Sia $\{E_n\}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: dobbiamo provare che

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n).$$

Ciò è ovvio se la serie a secondo membro è divergente; supponiamo quindi che essa sia convergente, cosicché in particolare $m^*(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per definizione di misura esterna, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di E_n costituito da intervalli aperti, tale che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_{kn}) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La famiglia $\{I_{kn}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ è allora un ricoprimento di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ costituito da intervalli aperti, e si ha

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \ell(I_{kn}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n) + \varepsilon\,;$$

dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. $\square$

Infine osserviamo che m^* verifica anche la proprietà 4 del paragrafo 1.2: infatti la lunghezza degli intervalli è ovviamente invariante per traslazioni; ne segue facilmente, usando la definizione, che anche m^* è invariante per traslazioni.
Come vedremo in seguito, la misura esterna *non* verifica invece la proprietà 3 del paragrafo 1.2, ed anzi non è nemmeno finitamente additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (esercizio 1.8.4). Sarà però numerabilmente additiva su una sottoclasse molto vasta di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Esercizi 1.3

1. Sia $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posto $tE = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{t} \in E\}$, si provi che
$$m^*(tE) = |t| m^*(E).$$

2. Dimostrare che la funzione di insieme m^* non cambia se nella definizione 1.3.1 si fa uso, anziché di intervalli I_n aperti, di intervalli I_n di uno dei seguenti tipi:

(a) intervalli I_n chiusi;

(b) intervalli I_n aperti a destra;

(c) intervalli I_n qualunque;

(d) intervalli I_n ad estremi razionali.

3. Si dimostri che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

4. Si provi che ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ ha misura esterna strettamente positiva.

5. Si provi che ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ ha misura esterna nulla.

6. Per ogni $\varepsilon > 0$ si costruisca un aperto $A \subset \mathbb{R}$, denso in $\mathbb{R}$, tale che $m^*(A) < \varepsilon$.

7. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di misura esterna strettamente positiva. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo I tale che $m^*(E \cap I) > (1 - \varepsilon)\ell(I)$.
[**Traccia:** fissato $\varepsilon > 0$, si prenda un aperto A contenente E, tale che $m^*(A) < m^*(E) + \varepsilon$; si utilizzi l'esercizio 1.3.3 e si verifichi che, per ε sufficientemente piccolo, uno almeno degli intervalli che compongono A verifica necessariamente la tesi.]

1.4 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Introduciamo adesso una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sulla quale la funzione m^* è numerabilmente additiva (proprietà 3 del paragrafo 1.2).

Definizione 1.4.1 *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto* misurabile *(secondo Lebesgue) se per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Indicheremo con $\mathcal{M}$ la classe dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$.
Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è dunque misurabile se, fissato un arbitrario "insieme test" $A \subseteq \mathbb{R}$, esso viene "decomposto bene" da E, nel senso che la misura esterna di A è additiva sulle due parti $A \cap E$ e $A \cap E^c$. Si noti che per la subadditività di m^* si ha sempre

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

quindi la disuguaglianza significativa è quella opposta.

Osservazione 1.4.2 Dalla definizione segue subito che E è misurabile se e solo se lo è E^c; quindi $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare. Inoltre è facile vedere che $\mathbb{R}, \emptyset$ sono insiemi misurabili.

Più in generale:

Proposizione 1.4.3 *Se $E \subset \mathbb{R}$ e $m^*(E) = 0$, allora E è misurabile.*

Dimostrazione Per ogni insieme test $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

in quanto $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$. Ne segue la tesi. $\square$

La classe $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto all'unione; si ha infatti:

Proposizione 1.4.4 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $E \cup F$ è misurabile.*

Dimostrazione Sia A un insieme test. Poiché E è misurabile,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c);$$

poiché F è misurabile, scelto come insieme test $A \cap E^c$ si ha

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E^c) &= m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) = \\ &= m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap (E \cup F)^c), \end{aligned}$$

e dunque

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap (E \cup F)^c);$$

d'altra parte, essendo

$$(A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F) = A \cap (E \cup F),$$

la subadditività di m^* implica che

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) \geq m^*(A \cap (E \cup F)),$$

da cui finalmente

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^c).$$

Ciò prova la misurabilità di $E \cup F$. $\square$

Corollario 1.4.5 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $E \cap F$ ed $E \setminus F$ sono misurabili.*

Dimostrazione Se $E, F \in \mathcal{M}$, allora $E^c, F^c \in \mathcal{M}$; per la proposizione precedente, $E^c \cup F^c \in \mathcal{M}$ e quindi $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{M}$. Di qui segue $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}$.

$\square$

La classe $\mathcal{M}$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione e differenza; in particolare, $\mathcal{M}$ è un'algebra (v. esercizio 1.2.1).

Osservazione 1.4.6 Se E, F sono insiemi misurabili e disgiunti, si ha

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F),$$

come si verifica applicando la definizione 1.4.1 ad E e scegliendo come insieme test $E \cup F$. Di conseguenza, se $E, F \in \mathcal{M}$ ed $E \subseteq F$, vale l'uguaglianza

$$m^*(F \setminus E) + m^*(E) = m^*(F),$$

e, se $m^*(E) < \infty$,

$$m^*(F \setminus E) = m^*(F) - m^*(E).$$

Nel caso di N insiemi misurabili disgiunti si ha, più generalmente:

Lemma 1.4.7 *Siano $E_1, \ldots, E_N$ misurabili e disgiunti. Allora per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha*

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n).$$

Dimostrazione Ragioniamo per induzione. Se $N = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo che la tesi sia vera per N insiemi misurabili disgiunti, e consideriamo $N+1$ insiemi $E_1, \ldots, E_{N+1} \in \mathcal{M}$ fra loro disgiunti. Poiché E_{N+1} è misurabile, scegliendo come insieme test $A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n$, si ha

$$\begin{aligned}
m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) &= \\
&= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) \cap E_{N+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) \cap E_{N+1}^c\right) = \\
&= m^*(A \cap E_{N+1}) + m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right);
\end{aligned}$$

ma, per ipotesi induttiva,

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n),$$

da cui

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) = m^*(A \cap E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{N+1} m^*(A \cap E_n). \quad \square$$

Grazie al lemma precedente, siamo in grado di provare che la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile (e quindi rispetto all'intersezione numerabile).

Proposizione 1.4.8 *Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.*

Dimostrazione Anzitutto, scriviamo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ come unione numerabile di insiemi misurabili e *disgiunti*: basta porre

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per avere che gli F_n sono disgiunti, appartengono a $\mathcal{M}$ e verificano

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme test: per ogni $N \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere, grazie al lemma precedente,

$$\begin{aligned}
m^*(A) &= m^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right)^c\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{N} F_n^c\right) \geq \\
&\geq \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^c\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right).
\end{aligned}$$

Se $N \to \infty$, in virtù della numerabile subadditività di m^* otteniamo

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right) \geq \\
&\geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right).
\end{aligned}$$

Ciò prova che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è misurabile. □

Dunque la classe $\mathcal{M}$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto all'unione numerabile ed al passaggio al complementare. Una famiglia di insiemi dotata di queste proprietà si chiama *σ-algebra*, o *tribù*; $\mathcal{M}$ è pertanto una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Proviamo finalmente che m^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$.

Proposizione 1.4.9 *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ e gli E_n sono fra loro disgiunti, allora si ha*

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n).$$

Dimostrazione Poiché m^* è numerabilmente subadditiva, la disuguaglianza ($\leq$) è evidente; proviamo l'altra. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha, utilizzando la monotonia di m^* ed il lemma 1.4.7 con $A = \mathbb{R}$,

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq m^*\left(\bigcup_{n=0}^{N} E_n\right) = \sum_{n=0}^{N} m^*(E_n),$$

da cui per $N \to \infty$

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n). \quad \Box$$

Esercizi 1.4

1. Per ogni $\alpha \in [0, \infty]$ si determini una successione di aperti $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}$ tali che

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \quad m^*(A_n) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \alpha.$$

2. Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $m^*(E) = 0$ e sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Si provi che $f(E)$ ha misura esterna nulla. Si provi poi lo stesso risultato supponendo $f \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. La *densità di E nel punto $x \in \mathbb{R}$* è il limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} m^*(E \cap]x-h, x+h[).$$

   (i) Tale limite esiste sempre?

   (ii) Si provi che l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}\right\}$$

   ha densità $\frac{1}{3}$ nel punto $x = 0$.

   [**Traccia:** per (i) si consideri $E = \bigcup_{n=0}^{\infty}[2^{-2n-1}, 2^{-2n}]$; per (ii), detto E l'insieme in questione, si verifichi che $\frac{1}{h}m^*(E \cap [0, h[)$ è uguale a $\frac{1}{6h\pi}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/36}$ quando $\frac{3}{\pi(6k+5)} < h < \frac{3}{\pi(6k+1)}$, mentre è uguale a $\frac{1}{6h\pi}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/36} + 1 - \frac{3}{h\pi(6k+1)}$ quando $\frac{3}{\pi(6k+1)} \leq h \leq \frac{3}{\pi(6k-1)}$. Se $h \to 0^+$ (e quindi $k \to \infty$), si provi che il termine con la serie tende a $\frac{1}{3}$.]

4. Sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Si provi che $\mathcal{F}$ è finita, oppure $\mathcal{F}$ contiene una infinità più che numerabile di elementi.
   [**Traccia:** se, per assurdo, fosse $\mathcal{F} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con gli E_n tutti distinti, si costruisca una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ di insiemi disgiunti; dopodiché, posto $\mathcal{F}' = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si metta $\mathcal{P}(\mathcal{F}')$ in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.]

1.5 Misurabilità degli intervalli

La classe degli insiemi misurabili non avrebbe l'importanza che ha, se non contenesse gli intervalli di $\mathbb{R}$: questo è ciò che andiamo a dimostrare.

Proposizione 1.5.1 *Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione Sappiamo già che $\mathbb{R} = \emptyset^c$ è misurabile. Osserviamo poi che ogni intervallo *non* aperto è l'unione di un intervallo aperto e di uno o due punti, e dunque è misurabile se lo sono tutti gli intervalli *aperti*; inoltre, dato che ogni intervallo aperto limitato $]a, b[$ è l'intersezione delle due semirette aperte $]-\infty, b[$ e $]a, +\infty[$, basterà provare che sono misurabili le semirette aperte. Infine, essendo $]a, +\infty[^c =]-\infty, a[\cup \{a\}$, sarà in definitiva sufficiente mostrare che $]-\infty, b[\in \mathcal{M}$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.
Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme test. Se $m^*(A) = \infty$, la disuguaglianza da provare, ossia

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap]-\infty, b[\,) + m^*(A \cap [b, +\infty[\,)$$

è evidente. Se invece $m^*(A) < \infty$, per definizione fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}$ di A, fatto di intervalli aperti, tale che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Poniamo

$$I'_n = I_n \cap]-\infty, b[\,, \quad I''_n = I_n \cap [b, +\infty[\,;$$

chiaramente

$$\ell(I'_n) + \ell(I''_n) = \ell(I_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I'_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I''_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Dato che $\{I'_n\}$ e $\{I''_n\}$ ricoprono rispettivamente $A \cap]-\infty, b[$ e $A \cap [b, +\infty[$, per la numerabile subadditività di m^* si ottiene a maggior ragione

$$m^*(A \cap]-\infty, b[\,) + m^*(A \cap [b, +\infty[\,) < m^*(A) + \varepsilon,$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε. $\square$

Corollario 1.5.2 *Gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}$ sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione Basta ricordare l'esercizio 1.3.3. $\square$

Naturalmente la σ-algebra $\mathcal{M}$ contiene molti altri insiemi: indicando con $\mathcal{A}$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$, dovrà stare in $\mathcal{M}$ tutto ciò che si ottiene da $\mathcal{A}$ con unioni ed intersezioni numerabili. La *più piccola* σ-algebra che contiene $\mathcal{A}$ (ossia l'intersezione di tutte le σ-algebre contenenti $\mathcal{A}$: si vede subito che essa stessa è una σ-algebra) si indica con $\mathcal{B}$ ed i suoi elementi si chiamano *boreliani*. Si dice che $\mathcal{B}$ è la σ-algebra *generata* da $\mathcal{A}$. Vedremo in seguito (esercizio 3.1.8) che $\mathcal{M}$ contiene propriamente $\mathcal{B}$.

Esercizi 1.5

1. Si verifichi che l'insieme

$$\left\{x \in \left]0, \frac{1}{\pi}\right] : \sin \frac{1}{x} > 0\right\}$$

è misurabile e se ne calcoli la misura esterna.

2. Sia E l'insieme dei numeri di $[0,1]$ che possiedono uno sviluppo decimale ove non compare mai la cifra 9. Si dimostri che E è misurabile e se ne calcoli la misura esterna.

3. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione delle cifre decimali di x (scegliendo lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità). Si calcoli la misura di Lebesgue dei seguenti insiemi:

   (a) $E = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è dispari per ogni } n \in \mathbb{N}^+\}$,

   (b) $F = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è definitivamente dispari}\}$,

   (c) $G = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è dispari per infiniti indici } n \in \mathbb{N}^+\}$.

1.6 Insieme di Cantor

Per rendersi conto di quanto la nozione di misurabilità secondo Lebesgue sia generale, e di quanto la misura esterna si discosti dall'idea intuitiva di "estensione" di un insieme, è utile considerare l'esempio che segue.
Sia $\xi \in]0, \frac{1}{3}]$. Dall'intervallo $[0,1]$ togliamo i punti dell'intervallo aperto I_1^1 di centro $\frac{1}{2}$ e ampiezza ξ; dai due intervalli chiusi rimasti togliamo i due intervalli aperti I_1^2, I_2^2 che hanno come centri i punti medi e ampiezza ξ^2; dai quattro intervalli chiusi residui togliamo i quattro intervalli aperti $I_1^3, I_2^3, I_3^3, I_4^3$ con centri nei punti medi ed ampiezza ξ^3; al passo k-simo toglieremo dai 2^{k-1} intervalli chiusi residui le 2^{k-1} parti centrali aperte di ampiezza ξ^k. Procedendo in questa maniera per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ciò che resta "alla fine" è l'insieme

$$C_\xi = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_j^k \,,$$

il quale è chiuso, quindi misurabile; la sua misura è (proposizione 1.4.9)

$$m(C_\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \xi^k = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\xi)^k = \frac{1-3\xi}{1-2\xi}.$$

Si noti che C_ξ è privo di punti interni: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esso non può contenere intervalli di ampiezza superiore a 2^{-k} (perché con il solo passo k-simo si lasciano 2^k intervalli disgiunti di uguale ampiezza che non ricoprono $[0,1]$: tale ampiezza quindi è minore di 2^{-k}). In particolare, C_ξ è totalmente sconnesso, cioè la componente connessa

di ogni punto $x \in C_\xi$ è $\{x\}$. Inoltre C_ξ è perfetto, ossia tutti i suoi punti sono punti d'accumulazione per C_ξ: infatti se $x \in C_\xi$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ il punto x sta in uno dei 2^k intervalli residui del passo k-simo, per cui gli estremi di tale intervallo sono punti di C_ξ che distano da x meno di 2^{-k}.
Per $\xi = 1/3$, l'insieme $C_{1/3}$ (che è quello effettivamente introdotto da Cantor) ha misura nulla. Esso si può costruire anche nel modo seguente: per ogni $x \in [0,1]$ consideriamo lo sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad \alpha_k \in \{0,1,2\}.$$

Tale sviluppo non è sempre unico: ad esempio, $\frac{1}{3}$ si scrive come $0.0\overline{2}$ oppure come 0.1. È facile verificare che $C_{1/3}$ è costituito dai numeri $x \in [0,1]$ che ammettono uno sviluppo ternario in cui non compare mai la cifra 1. Così, $\frac{1}{3} \in C_{1/3}$ mentre $\frac{1}{2} = 0.\overline{1} \notin C_{1/3}$ (perché lo sviluppo di $\frac{1}{2}$ è unico).
L'insieme $C_{1/3}$, pur avendo misura esterna nulla, è più che numerabile: se infatti si avesse $C_{1/3} = \{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{3^k}, \qquad \alpha_k^{(n)} \in \{0,2\},$$

allora scegliendo

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 2 \\ 2 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

avremmo $y \in C_{1/3}$ ma $y \neq x^{(n)}$ per ogni n, dato che la n-sima cifra ternaria di y è diversa da quella di $x^{(n)}$ (per una stima della distanza $|y - x^{(n)}|$ si veda l'esercizio 1.6.1). Ciò è assurdo.

Esercizi 1.6

1. Con riferimento all'argomentazione che mostra la non numerabilità di $C_{1/3}$, si provi che $|y - x^{(n)}| \geq 3^{-n}$.

2. Si costruisca un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, tale che

$$0 < m^*(E) < \infty, \qquad m^*(E \cap I) < \ell(I)$$

per ogni intervallo aperto non vuoto I.

3. Si mostri che $\mathcal{M}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

4. La funzione caratteristica χ_{C_ξ} degli insiemi di Cantor C_ξ, definita da

$$\chi_{C_\xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_\xi \\ 0 & \text{se } x \notin C_\xi, \end{cases}$$

è Riemann integrabile su $[0,1]$?

1.7 Proprietà della misura di Lebesgue

Anzitutto, definiamo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$:

Definizione 1.7.1 *La funzione di insieme*

$$m = m^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

si chiama misura di Lebesgue.

Dalle proposizioni 1.3.2 e 1.4.9 segue che m è monotona, numerabilmente additiva ed invariante per traslazioni, con $m(\emptyset) = 0$. Queste proprietà (tranne l'invarianza per traslazioni, legata alla geometria di $\mathbb{R}$) saranno i requisiti richiesti per definire le misure in spazi astratti.
Vediamo adesso come si comporta la misura di Lebesgue rispetto alle successioni monotone di insiemi misurabili.

Proposizione 1.7.2 *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili.*

(i) *Se $E_n \subseteq E_{n+1}$, allora*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

(ii) *Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ e se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m(E_{n_0}) < \infty$, allora*

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Dimostrazione **(i)** Poniamo

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha

$$E_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n\,, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\,,$$

e gli F_n sono misurabili e disgiunti. Quindi, usando la numerabile additività di m,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} m(F_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) = \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$

(ii) Poniamo $F_n = E_{n_0} \setminus E_n$ per ogni $n > n_0$. Allora gli F_n sono misurabili e $F_n \subseteq F_{n+1}$; inoltre

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\,.$$

Per (i) e per l'osservazione 1.4.6 abbiamo

$$m(E_{n_0}) - m\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty}[m(E_{n_0}) - m(E_n)] = m(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Ne segue la tesi poiché, ovviamente,

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n . \quad \square$$

Osserviamo che l'ipotesi che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m(E_{n_0}) < \infty$ è essenziale nell'enunciato (ii): se ad esempio $E_n = [n, \infty[$, si ha $E_n \supset E_{n+1}$, $m(E_n) = \infty$ per ogni n, ma l'intersezione degli E_n, essendo vuota, ha misura nulla.

Diamo ora un'importante caratterizzazione degli insiemi misurabili: sono quegli insiemi E che differiscono poco, in termini di m^*, sia dagli aperti (contenenti E), sia dai chiusi (contenuti in E).

Proposizione 1.7.3 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$E \in \mathcal{M}$;*

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m^*(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(iii) *esiste un boreliano $B \supseteq E$ tale che $m^*(B \setminus E) = 0$;*

(iv) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m^*(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(v) *esiste un boreliano $D \subseteq E$ tale che $m^*(E \setminus D) = 0$.*

Dimostrazione Proveremo le due catene di implicazioni

$$\textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(ii)} \Longrightarrow \textbf{(iii)} \Longrightarrow \textbf{(i)}, \qquad \textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(iv)} \Longrightarrow \textbf{(v)} \Longrightarrow \textbf{(i)}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supponiamo dapprima $m(E) < \infty$. Per definizione di m^*, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}$ di E fatto di intervalli aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < m(E) + \varepsilon,$$

cosicché, posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, l'aperto A verifica, per subadditività numerabile,

$$m(A) < m(E) + \varepsilon;$$

dal fatto che $m(E) < \infty$ segue allora (osservazione 1.4.6)

$$m(A \setminus E) = m(A) - m(E) < \varepsilon.$$

Sia ora $m(E) = \infty$. Prendiamo un ricoprimento di $\mathbb{R}$ fatto di intervalli limitati e disgiunti: ad esempio

$$I_{2n} = [2n, 2n+2[\,, \quad I_{2n+1} = [-2n-2, -2n[\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Posto $E_n = E \cap I_n$, si ha $m(E_n) < \infty$; quindi, per quanto già dimostrato, esistono degli aperti $A_n \supseteq E_n$ tali che

$$m(A_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'insieme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un aperto contenente E, e poiché

$$A \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus E_n),$$

si conclude che

$$m(A \setminus E) < \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n \setminus E_n) < \varepsilon \ .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia A_n un aperto contenente E, tale che

$$m^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1} \, ;$$

l'insieme $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un boreliano contenente E e si ha, per monotonia,

$$m^*(B \setminus E) \le m^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $m^*(B \setminus E) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Scrivendo $E = B \setminus (B \setminus E)$, la tesi segue dal fatto che l'insieme B è misurabile perché boreliano, mentre l'insieme $B \setminus E$ è misurabile avendo, per ipotesi, misura esterna nulla (proposizione 1.4.3). Dunque E è misurabile.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (i) Queste implicazioni si dimostrano facilmente applicando ad E^c gli enunciati già dimostrati. □

Le proprietà **(ii)** $\mapsto$ **(v)** della proposizione precedente si sintetizzano dicendo che la misura di Lebesgue è una misura *regolare*.

Esercizi 1.7

1. Dimostrare che se E, F sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$, si ha

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

2. Si provi che per ogni successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tale che $E_n \subseteq E_{n+1}$ risulta

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(E_n).$$

[**Traccia:** una disuguaglianza è banale. Per l'altra, si può supporre che sia $\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) < \infty$; scelto un aperto $A_n \supseteq E_n$ in modo che $m(A_n) < m^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$, sia $F_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$; si mostri per induzione che $m(F_n) < m^*(E_n) + \varepsilon \sum_{k=0}^n 2^{-k-1}$. Poiché $m(F_n) \longrightarrow m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$, se ne deduca che $m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$.]

3. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di $\mathbb{R}$. L'insieme E' degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \in E_n$ per infiniti valori di n si chiama *massimo limite* della successione $\{E_n\}$ e si scrive $E' = \limsup_{n\to\infty} E_n$, mentre l'insieme E'' degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \in E_n$ definitivamente si chiama *minimo limite* di $\{E_n\}$ e si scrive $E'' = \liminf_{n\to\infty} E_n$.

   (i) Si verifichi che
   $$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\,.$$

   (ii) Si provi che
   $$m\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} m(E_n),$$
   e che se $m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) < \infty$ allora
   $$m\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} m(E_n).$$

   (iii) Si mostri che la seconda disuguaglianza è in generale falsa se $m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \infty$.

   (iv) Si verifichi che $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$ e si provi che se la successione $\{E_n\}$ è monotona rispetto all'inclusione, allora $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$.

4. Provare che se $E \in \mathcal{M}$ è un insieme di misura positiva, allora per ogni $t \in [0, m(E)]$ esiste un insieme boreliano $B_t \subseteq E$ tale che $m(B_t) = t$.

5. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si provi che esiste un boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $m(B) = m^*(E)$.

6. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se
   $$m^*(E) = \sup\{m(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq E\}.$$
   Si mostri anche che se $m^*(E) = \infty$ l'enunciato precedente è falso.

7. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che $m^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di intervalli disgiunti $I_1, \ldots, I_N$ tali che
   $$m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) < \varepsilon,$$

ove $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è la *differenza simmetrica* fra gli insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$. [**Traccia:** per la necessità, approssimare E con aperti dall'esterno e ricordare che ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti. Per la sufficienza: dapprima selezionare un aperto $A \supseteq E$ tale che $m(A) < m^*(E) + \varepsilon$; poi, posto $F = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N I_i\right)$, verificare che $m^*(F \triangle E) < \varepsilon$; infine, utilizzando le inclusioni $A \setminus E \subseteq (A \setminus F) \cup (F \setminus E)$ e $E \subseteq F \cup (E \setminus F)$, provare che $m^*(A \setminus E) < 3\varepsilon$.]

1.8 Un insieme non misurabile

La σ-algebra $\mathcal{M}$ degli insiemi Lebesgue misurabili è molto vasta, ma non esaurisce la classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Tuttavia, per esibire un insieme non misurabile non si può fare a meno del seguente

Assioma della scelta *Per ogni insieme non vuoto X esiste una* funzione di scelta *$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tale che $f(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.*

In altre parole, l'assioma della scelta dice che è possibile selezionare, per mezzo della funzione f, esattamente un elemento da ciascun sottoinsieme di X. La cosa sarebbe banale se X avesse cardinalità finita, e facile se X fosse numerabile (esercizio 1.8.5), ma per insiemi di cardinalità più alta questa proprietà non è altrimenti dimostrabile.

L'insieme che andiamo a costruire fu introdotto da Vitali. Consideriamo in $[0, 1]$ la relazione di equivalenza

$$x \simeq y \quad \iff \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi è un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza, ognuna delle quali contiene un'infinità numerabile di elementi. Costruiamo un insieme V prendendo, grazie all'assioma della scelta, esattamente un elemento da ciascuna classe di equivalenza: V è un sottoinsieme più che numerabile di $[0, 1]$.
Sia ora $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, e sia $V_n = V + q_n$. Notiamo che $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$: infatti se $x \in V_n \cap V_m$ allora $x = a + q_n = b + q_m$ con $a, b \in V$; di qui segue $a - b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, da cui (per come è stato costruito V) $a = b$. Ne deduciamo $q_n = q_m$, ed infine $n = m$. Notiamo anche che valgono le inclusioni

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2],$$

e quindi, per la monotonia di m^*,

$$1 \leq m^* \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) \leq 3.$$

Se V fosse misurabile secondo Lebesgue, anche i suoi traslati V_n sarebbero misurabili ed avrebbero la stessa misura; per l'additività numerabile di m si ricaverebbe

$$m \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m(V) > 0, \end{cases}$$

e ciò contraddice il fatto che la misura di $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ è compresa fra 1 e 3. Pertanto V non può essere misurabile.

Esercizi 1.8

1. Dimostrare che per ogni $\lambda \in]0, +\infty]$ esiste un sottoinsieme $U \subset [0, \infty[$, non misurabile secondo Lebesgue, tale che $m^*(U) = \lambda$.

2. Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}$ di misura positiva, si provi che esiste un sottoinsieme $W \subset E$ che non è Lebesgue misurabile.

3. Sia $V_n = V + q_n$, come nella costruzione dell'insieme non misurabile di Vitali. Posto $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m$, si provi che
$$m^*(E_n) < \infty, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m^*(E_n) > m^*\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

4. Siano V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili, disgiunti e tali che $V \cup W$ sia misurabile. Si provi che se $m(V \cup W) < \infty$ allora
$$m(V \cup W) < m^*(V) + m^*(W).$$

5. Dato un insieme numerabile X, si costruisca una funzione di scelta per X.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 1

Esercizi del paragrafo 1.1

Esercizi del paragrafo 1.2

Esercizi del paragrafo 1.3

Esercizi del paragrafo 1.4

Esercizi del paragrafo 1.5

Esercizi del paragrafo 1.6

Esercizi del paragrafo 1.7

Esercizi del paragrafo 1.8

Capitolo 2

Misure

2.1 Spazi misurati

La misura di Lebesgue è il modello concreto a cui si ispira la nozione astratta di misura che stiamo per introdurre. Lo studio delle misure astratte ha svariate applicazioni in analisi funzionale, in probabilità, in calcolo delle variazioni ed in altri campi ancora.

Definizione 2.1.1 *Uno* spazio misurabile *è una coppia $(X, \mathcal{F})$, ove X è un insieme e $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X. I sottoinsiemi di X che appartengono a $\mathcal{F}$ si dicono* misurabili.
Uno spazio misurato *è una terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$, ove X è un insieme, $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ è una* misura, *ossia una funzione di insieme tale che*

(i) *$\mu(\emptyset) = 0$,*

(ii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ è una successione di insiemi disgiunti, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Lo spazio misurato si dice completo, *e la misura μ si dice* completa, *se ogni sottoinsieme di un insieme di $\mathcal{F}$ di misura nulla è a sua volta in $\mathcal{F}$ (ed ha misura nulla, come seguirà dalla proposizione 2.1.4).*
Lo spazio misurato si dice finito, *e la misura μ si dice* finita, *se si ha $\mu(X) < +\infty$; si dice σ-*finito, *e μ si dice σ-*finita, *se X è unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita.*

Osservazione 2.1.2 Se nella definizione 2.1.1 si sceglie in (ii) $E_n = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si deduce che $\mu(\emptyset) = 0$ oppure $\mu(\emptyset) = +\infty$. Dunque la condizione (i) non è in generale conseguenza di (ii).

Vediamo qualche esempio.

Esempi 2.1.3 **(1)** $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ è uno spazio misurato completo e σ-finito. Parimenti, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m|_{\mathcal{B}})$ è uno spazio misurato; esso è ancora σ-finito ma non è completo, perché non tutti i sottoinsiemi di un boreliano di misura nulla sono boreliani, come vedremo più in là. La misura $m|_{\mathcal{B}}$ è detta *misura di Borel.*

(2) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue, la funzione $\lambda(E) = m(A \cap E)$ è una misura su $\mathcal{M}$; $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ è uno spazio misurato σ-finito, ed è finito se e solo se $m(A) < \infty$. Tutti gli insiemi disgiunti da A hanno misura nulla, quindi in generale questo spazio misurato non è completo. Si dice che la misura λ è *concentrata* sull'insieme A.

(3) *(Misura di Lebesgue-Stieltjes)* Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a sinistra, cioè tale che $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = g(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Ripetiamo la procedura seguita per costruire la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, con l'unica differenza di attribuire agli intervalli una diversa lunghezza: precisamente, definiamo la lunghezza l_g sugli intervalli aperti a destra, ponendo

$$l_g([a, b[) = g(b) - g(a),$$

e convenendo di porre $g(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$.
Poi introduciamo la misura esterna μ_g^* su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ in analogia con il caso di m^*, cioè definendo

$$\mu_g^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} l_g(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \,,\ I_n \text{ intervalli aperti a destra} \right\}.$$

Dopo aver provato, in perfetta analogia con il caso di m^*, che μ_g^* è monotona e numerabilmente subadditiva, si introduce la classe $\mathcal{M}_g$ degli insiemi μ_g-misurabili:

$$\mathcal{M}_g = \{E \subseteq \mathbb{R} : \mu_g^*(A) = \mu_g^*(A \cap E) + \mu_g^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Si verifica, come per il caso della misura di Lebesgue, che $\mathcal{M}_g$ è una σ-algebra contenente i boreliani, ed infine si definisce la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_g come la restrizione di μ_g^* alla classe $\mathcal{M}_g$. Si dimostra allora, senza modifiche rispetto al caso di m, che $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_g, \mu_g)$ è uno spazio misurato completo e σ-finito (è finito se e solo se la funzione g è limitata su $\mathbb{R}$).
Questa stessa costruzione si può fare in un fissato intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ per ogni funzione $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ crescente e continua a sinistra (e non è restrittivo supporre che $g(a) = 0$): la corrispondente misura di Lebesgue-Stieltjes sarà finita quando $\lim_{t \to b^-} g(t) < +\infty$, mentre sarà σ-finita allorché tale limite vale $+\infty$. Nel primo caso, ponendo $\mu_g(\{b\}) = 0$, la misura μ_g viene estesa a tutto $[a, b]$, o più precisamente alla σ-algebra $\overline{\mathcal{M}_g} \subset \mathcal{P}([a, b])$ definita da

$$\overline{\mathcal{M}_g} = \mathcal{M}_g \cup \{E \cup \{b\} : E \in \mathcal{M}_g\}.$$

Ritroveremo questa famiglia di misure più avanti nel corso.

(4) Sia X un insieme infinito, e poniamo per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$

$$n(E) = \begin{cases} \#(E) & \text{se } E \text{ è un insieme finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito,} \end{cases}$$

ove $\#(E)$ denota la cardinalità di E. Si ottiene così lo spazio misurato $(X, \mathcal{P}(X), n)$, che è completo; esso inoltre è σ-finito se e solo se X è numerabile.

(5) *(Misura di Dirac)* Sia X un insieme non vuoto, sia $x \in X$. Per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$ poniamo

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin E \\ 1 & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

Lo spazio misurato $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ è completo e finito.

(6) Uno spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ tale che $\mu(X) = 1$ si chiama *spazio probabilizzato*, la misura μ si chiama *probabilità* e gli elementi di $\mathcal{F}$ sono gli *eventi*. Il numero $\mu(E) \in [0, 1]$ è la probabilità che l'evento E si realizzi; se in particolare $\mu(E) = 1$ si dice che l'evento E è verificato *quasi certamente*.

(7) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi. Per ogni $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sia

$$\nu(E) = \sum_{n\in E} a_n \,.$$

Lo spazio misurato $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ è completo e σ-finito; è finito se e solo se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è convergente. In tal caso, se si normalizza la successione $\{a_n\}$ ponendo

$$p_n = \frac{a_n}{\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k},$$

la misura $\mu(E) = \sum_{n\in E} p_n$ è una *probabilità discreta*.

(8) Sia X un insieme più che numerabile, e sia

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X : E, \text{ oppure } E^c, \text{ è numerabile}\};$$

si verifica subito che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Per $E \in \mathcal{F}$ poniamo

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ è numerabile} \\ +\infty & \text{se } E^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

È facile verificare che μ è una misura; lo spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è completo ma non σ-finito.

Si estendono al caso astratto le tipiche proprietà dimostrate nel caso della misura di Lebesgue. In particolare:

Proposizione 2.1.4 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora μ è monotona su $\mathcal{F}$, cioè $\mu(E) \leq \mu(F)$ per $E, F \in \mathcal{F}$ ed $E \subseteq F$.*

Dimostrazione Essendo $F = E \cup (F \setminus E)$, la tesi segue dall'additività e positività di μ. □

Proposizione 2.1.5 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$.*

(i) *Se* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *per ogni* n*, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(ii) *Se* $E_n \supseteq E_{n+1}$ *per ogni* n*, ed esiste* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che* $\mu(E_{n_0}) < \infty$*, allora*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione Come nel caso della misura di Lebesgue (proposizione 1.7.2). □

Esercizi 2.1

1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato non completo. Si consideri la famiglia $\mathcal{F}_0$ dei sottoinsiemi di X della forma $A \cup B$, ove $A \in \mathcal{F}$ e B è sottoinsieme di un opportuno insieme $B_0 \in \mathcal{F}$ (variabile al variare di B) avente misura nulla. Si provi che $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra; si definisca poi

$$\mu_0(A \cup B) = \mu(A) \qquad \forall E = A \cup B \in \mathcal{F}_0 :$$

   si verifichi che μ_0 è ben definita, che $\mu_0|_{\mathcal{F}} = \mu$, che μ_0 è una misura su $\mathcal{F}_0$ e che $(X, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ è uno spazio misurato completo. Si mostri inoltre che se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è σ-finito, anche $(X, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ è σ-finito.

2. Sia X un insieme più che numerabile, sia $\mathcal{F}$ la σ-algebra dell'esempio 2.1.3 (8), e definiamo per $E \in \mathcal{F}$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ è numerabile} \\ 1 & \text{se } E^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

   Si provi che $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato completo e finito.

3. Sia $\{\mu_n\}$ una successione di misure definite su una σ-algebra $\mathcal{F}$, tale che $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $E \in \mathcal{F}$. Si provi che la funzione

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \qquad \forall E \in \mathcal{F}$$

   è una misura su $\mathcal{F}$.

4. Sia X un insieme e sia $\{X_n\}$ una famiglia di sottoinsiemi disgiunti di X la cui unione è X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X_n. Posto

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n : E_n \in \mathcal{F}_n \right\},$$

   si provi che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X.

5. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se A, B, C sono elementi di $\mathcal{F}$ con $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, e se $\mu(A) = \mu(C) < \infty$, si mostri che

$$\mu(A \cap B) = \mu(B).$$

6. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato finito. Definiamo su $\mathcal{F}$ la relazione

$$E \simeq F \iff \mu(E \bigtriangleup F) = 0,$$

ove $E \bigtriangleup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ è la differenza simmetrica fra E ed F definita nell'esercizio 1.7.7.

(i) Si verifichi che $\simeq$ è una relazione di equivalenza.

(ii) Posto $\Lambda = \mathcal{F}/\simeq$, si provi che

$$d(E, F) = \mu(E \bigtriangleup F)$$

è una distanza su Λ.

(iii) Si dimostri che (Λ, d) è uno spazio metrico completo.

[**Traccia:** per (iii), data una successione di Cauchy $\{E_n\} \subseteq \Lambda$, si provi che per un'opportuna sottosuccessione $\{E_{n_k}\}$ si ha $\mu(E_m \bigtriangleup E_{n_k}) < 2^{-k}$ per ogni $m > n_k$, e se ne deduca che $\mu(E_{n_k} \bigtriangleup E) \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow \infty$, ove $E = \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}$ (v. esercizio 1.7.3); a questo scopo, può essere utile notare che $\bigcup_{k=m}^{\infty}(E_{n_k} \setminus E_{n_h}) \subseteq (E_{n_m} \setminus E_{n_h}) \cup \bigcup_{k=m+1}^{\infty}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}})$.]

7. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$E_n = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \ 0 \le r \le 1, \ \theta \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}](s_n + 2k)\pi, (s_{n+1} + 2k)\pi[\right\},$$

ove $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Determinare gli insiemi $\limsup_{n\to\infty} E_n$ e $\liminf_{n\to\infty} E_n$.

8. Si provi che non si può costruire alcuna misura su $\mathbb{R}$ in modo che valgano le proprietà 1, 2, 3 e 4 del paragrafo 1.2.

9. Sia $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ una misura tale che:

(i) $\mu([0, 1]) = \lambda \in [0, +\infty[$, (ii) μ è invariante per traslazioni.

Si provi che $\mu = \lambda m$, ove m è la misura di Lebesgue.

2.2 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Per definire la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ occorre ripetere la procedura svolta nel Capitolo 1 e riassunta nell'esempio 2.1.3 (3). Si definisce anzitutto il *volume* N-dimensionale dei *parallelepipedi* $R = \prod_{i=1}^N I_i$, ove gli I_i sono intervalli di $\mathbb{R}$:

$$v_N(R) = \prod_{i=1}^N \ell(I_i),$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$, necessaria ad attribuire volume nullo, ad esempio, ai sottospazi k-dimensionali di $\mathbb{R}^N$.
Poi si introduce la misura esterna N-dimensionale m_N^* di un arbitrario insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(R_n) : \; E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n, \; R_n \text{ parallelepipedi aperti} \right\}.$$

Si osserva che la definizione di m_N^* non cambia se i ricoprimenti sono fatti con parallelepipedi qualsiasi anziché aperti, e si verifica che m_N^* estende v_N, ed è monotona, nulla sull'insieme vuoto, numerabilmente subadditiva ed invariante per traslazioni.
A questo punto si introduce la classe $\mathcal{M}_N$ degli insiemi misurabili:

$$\mathcal{M}_N = \{E \subseteq \mathbb{R}^N : m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\},$$

la quale è una σ-algebra contenente i parallelepipedi, e quindi anche gli aperti ed i chiusi. Dunque $\mathcal{M}_N$ contiene la σ-algebra $\mathcal{B}_N$ dei boreliani di $\mathbb{R}^N$.
Si definisce infine la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ come la restrizione di m_N^* a $\mathcal{M}_N$:

$$m_N(E) = m_N^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}_N,$$

e si dimostra che m_N è numerabilmente additiva. Quindi $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$ è uno spazio misurato che risulta completo e σ-finito. Tutte queste cose si provano esattamente come nel caso della misura di Lebesgue unidimensionale.
Ritroveremo poi la misura m_N come "misura prodotto" di N copie della misura di Lebesgue m, e ciò ci permetterà di dare una formula per il calcolo degli integrali multipli come integrali semplici iterati.

Esercizi 2.2

1. Si definisca
$$\mathcal{R} = \{E \times F : \quad E, F \in \mathcal{M}\}.$$
   (i) Si verifichi che $\mathcal{R}$ non è un'algebra, ma che la famiglia $\mathcal{A}$ costituita dalle unioni finite di elementi di $\mathcal{R}$ lo è.

   (ii) Detta $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ (ossia la minima σ-algebra che contiene $\mathcal{A}$), si provi che se $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ allora
$$\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{M} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$
$$\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{M} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si provi che la σ-algebra $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ è contenuta propriamente in $\mathcal{M}_2$.

2. Dimostrare che
$$m_N^*(tE) = t^N m_N^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 Misure esterne di Hausdorff

La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ non fa distinzioni fra i suoi sottoinsiemi misurabili di misura nulla: un iperpiano $(N-1)$-dimensionale, il sostegno di una curva, una k-varietà sono tutti insiemi "trascurabili" rispetto a m_N. Le misure di Hausdorff H_p (ove $p > 0$) permettono invece di "catalogare" gli insiemi di misura nulla attribuendo loro una "dimensione" che può essere intera (1 per il sostegno di una curva, k per le k-varietà) od anche non intera nel caso di certi insiemi frattali (esempio 2.5.3).
Come la misura di Lebesgue, le misure di Hausdorff si costruiscono tramite i ricoprimenti: tuttavia la nozione base non è quella di volume, ma quella di diametro di un insieme.

Definizione 2.3.1 *Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il* diametro *di E è il numero (eventualmente $+\infty$)*
$$\text{diam } E = \begin{cases} 0 & se\ E = \emptyset \\ \sup\{|x-y|_N :\ x, y \in E\} & se\ E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Per definire le misure di Hausdorff bisogna ancora una volta cominciare dalle misure esterne. Siano $p, \delta > 0$ e consideriamo per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ le quantità
$$H_{p,\delta}^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^p :\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,\ U_n \text{ aperti},\ \text{diam } U_n < \delta \right\}.$$

Per misurare bene gli insiemi "frastagliati" quelli che contano sono i ricoprimenti con diametri piccoli: infatti più δ è piccolo, più la quantità $H_{p,\delta}^*(E)$ è grande, essendo l'estremo inferiore di un insieme più piccolo. La valutazione "ottimale" della misura di E si otterrà al limite per $\delta \longrightarrow 0^+$ (vedere anche l'esercizio 2.3.5).

Definizione 2.3.2 *Sia $p > 0$. La* misura esterna di Hausdorff *$H_p^*(E)$ è la quantità*
$$H_p^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}^*(E) = \sup_{\delta>0} H_{p,\delta}^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Si noti che, in effetti, la definizione di H_p^* dipende anche da N, cioè dalla dimensione dello spazio ambiente, perché coinvolge l'uso di aperti di $\mathbb{R}^N$; d'altronde questo fatto è irrilevante, nel senso che le misure esterne di Hausdorff di indice p costruite su $\mathbb{R}^N$ e su $\mathbb{R}^M$ coincidono per $p \leq \min\{N, M\}$ (esercizio 2.3.2). Nel seguito, comunque, prenderemo in considerazione solo i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, con N fissato.
Come conseguenza immediata della definizione si ha:

Proposizione 2.3.3 *Sia $p > 0$. Allora:*

(i) *$H_p^*(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;*

(ii) *$H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$;*

(iii) *H_p^* è monotona.*

Dimostrazione **(i)** Evidente.
(ii) Un ricoprimento di $\emptyset$ e di $\{x\}$ è la famiglia costituita dalla sola palla $B(x, \frac{\delta}{3})$ il cui diametro è minore di δ; dunque

$$\lim_{\delta \to 0^+} H_{p,\delta}^*(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0^+} H_{p,\delta}^*(\{x\}) = 0.$$

(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento che concorre a definire $H_{p,\delta}^*(F)$ concorre anche a definire $H_{p,\delta}^*(E)$; quindi $H_{p,\delta}^*(E) \leq H_{p,\delta}^*(F)$ per ogni $\delta > 0$, da cui $H_p^*(E) \leq H_p^*(F)$. $\square$

Proposizione 2.3.4 *Sia $p > 0$. Allora:*

(i) *$H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;*

(ii) *$H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \quad \forall t > 0,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione Si verifica facilmente che

$$H_{p,\delta}^*(E + x) = H_{p,\delta}^*(E), \qquad H_{p,\delta}^*(tE) = t^p H_{p,\frac{\delta}{t}}^*(E) \qquad \forall \delta > 0,$$

da cui la tesi per $\delta \longrightarrow 0^+$. $\square$

Si verifica inoltre (esercizio 2.3.4) che la definizione di $H_p^*(E)$ non cambia se i ricoprimenti di E si prendono qualsiasi, anziché costituiti da aperti. Infine:

Proposizione 2.3.5 *Sia $p > 0$. Allora H_p^* è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione Si prova, esattamente come per la misura esterna di Lebesgue, che

$$H_{p,\delta}^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H_{p,\delta}^*(E_n) \qquad \forall \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N);$$

osservando poi che

$$H_{p,\delta}^*(E) \leq H_p^*(E) \qquad \forall \delta > 0, \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N,$$

al limite per $\delta \longrightarrow 0^+$ si ha la tesi. $\square$

Esercizi 2.3

1. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Si provi che se $A \cap B \neq \emptyset$, allora

$$\text{diam } A \cup B \leq \text{diam } A + \text{diam } B.$$

2. Siano $N, M \in \mathbb{N}^+$ con $N < M$, e sia $p \leq N$. Si provi che per ogni sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ le misure esterne di Hausdorff di indice p costruite su $\mathbb{R}^N$ e su $\mathbb{R}^M$ coincidono.

3. Si provi che per ogni $p > 0$ i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}^N$ hanno misura esterna H_p^* nulla.

4. Si provi che la quantità $H_p^*(E)$ non cambia se si considerano ricoprimenti di E costituiti da insiemi arbitrari anziché aperti.
[**Traccia:** indicando con $\overline{H}^*_{p,\delta}(E)$ la quantità ottenuta con l'uso di ricoprimenti fatti di insiemi arbitrari, si osservi che $H^*_{p,\delta}(E) \geq \overline{H}^*_{p,\delta}(E)$; d'altra parte, se $\{V_n\}$ è un arbitrario ricoprimento di E con $0 < \text{diam}\ V_n < \delta$ e tale che $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\text{diam}\ V_n)^p < \overline{H}^*_{p,\delta}(E) + \delta$, si consideri l'aperto $U_{n,k} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, V_n) < \frac{1}{k}\}$ e si provi che per $k = k_n$ opportuno si ha $\text{diam}\ U_{n,k_n} \leq ((\text{diam}\ V_n)^p + 2^{-n-1}\delta)^{1/p}$. Pertanto il ricoprimento aperto $\{U_{n,k_n}\}$ è tale che $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\text{diam}\ U_{n,k_n})^p \leq \overline{H}^*_{p,\delta}(E) + 2\delta$); se ne deduca la tesi.]

5. Si consideri la definizione di $H^*_{p,\delta}$ nel caso $p = 0$, con l'avvertenza di porre $H^*_{0,\delta}(\emptyset) = 0$ e di prendere ricoprimenti finiti o numerabili, ma con aperti non vuoti. Si descriva la misura esterna H_0^*.

6. Sia
$$\underline{H}_p^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(\text{diam}\ U_n)^p : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\};$$
si provi che $H_p^*(E) \geq \underline{H}_p^*(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, ma che in generale non vale l'uguaglianza.

7. Dimostrare che $H_1^*(E) = m^*(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$.
[**Traccia:** si verifichi che $m^*(E) \leq H_1^*(E)$. Per provare l'altra disuguaglianza si consideri dapprima il caso in cui E è un intervallo limitato, e poi si passi al caso generale usando la numerabile subadditività di H_1^*.]

8. Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che
$$\text{dist}(E, F) = \inf\{|x - y|_N : \ x \in E, \ y \in F\} > 0.$$
Si provi che
$$H_p^*(E \cup F) = H_p^*(E) + H_p^*(F).$$
[**Traccia:** si provi che vale l'uguaglianza per la funzione $H^*_{p,\delta}$, non appena δ è sufficientemente piccolo.]

9. Sia S il segmento di estremi x, y, con $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati. Si provi che
$$H_p^*(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } p > 1 \\ |x - y|_N & \text{se } p = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < p < 1. \end{cases}$$

10. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 = 1\}$. Si dia una stima dall'alto e dal basso per $H_1^*(B)$.

11. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ allora $H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana. Si provi che se $p \in [0, \infty[$ si ha
$$H_p^*(f(E)) \leq K^p H_p^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^m,$$
ove K è la costante di Lipschitz di f.

13. Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $E \subseteq X$ è un insieme non vuoto, il diametro di E è definito, analogamente al caso di $\mathbb{R}^N$, da
$$\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} d(x, y).$$
   (i) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di X tale che $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si provi che
$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$
   (ii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di X tale che $A_n \supseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si provi che
$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$
   (iii) Si trovi un esempio in cui $A_n \supseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e
$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$

2.4 Misure di Hausdorff

Introduciamo adesso gli insiemi misurabili rispetto alla misura di Hausdorff di indice $p > 0$.

Definizione 2.4.1 *La classe degli insiemi H_p-misurabili è*
$$\mathcal{H}_p = \{E \subseteq \mathbb{R}^N : H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\}.$$

Naturalmente, in questa definizione quella che conta è la disuguaglianza $\geq$.
Come si è fatto per la classe $\mathcal{M}$, si verifica che $\mathcal{H}_p$ è una σ-algebra e che la *misura di Hausdorff* di indice p, definita da $H_p = H_p^*|_{\mathcal{H}_p}$, è numerabilmente additiva sugli elementi di $\mathcal{H}_p$. Inoltre, $\mathcal{H}_p$ contiene i boreliani di $\mathbb{R}^N$: ciò è conseguenza della seguente

Proposizione 2.4.2 *I parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$ sono elementi di $\mathcal{H}_p$ per ogni $p > 0$.*

Dimostrazione Ogni parallelepipedo $P \subseteq \mathbb{R}^N$ può scriversi come unione numerabile di parallelepipedi chiusi e limitati; quindi basta provare che ogni parallelepipedo chiuso e limitato, dunque del tipo $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$, appartiene a $\mathcal{H}_p$. Poniamo

$$P_n = \prod_{i=1}^N \left[a_i - \frac{1}{n+1}, b_i + \frac{1}{n+1} \right], \qquad n \in \mathbb{N},$$

e sia A un insieme test. Occorre provare la disuguaglianza

$$H_p^*(A) \geq H_p^*(A \cap P) + H_p^*(A \cap P^c),$$

che è ovvia se $H_p^*(A) = \infty$; supporremo quindi $H_p^*(A) < \infty$.
Notiamo che, detto $A_n = A \cap P_n^c$, si ha

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad \mathrm{dist}(A_n, P) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \cap P^c.$$

Dunque, per la monotonia di H_p^* e per l'esercizio 2.3.8,

$$H_p^*(A) \geq H_p^*\left((A \cap P) \cup A_n\right) = H_p^*(A \cap P) + H_p^*(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, essendo $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni n,

$$H_p^*(A) \geq H_p^*(A \cap P) + \lim_{n \to \infty} H_p^*(A_n).$$

Mostriamo che

$$\lim_{n \to \infty} H_p^*(A_n) \geq H_p^*(A \cap P^c);$$

ciò proverà la relazione

$$H_p^*(A) \geq H_p^*(A \cap P) + H_p^*(A \cap P^c),$$

e quindi la tesi.
Poniamo $D_n = A_{n+1} \setminus A_n$: allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha l'uguaglianza

$$A \cap P^c = A_n \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \ ,$$

e dunque, per la numerabile subadditività di H_p^*,

$$H_p^*(A \cap P^c) \leq H_p^*(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} H_p^*(D_k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Verificheremo fra poco che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} H_p^*(D_k)$ è convergente; quindi passando al limite per $n \to \infty$ si ricava

$$H_p^*(A \cap P^c) \leq \lim_{n \to \infty} H_p^*(A_n),$$

come si voleva.
Proviamo la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} H_p^*(D_k)$: scriviamo

$$\sum_{k=0}^{m} H_p^*(D_k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} H_p^*(D_{2k}) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} H_p^*(D_{2k+1}), \quad m \in \mathbb{N},$$

ed osserviamo che $\operatorname{dist}(D_k, D_{k+2}) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi utilizzando nuovamente l'esercizio 2.3.8 otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} H_p^*(D_{2k}) = H_p^*\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} D_{2k}\right), \qquad \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} H_p^*(D_{2k+1}) = H_p^*\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} D_{2k+1}\right).$$

Essendo inoltre

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} D_{2k}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} D_{2k+1}\right) = \bigcup_{k=0}^{m} D_k \subseteq A_{m+1} \subseteq A,$$

si deduce finalmente che $\sum_{k=0}^{m} H_p^*(D_k) \leq H_p^*(A) < \infty$.
La misurabilità del parallelepipedo P è completamente dimostrata. $\square$

Esercizi 2.4

1. Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una curva semplice di classe C^1 con sostegno Γ. Si provi che $\Gamma \in \mathcal{H}_1$ e che $H_1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$.
   [**Traccia:** si osservi anzitutto che Γ è chiuso, quindi $\Gamma \in \mathcal{H}_1$. Per provare $\geq$, fissato $\delta > 0$ si mostri che se $\sigma : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ è una suddivisione di $[a, b]$ sufficientemente fine, allora si ha $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N < \delta$ e, per ogni i, la palla B_i di centro $\frac{\varphi(t_i)+\varphi(t_{i-1})}{2}$ e diametro $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N$ contiene $\Gamma_i = \varphi([t_{i-1}, t_i])$. Se ne deduca che se δ è piccolo si ha $H_{1,\delta}(\Gamma) \leq \ell(\Gamma)$. Per provare $\leq$, fissato $\varepsilon > 0$ si determini $\delta > 0$ ed un ricoprimento $\{U_n\}$ di Γ con $\operatorname{diam} U_n < \delta$, tale che $\sum_n \operatorname{diam} U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon$. Si estragga un opportuno sottoricoprimento finito $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}\}$ e si costruisca una suddivisione $\sigma : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ tale che $\sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam} U_{n_i}$; si concluda, utilizzando la continuità di φ', che se δ è sufficientemente piccolo si ha $\ell(\Gamma) \leq H_1(\Gamma) + 2\varepsilon$.]

2.5 Dimensione di Hausdorff

Analizziamo adesso il comportamento di H_p^* al variare di $p > 0$. Notiamo anzitutto che, per l'esercizio 2.3.11, $H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$; quindi ci interessano i valori di p compresi fra 0 e N.

Proposizione 2.5.1 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$. Risulta:*

(i) *se* $H^*_p(E) < \infty$*, allora* $H^*_q(E) = 0$ *per ogni* $q \in]p, N]$*;*

(ii) *se* $H^*_p(E) > 0$*, allora* $H^*_q(E) = \infty$ *per ogni* $q \in]0, p[$ *.*

Dimostrazione Sia $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto di E. Se $s > r > 0$ e se diam $U_n < \delta$ si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^s < \delta^{s-r} \sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^r,$$

cosicché

$$H^*_{s,\delta}(E) \leq \delta^{s-r} H^*_{r,\delta}(E) \qquad \forall s > r > 0.$$

I due enunciati seguono allora facilmente, scegliendo $r = p$ e $s = q$ nel primo caso, $r = q$ e $s = p$ nel secondo. $\square$

Dunque, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $p \mapsto H^*_p(E)$ "decresce" con p, nel senso che, se non è identicamente $H^*_p(E) = 0$, esiste $p_0 \in]0, N]$ tale che

$$H^*_p(E) \begin{cases} = \infty & \text{se } 0 < p < p_0 \\ \in [0, \infty] & \text{se } p = p_0 \\ = 0 & \text{se } p > p_0. \end{cases}$$

Questo comportamento di H^*_p ci induce alla seguente

Definizione 2.5.2 *Si chiama* dimensione di Hausdorff *di un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}^N$*, e si indica con* $\dim_H(E)$*, il numero*

$$\dim_H(E) = \inf\{p > 0 : H^*_p(E) = 0\}.$$

Ovviamente, la dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è compresa fra 0 e N (estremi inclusi).

Esempio 2.5.3 Calcoliamo la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor $C = C_{1/3} \subset \mathbb{R}$ introdotto nel paragrafo 1.6. Anzitutto osserviamo che si ha $C = C^1 \cup C^2$, con C^1 e C^2 "copie" di C rimpicciolite di un fattore $\frac{1}{3}$: precisamente si ha $C_1 = \frac{1}{3}C$ e $C^2 = C^1 + \frac{2}{3}$. Per la proposizione 2.3.4(ii) si deduce $H_p(C) = H_p(C^1) + H_p(C^2) = \frac{2}{3^p} H_p(C)$, e quindi se $H_p(C) \in]0, \infty[$ deve essere $\frac{2}{3^p} = 1$, cioè $p = \frac{\log 2}{\log 3}$.
Poniamo allora $d = \frac{\log 2}{\log 3}$. Proveremo che d è davvero la dimensione di Hausdorff di C facendo vedere che $H_d(C) = 1$.
Sia $\delta > 0$: poiché $\text{dist}(C^1, C^2) > 0$, risulta per omotetia e traslazione

$$\begin{aligned} H^*_{d,\delta/3}(C) &= H^*_{d,\delta/3}(C^1) + H^*_{d,\delta/3}(C^2) = \\ &= H^*_{d,\delta/3}(\frac{1}{3}C) + H^*_{d,\delta/3}(C^1 + \frac{2}{3}) = \\ &= \frac{1}{3^d} H^*_{d,\delta}(C) + \frac{1}{3^d} H^*_{d,\delta}(C) = H^*_{d,\delta}(C). \end{aligned}$$

Ciò implica che la quantità $H^*_{d,\delta}(C)$ non dipende da δ, e pertanto

$$H_d(C) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{d,\delta}(C) = H^*_{d,1}(C).$$

Scegliendo il ricoprimento costituito dal singolo aperto $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ si vede immediatamente che $H^*_{d,1}(C) \le 1+2\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$: si conclude che $H_d(C) \le 1$.
Dimostriamo che $H_d(C) \ge 1$. A questo scopo, sia $\delta > 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di C tale che

$$\operatorname{diam}(U_n) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_n))^d < H^*_{d,\delta}(C) + \varepsilon.$$

Andiamo a costruire un ricoprimento aperto finito $\{W_1, \ldots, W_N\}$ di C (con $\operatorname{diam}(W_i)$ non necessariamente minore di δ), tale che

$$1 \le \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam}(W_i))^d \le \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_n))^d.$$

Fatto ciò, la tesi si otterrà osservando che

$$1 - \varepsilon \le \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_n))^d - \varepsilon < H^*_{d,\delta}(C) \le H_d(C) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per costruire i W_i, anzitutto estraiamo da $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per compattezza, un sottoricoprimento finito $\{U'_1, \ldots, U'_h\}$; si può anche supporre che esso sia minimale, nel senso che, togliendo uno degli U'_j, gli altri non ricoprono più C. Consideriamo l'aperto $U'_1 \cap U'_2$: se esso è non vuoto, sostituiamo la coppia $\{U'_1, U'_2\}$ con il singolo aperto $V_1 = U'_1 \cup U'_2$. Si ha allora, essendo $0 < d < 1$,

$$(\operatorname{diam}(V_1))^d \le (\operatorname{diam}(U'_1) + \operatorname{diam}(U'_2))^d \le (\operatorname{diam}(U'_1))^d + (\operatorname{diam}(U'_2))^d;$$

iterando questo argomento con la coppia $\{V_1, U'_3\}$, e così via, si genera un nuovo ricoprimento finito $\{V_1, \ldots, V_N\}$ di C, fatto di aperti *disgiunti*, tale che

$$\sum_{k=1}^{N} (\operatorname{diam}(V_k))^d \le \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_n))^d.$$

Adesso osserviamo che l'aperto $\bigcup_{k=1}^{N} V_k$ contiene C, e che $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, ove C_k è ciò che resta dopo il k-simo passo nella costruzione dell'insieme di Cantor: ricordiamo che $C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} J^k_j$, ove gli J^k_J sono intervalli chiusi disgiunti, di ampiezza 3^{-k}, tali che $\operatorname{dist}(J^k_j, J^k_{j+1}) \ge 3^{-k}$; in particolare si ha $C_k \supset C_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Un facile ragionamento mostra che deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\bigcup_{k=1}^{N} V_k \supseteq C_\nu$. Poiché C_ν ha 2^ν componenti connesse, e gli aperti V_k sono disgiunti, ciascuna componente connessa di C_ν deve essere coperta da un singolo V_k, cosicché si ha necessariamente $N \le 2^\nu$.
D'altra parte, se un fissato V_k ricopre $J^\nu_j \cup J^\nu_{j+1}$, si avrà in particolare

$$\operatorname{diam}(V_k) \ge \operatorname{diam}(J^\nu_j) + \operatorname{diam}(J^\nu_{j+1}) + \operatorname{dist}(J^\nu_j, J^\nu_{j+1}) \ge 3^{1-\nu}.$$

Sostituiamo allora V_k con una coppia di aperti disgiunti W_1 e W_2, tali che

$$W_1 \supset J_j^\nu\,, \quad W_2 \supset J_{j+1}^\nu\,, \qquad \mathrm{diam}(W_1) < 3^{-\nu} + \sigma, \quad \mathrm{diam}(W_2) < 3^{-\nu} + \sigma,$$

ove $\sigma > 0$ è scelto in modo che si abbia

$$(\mathrm{diam}(W_1))^d + (\mathrm{diam}(W_2))^d < (\mathrm{diam}(V_k))^d :$$

ciò è possibile poiché, scelto $\eta \in]0, \mathrm{diam}(V_k) - 3^{1-\nu}[$, si verifica facilmente che vale la relazione

$$(\mathrm{diam}(W_1))^d + (\mathrm{diam}(W_2))^d < 2(3^{-\nu} + \sigma)^d < (3^{1-\nu} + \eta)^d < (\mathrm{diam}(V_k))^d$$

pur di prendere $\sigma \in]0, 2^{-1/d}\eta[$.
In questo modo si rimpiazzano tutti gli aperti V_k che contengono più di un intervallo J_j^ν. Si ottiene così una famiglia $\{W_1, \ldots, W_M\}$ di aperti disgiunti, tali che

$$\sum_{h=1}^{M} (\mathrm{diam}(W_h))^d \le \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{diam}(V_k))^d \le \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{diam}(U_n))^d.$$

Inoltre, dato che ognuno dei W_h contiene esattamente uno dei J_j^ν, deve essere $M = 2^\nu$; pertanto

$$\sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(W_h))^d \ge \sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(J_j^\nu))^d = \sum_{h=1}^{2^\nu} 3^{-d\nu} = 2^\nu 3^{-d\nu} = 1.$$

Ciò prova che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{diam}(U_n))^d \ge \sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(W_h))^d \ge 1$$

e quindi, come si è osservato, si ha $H_d(C) \ge 1$.

Esercizi 2.5

1. Si provi che per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$\dim_H(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } H_p^*(E) = 0 \ \ \forall p > 0, \\ \sup\{p > 0 : H_p^*(E) = +\infty\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si dimostri che se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\dim_H\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(E_n).$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ una funzione α-hölderiana, ossia tale che

$$|f(x) - f(x')|_m \le K|x - x'|_N^\alpha \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N$$

con $K \geq 0$ e $\alpha \in]0,1]$ costanti fissate. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ allora

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E).$$

Se ne deduca che se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è bi-lipschitziana, ossia

$$K_1|x - x'|_N \leq |f(x) - f(x')|_N \leq K_2|x - x'|_N \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N,$$

allora per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha $\dim_H(f(E)) = \dim_H(E)$.

4. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è tale che $\dim_H(E) < 1$, allora E è totalmente sconnesso. [**Traccia:** fissati $x, x' \in E$, si consideri la funzione $f(z) = |z - x|_N$ e si osservi che, per l'esercizio precedente, $\dim_H(f(E)) < 1$; si utilizzi infine il fatto che $f(E)^c$ è denso in $\mathbb{R}$ per costruire due diverse componenti connesse che contengano rispettivamente x e x'.]

5. Fissato $s \in]0,1[$, si consideri l'insieme Γ_s costruito, analogamente al caso dell'insieme di Cantor descritto nel paragrafo 1.6, nel modo seguente: al primo passo si toglie da $[0,1]$ un intervallo centrale di ampiezza s; nei passi successivi si toglie da ciascun intervallino residuo di lunghezza ℓ la parte centrale di ampiezza pari a $s\ell$. Si provi che $m(\Gamma_s) = 0$ e che

$$\dim_H(\Gamma_s) = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-s}}.$$

[**Traccia:** adattare l'argomentazione relativa all'esempio 2.5.3.]

2.6 La misura H_N in $\mathbb{R}^N$

Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$, che relazione c'è fra la sua misura di Hausdorff H_N e la sua misura di Lebesgue m_N? Vedremo ora che le due quantità coincidono a meno di una costante moltiplicativa.

Teorema 2.6.1 *Esiste una costante α_N tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha*

$$H_N^*(E) = \alpha_N m_N^*(E).$$

Tale costante vale

$$\alpha_N = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right),$$

ove Γ è la funzione di Eulero:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \qquad p > 0.$$

Dimostrazione Proveremo solo l'esistenza della costante α_N, senza calcolarla esattamente, perché ciò richiede strumenti troppo sofisticati per noi (salvo che quando $N = 1$, nel qual caso si rimanda all'esercizio 2.3.7).
Sia $C_0 = [0,1[^N$. Fissato $\delta > 0$ e scelto $n > \frac{\sqrt{N}}{\delta}$, possiamo ricoprire C_0 con n^N cubi della forma

$$\prod_{i=1}^{N} \left[\frac{r_i - 1}{n}, \frac{r_i}{n}\right[\qquad (r_1, \ldots, r_N \in \{1, 2, \ldots n\}).$$

Dato che tali cubi hanno diametro $\frac{\sqrt{N}}{n} < \delta$, ricordando l'esercizio 2.3.4 otteniamo $H^*_{N,\delta}(C_0) \leq (\sqrt{N})^N$ per ogni $\delta > 0$, e dunque

$$H_N(C_0) \leq (\sqrt{N})^N.$$

Sia ora $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un arbitrario ricoprimento di C_0 con $\operatorname{diam} U_n < \delta$: ciascun U_n può essere ricoperto da una palla di diametro pari a $2 \operatorname{diam} U_n$, e quindi da un cubo C_n di lato $2 \operatorname{diam} U_n$ e con gli spigoli paralleli agli assi coordinati. Dato che

$$C_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \ ,$$

avremo

$$1 = m_N(C_0) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^N (\operatorname{diam} U_n)^N,$$

ossia

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^N \geq 2^{-N}.$$

Per l'arbitrarietà del ricoprimento, concludiamo che $H_{N,\delta}(C_0) \geq 2^{-N}$, e quindi

$$H_N(C_0) \geq 2^{-N}.$$

In particolare, posto $\alpha_N = H_N(C_0)$, si ha

$$H_N(C_0) = \alpha_N = \alpha_N m_N(C_0) \in \left[2^{-N}, (\sqrt{N})^N\right] \subset]0, \infty[.$$

Grazie al fatto che H_N e m_N sono invarianti per traslazioni ed omogenee di grado N rispetto alle omotetie, otteniamo anche

$$H_N(C) = \alpha_N m_N(C)$$

per ogni cubo C con gli spigoli paralleli agli assi coordinati di $\mathbb{R}^N$.
Adesso sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$: esiste un ricoprimento di A fatto di cubi disgiunti C_j, ognuno dei quali è del tipo

$$\prod_{i=1}^{N} \left[\frac{r_i - 1}{2^m}, \frac{r_i}{2^m}\right[\qquad (r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}).$$

Un modo di costruire tale ricoprimento è descritto nell'esercizio 2.6.1. Si ha allora, grazie alla numerabile additività di H_N e m_N,

$$H_N(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} H_N(C_j) = \alpha_N \sum_{j\in\mathbb{N}} m_N(C_j) = \alpha_N m_N(A)$$

per ogni aperto A di $\mathbb{R}^N$.
Sia ora B un boreliano di $\mathbb{R}^N$ della forma

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \qquad A_n \text{ aperti,}$$

ove non è restrittivo supporre che $A_n \supseteq A_{n+1}$. Se $m_N(B) < +\infty$, utilizzando la definizione di misura esterna, è chiaro che possiamo scrivere B come intersezione numerabile di aperti A'_n di misura m_N *finita*; di conseguenza, per monotonia si ha $H_N(B) \leq H_N(A'_n) = \alpha_N m_N(A'_n) < \infty$. La proposizione 2.1.5 ci autorizza allora a concludere che

$$H_N(B) = \lim_{n\to\infty} H_N(A'_n) = \alpha_N \lim_{n\to\infty} m_N(A'_n) = \alpha_N m_N(B).$$

Se invece $m_N(B) = \infty$, posto $B_m = B\cap]-m, m[^N$, i B_m verificano la relazione precedente e quindi, al limite per $m \to \infty$, si ottiene l'uguaglianza

$$H_N(B) = \alpha_N m_N(B)$$

per ogni boreliano B che sia intersezione numerabile di aperti.
Infine, sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$: per l'esercizio 2.6.2, si possono trovare due boreliani B_1 e B_2 contenenti E, entrambi intersezione numerabile di aperti, tali che

$$H_N(B_1) = H_N^*(E), \qquad m_N(B_2) = m_N^*(E),$$

da cui, posto $B = B_1 \cap B_2$, si ha che B è un boreliano contenente E che è ancora intersezione numerabile di aperti, e per il quale risulta

$$H_N^*(E) = H_N(B) = \alpha_N m_N(B) = \alpha_N m_N^*(E).$$

Ciò prova la tesi. $\square$

Osservazione 2.6.2 Si può dimostrare (esercizio 2.6.4) che

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) = \frac{1}{m_N(B_0)},$$

ove B_0 è la palla di $\mathbb{R}^N$ di diametro unitario. Dunque il teorema precedente afferma che la differenza fra le misure N-dimensionali di Hausdorff e di Lebesgue è che la prima assegna misura 1 alla palla di diametro unitario, mentre la seconda assegna misura 1 al cubo di lato unitario.

Esercizi 2.6

1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Si provi che $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, ove i C_n sono "cubi diadici", ossia della forma

$$\prod_{i=1}^{N} \left[\frac{r_i - 1}{2^m}, \frac{r_i}{2^m}\right[, \qquad r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}.$$

[**Traccia:** detta $\mathcal{C}$ la famiglia di tali cubi, si provi che ogni $x \in A$ è contenuto in un cubo $C \in \mathcal{C}$, il quale è massimale, nel senso che non c'è nessun altro cubo $C' \in \mathcal{C}$ tale che $C \subset C' \subseteq A$; se ne deduca che tutti i cubi massimali sono disgiunti e che A ne è l'unione.]

2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si provi che:

   (i) esiste un boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $m_N^*(E) = m_N(B)$;

   (ii) esiste un boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $H_N^*(E) = H_N(B)$.

3. Si provi che per ogni $\lambda \in [0, N]$ esiste un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la cui dimensione di Hausdorff è λ.
[**Traccia:** si consideri il prodotto cartesiano Γ_s^N, ove $0 < s < \frac{1}{2}$ e Γ_s è l'insieme definito nell'esercizio 2.5.5; adattando l'argomentazione dell'esempio 2.5.3 e suggerita per l'esercizio 2.5.5, si provi che Γ_s^N ha dimensione di Hausdorff uguale a $N \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-s}}$.]

4. Detta ω_n la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, si verifichi che

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{n}\, \omega_{n-2} \quad \forall n \geq 3,$$

e se ne ricavi la formula dell'osservazione 2.6.2.

Capitolo 3

Funzioni misurabili

3.1 Definizione e proprietà

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Prima di introdurre la nozione astratta di integrale su X rispetto alla misura μ, occorre descrivere l'insieme delle funzioni per le quali l'integrale stesso ha senso.Considereremo funzioni $f : D \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ove D è un insieme misurabile, ossia un elemento di $\mathcal{F}$. Dato che si ammette che le funzioni prendano i valori $\pm\infty$, sarà utile la convenzione $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, già adoperata nel paragrafo 2.2, con la quale potremo definire l'integrale senza ambiguità.
Cominciamo con la seguente proposizione, che introduce la proprietà caratteristica delle funzioni che ci interessano.

Proposizione 3.1.1 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Sono fatti equivalenti:*

(i) $\{x \in D : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\{x \in D : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Si ha

$$\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{x \in D : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** La tesi si ha per passaggio al complementare.

(iii) $\Longrightarrow$ **(iv)** Si ha

$$\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{x \in D : f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ **(i)** La tesi si ha per passaggio al complementare. $\square$

Definizione 3.1.2 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f è detta* misurabile *su D se vale una delle condizioni della proposizione precedente (e quindi valgono tutte).*

Osservazione 3.1.3 Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio probabilizzato (esempio 2.1.3 (6)), le funzioni misurabili su X sono chiamate *variabili aleatorie*.

Vediamo qualche esempio.

Esempi 3.1.4 **(1)** Se $E \subseteq X$, la *funzione caratteristica*, od *indicatrice*, di E, è

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in E^c. \end{cases}$$

Essa è misurabile se e solo se $E \in \mathcal{F}$: infatti

$$\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1 \\ E & \text{se } \alpha \in [0, 1[\\ X & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

(2) Una *funzione semplice* è una funzione del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{k} \alpha_h \chi_{E_h}(x), \quad x \in X,$$

ove $k \in \mathbb{N}^+$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono numeri reali, $E_1, \ldots, E_k$ sono elementi di $\mathcal{F}$ e $\chi_{E_1}, \ldots, \chi_{E_k}$ sono le relative funzioni caratteristiche. Queste funzioni non si rappresentano in modo unico: ad esempio, se $X = \mathbb{R}$,

$$\chi_{[0,1]} - 2\chi_{]1,2]} = \chi_{[0,2]} - 3\chi_{]1,2]};$$

tuttavia se ne può dare una rappresentazione *canonica*: dato che esse assumono un numero finito di valori distinti $\beta_1, \ldots, \beta_r$, ponendo

$$A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \beta_i\}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

si può scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \, \chi_{A_i}(x);$$

in questo modo si rappresenta la φ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi disgiunti e "massimali", nel senso che ciascun A_i è il più grande insieme dove la φ assume il corrispondente valore β_i.
Gli A_i sono misurabili perché ottenuti dagli E_h con un numero finito di unioni, intersezioni e differenze. Dalla rappresentazione canonica di φ segue subito che φ è misurabile: se i β_i sono ordinati in modo crescente, si ha infatti

$$\{x \in X : \varphi(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=i}^{r} A_j \quad \text{se } \alpha \in [\beta_{i-1}, \beta_i[, \quad i = 2, \ldots, r,$$

mentre se $\alpha \geq \beta_r$ tale insieme è vuoto e se $\alpha < \beta_1$ tale insieme coincide con tutto X.

(3) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni continue sono misurabili. Infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\,]\alpha, \infty[\,)$ è un aperto di $\mathbb{R}$, quindi è misurabile.

(4) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni monotone sono misurabili, perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ è una semiretta.

Indicheremo con $\mathcal{M}_D$ l'insieme delle funzioni misurabili su D, con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici su X e con $\mathcal{S}_0$ l'insieme delle funzioni semplici su X che si annullano al di fuori di un insieme di misura finita.

Osservazione 3.1.5 Se $f, g \in \mathcal{M}_D$, allora $f + g$ è misurabile sull'insieme D' dove la somma stessa è ben definita, ossia

$$D' = D \setminus \{x \in D : f(x) = -g(x) = \pm\infty\}.$$

Infatti D' è misurabile ed inoltre

$$\begin{aligned}
&\{x \in D' : f(x) + g(x) > \alpha\} = \\
&\quad = \{x \in D' : g(x) = +\infty\} \cup \{x \in D' : g(x) < +\infty, f(x) > \alpha - g(x)\} = \\
&\quad = \{x \in D' : g(x) = +\infty\} \cup \\
&\qquad \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left[\{x \in D' : f(x) > r\} \cap \{x \in D' : +\infty > g(x) > \alpha - r\}\right].
\end{aligned}$$

Similmente, se $f, g \in \mathcal{M}_D$, allora il loro prodotto fg sta in $\mathcal{M}_D$ (esercizio 3.1.3).

La classe $\mathcal{M}_D$ è chiusa anche rispetto al passaggio all'estremo superiore ed all'estremo inferiore, relativi ad insiemi numerabili di indici (non per insiemi di indici qualunque: si veda l'esercizio 3.1.5).

Proposizione 3.1.6 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_D$. Allora le funzioni* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *e* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *appartengono a $\mathcal{M}_D$.*

Dimostrazione La misurabilità di $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ segue dalle uguaglianze

$$\{x \in D : \sup_n f_n > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in D : f_n(x) > \alpha\},$$

$$\{x \in D : \inf_n f_n < \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in D : f_n(x) < \alpha\};$$

la misurabilità di $\limsup_{n\to\infty} f_n$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n$ segue da quanto già provato e dalle identità

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n \sup_{m\geq n} f_m, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m. \qquad \square$$

Un'importante caratterizzazione di $\mathcal{M}_D$ è la seguente:

Proposizione 3.1.7 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Si ha $f \in \mathcal{M}_D$ se e solo se esiste $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to f$ puntualmente in D per $n \to \infty$.*

Dimostrazione $(\Longleftarrow)$ Poiché le funzioni semplici sono misurabili, la misurabilità di f segue dalla proposizione precedente.
$(\Longrightarrow)$ Sia $f \in \mathcal{M}_D$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in D$ poniamo:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) \geq n \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n2^n \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n}, \quad k = 0, -1, \ldots, -n2^n + 1 \\ -n & \text{se } f(x) \leq -n. \end{cases}$$

È facile verificare che $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ e che $\varphi_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$. $\square$

Osservazioni 3.1.8 (1) Se $f \geq 0$ in D, le funzioni φ_n sopra definite formano una successione crescente: $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in D$. Se invece $f \leq 0$, la successione $\{\varphi_n\}$ è decrescente.

(2) Se f è limitata in D, la convergenza delle φ_n è uniforme in D: infatti se $|f(x)| \leq L$, allora $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ per ogni $x \in D$ e per ogni $n \geq L$.

(3) La convergenza delle φ_n verso f è "dominata", ossia $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ per ogni $x \in D$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(4) Se l'insieme $\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile di insiemi $A_n \subseteq A_{n+1}$ misurabili di misura finita, allora rimpiazzando φ_n con $\varphi_n \chi_{A_n}$ si può supporre che ciascuna φ_n appartenga a $\mathcal{S}_0$. In tal caso valgono ancora (1) e (3), ma in generale non vale più (2).

Esercizi 3.1

1. Se f è misurabile su D, si provi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in D : f(x) = \alpha\}$ è misurabile, ma che il viceversa è falso.

2. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_D$. Si provi che l'insieme $\{x \in D : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

3. Si provi che se $f, g \in \mathcal{M}_D$ allora $fg \in \mathcal{M}_D$.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si provi che la funzione f' è misurabile nello spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

5. Sia T un insieme, e sia $\{f_t\}_{t \in T}$ una famiglia di funzioni misurabili. La funzione $\sup_{t \in T} f_t$ è in generale misurabile?

6. Si provi che in un generico spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ per ogni boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$. Si verifichi poi che la funzione $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ definita da $\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E))$ è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. (Se $\mu(X) = 1$, in linguaggio probabilistico λ è la *misura immagine*, o *legge*, della variabile aleatoria f.)
[**Traccia:** si provi che $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ è una σ-algebra contenente gli aperti.]

7. Sia $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$; per ogni $x \in \mathbb{R}$ si consideri lo sviluppo di x in base b:
$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{b^n}, \qquad \varepsilon_n(x) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$
Provare che le funzioni
$$f_n(x) = \varepsilon_n(x) \ , \qquad n \in \mathbb{N}^+,$$
sono tutte misurabili in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

8. Si provi che la σ-algebra $\mathcal{M}$ contiene propriamente la σ-algebra dei boreliani. [**Traccia:** per ogni $x \in [0,1]$ si consideri il suo sviluppo binario $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ($\varepsilon_n \in \{0,1\}$), convenendo di scegliere lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità: ad esempio, per $\frac{3}{4}$ si prenderà $0.10\overline{1}$ anziché 0.11. Posto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$, si mostri che $f([0,1]) \subseteq C_3$ e che f è iniettiva. Si usi l'esercizio 3.1.7 per verificare che f è misurabile; quindi, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ (esercizio 3.1.6). Sia $V \subset [0,1]$ non misurabile: posto $E = f(V)$, si provi che $E \in \mathcal{M}$ ma $f^{-1}(E) \notin \mathcal{M}$. Se ne deduca che $E \notin \mathcal{B}$.].

9. Sia f misurabile ed inferiormente limitata. Si costruisca una successione di funzioni semplici che converga puntualmente a f in modo crescente.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si provi che $g \circ f$ è misurabile.

11. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua allora $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. È vero il viceversa?

12. Si provi che $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se f^2 è misurabile e l'insieme $\{x \in D : f(x) > 0\}$ appartiene a $\mathcal{F}$.

13. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni da X in $\mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di X rispetto a cui le funzioni $\{f_k\}_{k \geq n}$ sono tutte misurabili. Si provi che:

    (i) $\mathcal{F}_n \supseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni n, e $\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}_n$ è una σ-algebra;

    (ii) la funzione $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, definita per gli x ove ha senso, non è in generale $\mathcal{F}$-misurabile;

    (iii) l'insieme $A = \{x \in X : \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty\}$ appartiene a $\mathcal{F}$;

    (iv) se si considerano funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$ la (iii) è in generale falsa.

14. Si provi che esistono funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, tali che l'immagine inversa $f^{-1}(E)$ di un insieme $E \in \mathcal{M}$ non è un elemento di $\mathcal{M}$. [**Traccia:** si costruisca un omeomorfismo $f : [0,1] \to [0,1]$ che trasformi C_4 in C_3, associando ciascun intervallo rimosso nella costruzione di C_4 al corrispondente intervallo rimosso nella costruzione di C_3. Si fissi poi un sottoinsieme non misurabile $W \subset C_4$ (esercizio 1.8.2) e si mostri che per $E = f(W)$ si ha $f^{-1}(E) \notin \mathcal{M}$.]

15. Si provi che esistono $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tali che $f \circ g$ non è misurabile.

16. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione boreliana, ossia $\mathcal{B}$-misurabile, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f \circ g$ è boreliana e quindi misurabile.

17. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana. Si provi che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile l'insieme $f(A)$ è misurabile e

$$m_N(f(A)) \leq K^N m_N(A),$$

ove K è la costante di Lipschitz di f.
Traccia: Si faccia uso del teorema 2.6.1 e dell'esercizio 2.3.12.]

3.2 Funzioni essenzialmente limitate

Introduciamo anzitutto una locuzione che sarà utilissima nel seguito. Essa riflette il fatto che le funzioni che coincidono al di fuori di un insieme di misura nulla sono di fatto indistinguibili dal punto di vista della teoria della misura e dell'integrale.

Definizione 3.2.1 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, sia $D \in \mathcal{F}$ e sia $p(x)$ un predicato definito per $x \in X$. Diciamo che la proprietà espressa da $p(x)$ è vera* quasi ovunque *(e scriveremo* "q.o."*) in D se l'insieme $\{x \in D : p(x)\}$ appartiene a $\mathcal{F}$ ed il suo complementare in D, cioè $\{x \in D : \neg p(x)\}$, ha misura nulla.*

Ad esempio, in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ la funzione $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ verifica $f(x) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

Osservazione 3.2.2 Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è un'altra funzione tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in D, possiamo dire che $g \in \mathcal{M}_\mathcal{D}$? In generale no (esercizio 3.2.1), ma la risposta è sì se lo spazio misurato è completo.
Infatti in tal caso, posto $A = \{x \in D : f(x) = g(x)\}$, per ipotesi $A \in \mathcal{F}$ e $\mu(D \setminus A) = 0$; d'altra parte

$$\{x \in D : g(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in D \setminus A : g(x) > \alpha\},$$

ed a secondo membro il primo insieme è misurabile dato che $A \in \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{M}_D$, mentre il secondo è misurabile grazie alla completezza, essendo incluso in $D \setminus A$ che ha misura nulla.

Introduciamo ora lo spazio delle funzioni "essenzialmente limitate".

Definizione 3.2.3 *Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se $A \subseteq D$, $A \in \mathcal{F}$, i numeri (finiti o no)*

$$\operatorname{supess}_A f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha \text{ q.o. in } A\},$$

$$\operatorname{infess}_A f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha \text{ q.o. in } A\}$$

si chiamano estremo superiore essenziale *ed* estremo inferiore essenziale *di f in A* (si conviene che $\inf \emptyset = +\infty$ e $\sup \emptyset = -\infty$).

Definizione 3.2.4 *Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se risulta* $\text{infess}_D f > -\infty$ *e* $\text{supess}_D f < +\infty$*, diremo che f è* essenzialmente limitata *in D e scriveremo $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ (anche se, più correttamente, dovremmo scrivere $\mathcal{L}^\infty(D, \mathcal{F}, \mu)$).*

È facile verificare che $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ se e solo se $f \in \mathcal{M}_D$ e $\text{supess}_D |f| < +\infty$.

Esempi 3.2.5 (1) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ la funzione $f(x) = 5\chi_\mathbb{Q}(x) + \sin x$ verifica $\text{supess}_\mathbb{R} f = 1$, $\text{infess}_\mathbb{R} f = -1$.

(2) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua allora $\text{supess}_A f = \sup_A f$ e $\text{infess}_A f = \inf_A f$ per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$. La stessa cosa non vale se A non è aperto (esercizio 3.2.6).

Osservazione 3.2.6 Per ogni $f \in \mathcal{M}_D$ si ha $f(x) \geq \text{infess}_D f$ e $f(x) \leq \text{supess}_D f$ q.o. in D (esercizio 3.2.4).

Si verifica facilmente che $\mathcal{L}^\infty(D)$ è uno spazio vettoriale e un'algebra (osservazione 3.1.5 ed esercizio 3.2.5).

Esercizi 3.2

1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato non completo. Se $f \in \mathcal{M}_X$, si provi che esiste $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ non misurabile, tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in X.

2. Si provi che se $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ allora esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A^c) = 0$ e $\text{supess}_D |f| = \sup_A |f|$.

3. Sia $f \in \mathcal{M}_D$; provare che per ogni $A \subseteq D$ si ha
$$f(x) \geq \text{infess}_A f \quad \text{e} \quad f(x) \leq \text{supess}_A f \qquad \text{q.o. in } A.$$

4. Si provi che se $f, g \in \mathcal{L}^\infty(D)$ allora $f + g, fg \in \mathcal{L}^\infty(D)$ e
$$\text{supess}_D |f + g| \leq \text{supess}_D |f| + \text{supess}_D |g|,$$
$$\text{supess}_D |fg| \leq \text{supess}_D |f| \cdot \text{supess}_D |g|.$$

5. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^\infty(D)$ una successione convergente puntualmente in D ad una funzione f. È vero che $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$?

6. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_D$ una successione tale che
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.o. in } D.$$
È vero che $f \in \mathcal{M}_D$?

7. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ σ-finito, e sia $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_D$. Se le f_n sono q.o. finite, si costruisca una successione $\{\alpha_n\}$ di numeri positivi tale che $\alpha_n f_n(x) \to 0$ q.o. in D per $n \to \infty$. [**Traccia:** supposto dapprima che $\mu(D) < \infty$, si osservi che non è restrittivo assumere che $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scelga $k_n \in \mathbb{N}$ in modo che $A_n = \{x \in D : f_n(x) > k_n\}$ abbia misura minore di 2^{-n}; si verifichi che $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Si deduca la tesi con $\alpha_n = \frac{1}{nk_n}$. Si generalizzi poi al caso $\mu(D) = \infty$.]

8. Si descriva lo spazio $\mathcal{L}^\infty(D)$ quando $D \in \mathcal{F}$ e $\mu(D) = 0$.

9. Si fornisca un esempio di funzione continua f tale che

$$\text{supess}_A f < \sup_A f$$

ove A è un opportuno sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$.

3.3 Lo spazio L^∞

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Fissato $D \in \mathcal{F}$, introduciamo nello spazio $\mathcal{L}^\infty(D)$ la seguente relazione di equivalenza:

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \quad \text{q.o. in } D;$$

le verifiche sono pressocché ovvie. A noi interesserà lo spazio quoziente rispetto a $\simeq$.

Definizione 3.3.1 *L'insieme quoziente $\mathcal{L}^\infty(D)/\simeq$ si indica con $L^\infty(D)$ (nuovamente, la notazione più appropriata sarebbe $L^\infty(D, \mathcal{F}, \mu)$).*

Osserviamo che gli elementi di $L^\infty(D)$ non sono funzioni, ma *classi di equivalenza* di funzioni q.o. coincidenti; tuttavia, come è d'uso, continueremo a chiamarle *funzioni*, confondendo in effetti la classe $[f]$ con il suo rappresentante f. Si tenga presente però che tali "funzioni" sono definite soltanto quasi ovunque e non punto per punto.
Lo spazio $L^\infty(D)$ eredita da $\mathcal{L}^\infty(D)$ la struttura di spazio vettoriale e di algebra: la somma è definita da $[f] + [g] = [f + g]$ e il prodotto da $[f] \cdot [g] = [fg]$; è immediato verificare che queste definizioni sono ben poste.
Le motivazioni per il passaggio da $\mathcal{L}^\infty$ a L^∞ sono fornite dal seguente fondamentale risultato:

Teorema 3.3.2 *Sia $D \in \mathcal{F}$. La quantità*

$$\|f\|_{\infty,D} = \text{supess}_D|f|, \qquad f \in \mathcal{L}^\infty(D),$$

è invariante rispetto alla relazione $\simeq$; essa definisce una norma su $L^\infty(D)$, ed inoltre $(L^\infty(D), \|\cdot\|_{\infty,D})$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$; se $g \simeq f$ è facile verificare che

$$\text{supess}_D|f| = \text{supess}_D|g|,$$

quindi la quantità $\|f\|_{\infty,D}$ dipende solo dalla classe $[f]$ e non da f. Verifichiamo che $\|\cdot\|_{\infty,D}$ è una norma.
(a) Ovviamente $\|f\|_{\infty,D} \geq 0$; se si ha $\|f\|_{\infty,D} = 0$ allora per l'osservazione 3.2.6 si ha $f(x) = 0$ q.o. in D, cioè $f \simeq 0$, ossia $[f]$ è l'elemento neutro della somma in $L^\infty(D)$.
(b) Si ha $\|\lambda f\|_{\infty,D} = |\lambda|\|f\|_{\infty,D}$ (facile verifica usando la definizione di estremo superiore essenziale).

(c) La subadditività di $\|\cdot\|_{\infty,D}$ segue dall'esercizio 3.2.4.
Proviamo ora la completezza dello spazio normato $(L^\infty(D), \|\cdot\|_{\infty,D})$. Per maggior chiarezza, utilizziamo la notazione $[f]$ per indicare gli elementi di $L^\infty(D)$.
Sia dunque $\{[f_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(D)$: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{\infty,D} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n \in [f_n]$; allora

$$\text{supess}_D|g_n| = \|[f_n]\|_{\infty,D}, \quad \text{supess}_D|g_n - g_m| = \|[f_n] - [f_m]\|_{\infty,D} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Posto per $n, m \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in D : |g_n(x)| > \text{supess}_D|g_n|\},$$
$$A_{nm} = \{x \in D : |g_n(x) - g_m(x)| > \text{supess}_D|g_n - g_m|\},$$

dall'osservazione 3.2.6 segue che $\mu(A_n) = \mu(A_{nm}) = 0$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$; dunque anche l'insieme

$$B = \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \cup \left[\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm}\right]$$

ha misura nulla e si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \text{supess}_D|g_n - g_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \nu, \quad \forall x \in D \setminus B.$$

Pertanto $\{g_n\}$ è una successione di $\mathcal{L}^\infty(D \setminus B)$ che è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in $D \setminus B$. Dunque esiste una funzione $g : D \setminus B \to \mathbb{R}$ tale che $g_n \to g$ uniformemente in $D \setminus B$ per $n \to \infty$. Tale g è misurabile su $D \setminus B$ perché tali sono le g_n; se prolunghiamo g a tutto D ponendola uguale a 0 in B, otteniamo che $g \in \mathcal{M}_D$. Inoltre

$$\text{supess}_D|g| \leq \sup_{D\setminus B} |g| = \sup_D |g| < \infty,$$

cosicché la classe $[g]$ individuata da g è un elemento di $L^\infty(D)$. Proviamo che $[f_n] \to [g]$ in $L^\infty(D)$:

$$\|[f_n] - [g]\|_{\infty,D} = \text{supess}_D|g_n - g| = \sup_{D\setminus B}|g_n - g| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty. \quad \square$$

Esercizi 3.3

1. Si provi che se $[f], [g] \in L^\infty(D)$ allora $[fg] \in L^\infty(D)$ e

$$\|[fg]\|_{\infty,D} \leq \|[f]\|_{\infty,D} \cdot \|[g]\|_{\infty,D}.$$

2. Sia $i : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $i(f) = [f]$. Si provi che la restrizione di i allo spazio $C^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ è iniettiva.

3. Determinare la chiusura in $L^\infty(\mathbb{R})$ degli spazi $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $C_0^0(\mathbb{R})$, ove

$$C_0^0(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) : f \text{ è nulla fuori da un compatto}\}$$

(si noti che confondiamo volutamente le $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ con le loro classi di equivalenza in $L^\infty(\mathbb{R})$).

4. Si provi che lo spazio delle funzioni semplici su X è denso in $L^\infty(X)$.

5. Si descriva lo spazio $L^\infty(D)$ quando $D \in \mathcal{F}$ e $\mu(D) = 0$.

3.4 Misurabilità e continuità

Quanta distanza c'è tra la nozione di misurabilità di una funzione e quella, più forte, di continuità? E similmente, quanta distanza intercorre fra la convergenza puntuale q.o. e la ben più restrittiva convergenza uniforme? I due risultati che seguono sembrano mostrare che le due distanze non sono poi così grandi.

Teorema 3.4.1 (di Lusin) *Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile secondo Lebesgue, q.o. finita, nulla fuori di un insieme $A \in \mathcal{M}$ di misura finita. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ tale che*

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon,$$

ed inoltre si ha $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

Ricordiamo che lo spazio $C_0^0(\mathbb{R})$ è stato introdotto nell'esercizio 3.3.3. Per una lieve generalizzazione del teorema di Lusin si veda l'esercizio 3.4.1.

Dimostrazione Faremo quattro passi successivi.
(a) A **compatto,** $0 \le f \le 1$**.** Sia $\{\varphi_n\}$ la successione crescente di funzioni semplici, convergente uniformemente a f, costruita nella dimostrazione della proposizione 3.1.7, vale a dire

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{se} \quad \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$\psi_0 = \varphi_0, \qquad \psi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

allora si ha $f = \sum_{n=0}^\infty \psi_n$ in $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che ψ_n assume soltanto i valori 0 e 2^{-n}, cosicché $2^n\psi_n$ è la funzione caratteristica χ_{T_n} di un certo insieme misurabile $T_n \subseteq A$.
Sia ora V un aperto contenente A, tale che $\overline{V}$ sia compatto. Per ogni n scegliamo poi un compatto K_n ed un aperto V_n tali che

$$K_n \subseteq T_n \subseteq V_n \subseteq V, \qquad m(V_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

(proposizione 1.7.3). Adesso costruiamo una funzione $h_n \in C_0^0(\mathbb{R})$ tale che

$$0 \le h_n \le 1, \qquad h_n = 1 \quad \text{in} \quad K_n\ , \qquad h_n = 0 \quad \text{in} \quad V_n^c\ :$$

ad esempio si può prendere

$$h_n(x) = \frac{\mathrm{d}(x, V_n^c)}{\mathrm{d}(x, V_n^c) + \mathrm{d}(x, K_n)}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove $\mathrm{d}(x, K) = \inf\{|x-y| : y \in K\}$ per ogni $K \subseteq \mathbb{R}$; h_n è continua su $\mathbb{R}$ in virtù della maggiorazione

$$|\mathrm{d}(x, K) - \mathrm{d}(x', K)| \le |x - x'| \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}.$$

Definendo

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

si ottiene una funzione che è continua, in quanto la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$, e che è nulla fuori di V; dunque $g \in C_0^0(\mathbb{R})$. Si noti ora che

$$2^{-n} h_n(x) = \psi_n(x) \qquad \forall x \in K_n \cup V_n^c = (V_n \setminus K_n)^c;$$

quindi avremo

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (V_n \setminus K_n)^c.$$

Se ne deduce

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \ne f(x)\} \le \sum_{n=0}^{\infty} m(V_n \setminus K_n) \le 2\varepsilon,$$

cioè la tesi del caso (a).

(b) A **compatto,** f **limitata.** Posto $M = \sup_X |f|$, le funzioni $\frac{f^+}{M}$, $\frac{f^-}{M}$ sono comprese fra 0 e 1, quindi per il passo (a) esistono due funzioni $g_+, g_- \in C_0^0(\mathbb{R})$ tali che

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : g_+(x) \ne \frac{f^+(x)}{M}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : g_-(x) \ne \frac{f^-(x)}{M}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora la funzione $g = M(g_+ - g_-)$ verifica la tesi del caso (b): infatti se in un punto x si ha $g(x) \ne f(x)$, necessariamente deve essere $g_+(x) \ne \frac{f^+(x)}{M}$ oppure $g_-(x) \ne \frac{f^-(x)}{M}$, e dunque

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \ne f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) $m(A) < \infty$**,** f **limitata.** Sia K un compatto contenuto in A, tale che $m(A \setminus K) < \varepsilon/2$: l'esistenza di tale compatto è una facile conseguenza del fatto che $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A \cap [-n, n])$ e della proposizione 1.7.3. La funzione $f\chi_K$ verifica le ipotesi del passo **(b)**, quindi esiste $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ tale che

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \ne f(x)\chi_K(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2};$$

ne segue
$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + m(A \setminus K) < \varepsilon,$$
il che prova (c).

(d) Caso generale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > n\}$. Gli insiemi B_n sono ovviamente contenuti in A, inoltre $B_n \supseteq B_{n+1}$ e $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$; in particolare, $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0$ (proposizione 1.7.2). Scelto n in modo che $m(B_n) < \varepsilon/2$, la funzione $f\chi_{B_n^c}$ verifica le ipotesi del passo (c), quindi esiste $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ tale che
$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\chi_{B_n^c}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$
ed allora si ha anche
$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + m(B_n) < \varepsilon.$$
Ciò prova il passo (d).

Infine resta da osservare che la condizione $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ è evidentemente automatica se f è illimitata; se invece f è limitata, per ottenerla basta sostituire g con
$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \leq \|f\|_\infty \\ \|f\|_\infty & \text{se } |g(x)| > \|f\|_\infty. \end{cases}$$
La G verifica ancora la tesi di (d) perché G differisce da g soltanto in punti dove sicuramente $g(x) \neq f(x)$, cosicché
$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : G(x) = f(x)\},$$
da cui a maggior ragione
$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : G(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon. \quad \square$$

Non bisogna enfatizzare troppo la portata del teorema di Lusin: esso *non* afferma che ogni funzione misurabile è continua salvo che su un insieme di punti di misura arbitrariamente piccola. Ad esempio, la funzione $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è discontinua in ogni punto di $[0,1]$, pur coincidendo addirittura q.o. con la funzione continua $g(x) = 0$.

Teorema 3.4.2 (di Severini-Egorov) *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge q.o. in X ad una funzione f. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c per $n \to \infty$.*

Dimostrazione Per $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^+$ poniamo
$$E_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\};$$

allora si ha

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m}\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} E_{k,m}^c\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Poiché $\mu(X) < \infty$, per la proposizione 2.1.5 si ottiene

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_{k,m}^c) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ possiamo scegliere $m_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(E_{k,m_k}^c) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dunque, posto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,m_k}^c$, si ha

$$\mu(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{k,m_k}^c) < \varepsilon.$$

D'altra parte per ogni $x \in E^c$ si ha $x \in E_{k,m_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ossia

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall n \ge m_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Ciò prova che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ risulta

$$\sup_{x\in E^c} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} \qquad \forall n \ge m_k,$$

cioè la tesi. $\Box$

Osservazione 3.4.3 Nel teorema di Severini-Egorov l'ipotesi $\mu(X) < \infty$ è indispensabile: in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, posto $f_n = \chi_{[-n-1,-n]\cup[n.n+1]}$, si ha $f_n \to 0$ puntualmente, ma non uniformemente al di fuori di alcun sottointervallo di $\mathbb{R}$; ed infatti $m(\mathbb{R}) = +\infty$.

Anche il teorema di Severini-Egorov non va enfatizzato: la convergenza puntuale q.o. si trasforma in convergenza uniforme al di fuori di un insieme di misura arbitrariamente piccola, ma l'insieme su cui si realizza la convergenza uniforme può essere estremamente irregolare e "frastagliato": di conseguenza, anche se le f_n erano continue, le proprietà di continuità ereditate da f sono ben poco significative.

Esercizi 3.4

1. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile q.o. finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$ e
$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon.$$
[**Traccia:** Supponendo dapprima $f \ge 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri $f\chi_{]-n,n[}$ e si determini una $g_n \in C_0^0([-n,n])$ non negativa tale che $\|g_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ e $m(\{x \in [-n,n] : g_n(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. Poi si definisca
$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } |x| \le 1, \\ \max\{g_1(x), \dots, g_n(x)\} & \text{se } n-1 < |x| \le n, \quad n > 1, \end{cases}$$
e si mostri che g verifica la tesi. Infine si generalizzi al caso di f di segno qualunque.]

2. Sia $f = \chi_{C_\xi}$, ove C_ξ è l'insieme di Cantor (paragrafo 1.6). Fissato $\varepsilon > 0$, si determini esplicitamente una funzione continua g, nulla fuori di $[0,1]$, tale che $m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

3. Sia $f_n(x) = \max\{1 - n\,\mathrm{d}(x,C), 0\}$, ove $C = C_{1/3}$ è l'insieme ternario di Cantor. Si verifichi che $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$ e, fissato $\varepsilon > 0$, si determini esplicitamente un insieme misurabile $E \subset [0,1]$ tale che $m(E) < \varepsilon$ e $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1] \setminus E$.

3.5 Convergenza in misura

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Introduciamo ora un tipo di convergenza per funzioni che è di grande importanza in teoria della probabilità.

Definizione 3.5.1 *Siano f_n, f funzioni misurabili q.o. finite su X. Diciamo che $f_n \to f$* in misura *per $n \to \infty$ se per ogni $\delta > 0$ si ha*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$
Diciamo che $\{f_n\}$ è fondamentale in misura *se è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza in misura, ossia se per ogni $\delta > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che*
$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu.$$

Quando $\mu(X) = 1$, la convergenza in misura viene chiamata, come è giusto, *convergenza in probabilità*.
Le proprietà della convergenza in misura ed i suoi legami con la convergenza puntuale sono illustrati nella seguente

Proposizione 3.5.2 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, siano f_n, f, g funzioni misurabili q.o. finite su X.*

(i) *Se $f_n \to f$ in misura e $f_n \to g$ in misura, allora $f = g$ q.o. in X.*

(ii) *Se $f_n \to f$ q.o. in X ed inoltre $\mu(X) < \infty$, allora $f_n \to f$ in misura.*

(iii) *Se $f_n \to f$ in misura, allora $\{f_n\}$ è fondamentale in misura.*

(iv) *Se $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge q.o. in X ad una funzione f misurabile e q.o. finita su X.*

(v) *Se $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, allora esiste f misurabile e q.o. finita su X tale che $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione **(i)** Basta osservare che, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{2k}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \frac{1}{2k}\right\},$$

e che quindi dall'ipotesi segue che

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

da cui $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

(ii) Per il teorema di Severini-Egorov, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \varepsilon$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c; ne segue che per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \subseteq E \qquad \text{definitivamente,}$$

da cui

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \text{definitivamente:}$$

ciò prova la tesi.

(iii) Basta notare che

$$\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f(x) - f_m(x)| > \frac{\delta}{2}\right\}.$$

(iv) Poiché $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, è possibile scegliere induttivamente una sequenza $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tale che $n_k < n_{k+1}$ e

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq n_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $X_0 = X \setminus N$, ove

$$N = \bigcup_n \{x \in X : |f_n(x)| = +\infty\}.$$

Allora, posto per $k, j \in \mathbb{N}^+$

$$A_k = \{x \in X_0 : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}, \quad B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k, \quad B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j,$$

otteniamo

$$\mu(B_j) \le \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k},$$

ed essendo $\mu(B_1) < 1$ si conclude che

$$\mu(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = 0.$$

Notiamo ora che la successione $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente su $X_0 \setminus B_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}^+$: infatti dall'uguaglianza $X_0 \setminus B_j = \bigcap_{k=j}^{\infty}(X_0 \setminus A_k)$ segue che se $q > p \ge j$ si ha

$$|f_{n_q}(x) - f_{n_p}(x)| \le \sum_{k=p}^{q-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \le \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k} \qquad \forall x \in X_0 \setminus B_j.$$

Ponendo allora $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, la funzione f è ben definita per ogni $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}(X_0 \setminus B_j) = X_0 \setminus B$, ossia q.o. in X, ed è ovviamente misurabile. Inoltre, essendo

$$|f(x)| \le |f_{n_j}(x)| + 1 \qquad \forall x \in X_0 \setminus B_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}^+,$$

la f risulta finita in $X_0 \setminus B$, e quindi è finita q.o. in X. Ciò prova **(iv)**.

(v) Sia $\varepsilon > 0$; poiché la successione $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, per ogni $\delta > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu.$$

Da (iv) segue che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge puntualmente q.o. in X ad una funzione f q.o. finita. Inoltre in corrispondenza di ε esiste un insieme $B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) < \varepsilon$, tale che $f_{n_k} \to f$ uniformemente in B^c: basta prendere come B uno dei B_j della dimostrazione di (iv), con j sufficientemente grande. Allora per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\}$ è contenuto in B per ogni k abbastanza grande, cosicché esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\}) \le \mu(B) < \varepsilon \qquad \forall k \ge k_0.$$

Ma allora per ogni $n \ge \nu$ si ha, scelto k tale che $k \ge k_0$ e $n_k \ge \nu$,

$$\begin{aligned}&\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 2\delta\} \subseteq \\ &\qquad \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| > \delta\} \cup \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\},\end{aligned}$$

da cui

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 2\delta\} < 2\varepsilon.$$

Ne segue la tesi per l'arbitrarietà di δ. $\square$

Esercizi 3.5

1. Supponiamo che $f_n \to f$ in misura e che $g_n \to g$ in misura. Si provi che:

   (i) $f_n + g_n \to f + g$ in misura;

   (ii) $\lambda f_n \to \lambda f$ in misura per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

   (iii) $|f_n| \to |f|$ in misura;

   (iv) se $\mu(X) < \infty$, allora $f_n g_n \to fg$ in misura;

   (v) se $\mu(X) < \infty$ e f_n, f sono q.o. diverse da 0, allora $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ in misura.

2. Sia $\mu(X) = \infty$. Esibire esempi di successioni $\{f_n\}, \{g_n\}$ tali che:

   (i) $f_n \to f$ in misura, $g_n \to g$ in misura, ma $f_n g_n \not\to fg$ in misura;

   (ii) $f_n \to f$ in misura, f_n, f sono q.o. diverse da 0, ma $\frac{1}{f_n} \not\to \frac{1}{f}$ in misura.

3. Esibire esempi di successioni $\{f_n\}$ tali che:

   (i) $f_n \to f$ q.o. in X ma $f_n \not\to f$ in misura;

   (ii) $f_n \to f$ in misura ma $f_n \not\to f$ q.o. in X.

4. Sia $\mu(X) < \infty$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite e sia f un'altra funzione misurabile e q.o. finita. Si provi che $f_n \to f$ in misura se e solo se per ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{f_n\}$ esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{f_{n_{k_h}}\}_{h\in\mathbb{N}}$ che converge a f q.o. in X.

5. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si provi che se $f_n \to f$ in misura, allora $g \circ f_n \to g \circ f$ in misura. È vero questo risultato se g è soltanto continua?

Capitolo 4

L'integrale

4.1 Integrale di funzioni semplici

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Introdurremo la nozione di integrale rispetto alla misura μ per una sottoclasse di funzioni misurabili: quelle, appunto, integrabili. Se, in particolare, lo spazio misurato è $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ oppure $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$, otterremo l'*integrale di Lebesgue* 1-dimensionale o N-dimensionale.
Cominciamo allora col definire l'integrale per le funzioni semplici. Ricordiamo che, in base all'esempio 3.1.4 (2), ogni funzione semplice φ si può scrivere in modo canonico come

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \qquad A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_i\},$$

dove gli α_i sono i valori assunti da φ; in particolare gli A_i sono elementi disgiunti di $\mathcal{F}$ e la loro unione è tutto X.
Per introdurre l'integrale, bisognerà distinguere tra funzioni di segno costante (sicuramente integrabili) e di segno variabile (non necessariamente integrabili).

Definizione 4.1.1 *Sia $\varphi \in \mathcal{S}$, e sia $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ la sua rappresentazione canonica (con $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_i\}$).*
Se $\varphi \geq 0$, l' integrale *di φ su X rispetto e alla misura μ è il numero non negativo (eventualmente $+\infty$)*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

(si ricordi la convenzione $0 \cdot \infty = 0$).
Se φ assume anche valori negativi, posto

$$\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}, \qquad \varphi^- = -\min\{\varphi, 0\},$$

diciamo che φ è integrabile *su X (rispetto a μ) se almeno uno fra i due integrali $\int_X \varphi^+ \, d\mu$, $\int_X \varphi^- \, d\mu$ è finito; in tal caso l'integrale di φ rispetto alla misura μ è*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi^+ \, d\mu - \int_X \varphi^- \, d\mu.$$

In particolare, dunque, le funzioni semplici non negative sono sempre integrabili. Se entrambi gli integrali $\int_X \varphi^+ d\mu$, $\int_X \varphi^- d\mu$ sono finiti, diciamo che φ è sommabile *su X (rispetto a μ).*

Osservazioni 4.1.2 (1) Una funzione semplice φ è sommabile su X se e solo se si ha $\varphi \in \mathcal{S}_0$, ossia φ è nulla al di fuori di un insieme di misura finita. Infatti, sia $\sum_{i=0}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ la rappresentazione canonica di φ: se φ è sommabile, allora tutti gli A_i relativi a valori $\alpha_i \neq 0$ devono avere misura finita, altrimenti ci sarebbe almeno un addendo infinito nella somma $\sum_{i=0}^n |\alpha_i|\mu(A_i)$. Viceversa, è chiaro che se tutti gli A_i relativi ad $\alpha_i \neq 0$ hanno misura finita allora φ è sommabile.

(2) Se $\varphi \in \mathcal{S}_0$, e se $\sum_{j=0}^m \beta_j \chi_{B_j}$ è una qualunque rappresentazione della funzione φ tale che $\beta_j \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathcal{F}$, con $\mu(B_j) < \infty$ allorché $\beta_j \neq 0$, allora si ha

$$\sum_{j=0}^m \beta_j \mu(B_j) = \int_X \varphi \, d\mu$$

(esercizio 4.1.1); dunque l'integrale di funzioni di $\mathcal{S}_0$ non dipende dal modo in cui si rappresenta la funzione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita. Si noti che questo non è vero se si toglie la condizione che gli insiemi abbiano misura finita: ad esempio in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ possiamo scrivere

$$\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,\infty[} - \chi_{]1,\infty[}$$

e benché risulti $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} \, dm = 1$, la somma $m([0,\infty[) - m(]1,\infty[)$ non ha senso.

Lemma 4.1.3 *Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ non negative. Allora*

(i) *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\int_X (\alpha\varphi) \, d\mu = \alpha \int_X \varphi \, d\mu$;*

(ii) *risulta $\int_X (\varphi + \psi) \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu$.*

Dimostrazione (i) Se $\alpha \geq 0$ è un'ovvia conseguenza della definizione 4.1.1; se $\alpha < 0$, basta osservare che $(\alpha\varphi)^+ = |\alpha|\varphi^-$ e $(\alpha\varphi)^- = |\alpha|\varphi^+$.

(ii) Siano $\sum_{i=0}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ e $\sum_{j=0}^m \beta_j \chi_{B_j}$ le rappresentazioni canoniche di φ e ψ; sia inoltre $\sum_{h=0}^p \lambda_h \chi_{E_h}$ la rappresentazione canonica di $\varphi + \psi$ (in particolare, si ha $X = \bigcup_{i=0}^n A_i = \bigcup_{j=0}^m B_j = \bigcup_{h=0}^p E_h$). A ciascun valore λ_h, $h = 0, 1, \ldots, p$, corrisponde una coppia, non necessariamente unica, di indici (i,j) (con $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$) tale che $\lambda_h = \alpha_i + \beta_j$. Detto F_h l'insieme di tali coppie di indici, si ha $(i,j) \in F_h$ se e solo se $\lambda_h = \alpha_i + \beta_j$; quindi si può scrivere

$$E_h = \{x \in X : \varphi(x) + \psi(x) = \lambda_h\} = \bigcup_{(i,j) \in F_h} A_i \cap B_j,$$

da cui

$$\mu(E_h) = \sum_{(i,j) \in F_h} \mu(A_i \cap B_j).$$

Si deduce allora, per l'additività della misura μ,

$$\begin{aligned}\int_X (\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{h=0}^{p} \lambda_h \mu(E_h) = \sum_{h=0}^{p} \sum_{(i,j)\in F_h} (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \beta_j\mu(A_i\cap B_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m}\beta_j\mu(B_j) = \int_X \varphi\,d\mu + \int_X \psi\,d\mu. \quad \square\end{aligned}$$

Esercizi 4.1

1. Si verifichi che se $\varphi \in \mathcal{S}_0$, e se risulta

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j \chi_{B_j}(x), \qquad x \in X,$$

con $\mu(A_i) < \infty$ e $\mu(B_j) < \infty$ allorché $\alpha_i \neq 0$ e $\beta_j \neq 0$, allora

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j \mu(B_j),$$

cosicché l'integrale di una funzione semplice è indipendente dalla rappresentazione usata per descriverla.
[**Traccia:** si osservi che se i B_j sono disgiunti la verifica è facile. Altrimenti, risulta

$$\bigcup_{j=0}^{s} B_j = \bigcup_{h=1}^{s} \bigcup_{0\le i_1<\ldots<i_h\le s} C_{i_1,\ldots,i_h}\,, \qquad C_{i_1,\ldots,i_h} = \bigcap_{q=1}^{h} B_{i_q} \setminus \bigcup_{j\neq i_1,\ldots,i_h} B_j;$$

si provi che i $C_{i_1,\ldots,i_h}$ sono disgiunti e che $C_{i_1,\ldots,i_h} \cap B_j = \emptyset$ se $j \neq i_1,\ldots,i_h$, e se ne deduca che

$$\sum_{j=0}^{s} \beta_j\mu(B_j) = \sum_{h=1}^{s} \sum_{j\neq i_1,\ldots,i_h} \sum_{j=0}^{s} \beta_j \mu(C_{i_1,\ldots,i_h} \cap B_j) = \sum_{h=1}^{s} \sum_{j\neq i_1,\ldots,i_h} \sum_{p=1}^{h} \beta_{i_p}\mu(C_{i_1,\ldots,i_h}).$$

Da qui si ricavi l'uguaglianza cercata.]

2. Siano $\varepsilon_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, le funzioni introdotte nell'esercizio 3.1.7. Si calcoli per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \varepsilon_n\, \chi_{[0,1]}\, dm,$$

ove m è la misura di Lebesgue.

3. Sia $W \subset [0,1]$ un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Posto

$$\lambda = \sup \left\{ \int_0^1 \varphi \, dm, \ \varphi \in \mathcal{S}, \ 0 \le \varphi \le \chi_W \right\},$$

si provi che:

(i) $\lambda = \sup\{m(E) : \ E \in \mathcal{M}, \ E \subset W\}$;

(ii) $m^*(W) = \inf\{m(F) : \ F \in \mathcal{M}, \ F \supset W\} > \lambda$;

(iii) $m^*(W) + m^*([0,1] \setminus W) > 1$.

4.2 Integrale di funzioni misurabili

Estenderemo ora l'integrale ad una vasta sottoclasse delle funzioni misurabili. In tutto il discorso che segue $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è un fissato spazio misurato.

Definizione 4.2.1 *Sia $f \in \mathcal{M}_X$. Se $f \ge 0$, l'*integrale *di f su X rispetto alla misura μ è il numero (eventualmente $+\infty$)*

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}, \ 0 \le \varphi \le f \right\}.$$

Se f assume anche valori negativi, posto

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = -\min\{f, 0\},$$

diciamo che f è integrabile *su X (rispetto a μ) se almeno uno fra i due integrali $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ è finito; in tal caso l'integrale di f rispetto alla misura μ è*

$$\int_X f \ d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

In particolare, le funzioni misurabili non negative sono sempre integrabili.
Se entrambi gli integrali $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ sono finiti, diciamo che f è sommabile *su X (rispetto a μ).*

Definizione 4.2.2 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f \in \mathcal{M}_D$. Diciamo che f è* integrabile *su D rispetto alla misura μ se, estesa f in modo arbitrario su tutto X, la funzione $f\chi_D$ è integrabile su X; in tal caso si pone*

$$\int_D f \, d\mu = \int_X f \chi_D \, d\mu.$$

Se tale integrale è finito, si dice che f è sommabile *su D (rispetto a μ). Denoteremo con $\mathcal{L}^1(D, \mathcal{F}, \mu)$, o semplicemente con $\mathcal{L}^1(D)$, l'insieme delle funzioni sommabili su D.*

Osservazioni 4.2.3 **(1)** Per le funzioni $\psi \in \mathcal{S}$, la definizione 4.2.1 è in accordo con la definizione 4.1.1.

(2) Se f è non negativa e sommabile su X, allora

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}_0, \ 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

(esercizio 4.2.9).

(3) Se f è una funzione misurabile su X, e se $B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) = 0$, allora f è integrabile su B e $\int_B f \, d\mu = 0$. Infatti, per definizione, gli integrali su B di f^+ e f^- sono entrambi nulli in quanto ogni funzione semplice non negativa su B ha integrale nullo su B.

(4) Se f non è misurabile, la quantità introdotta nella definizione 4.2.1 ha ancora senso, ma non gode di buone proprietà (si veda l'esercizio 4.2.16).

Analizziamo le proprietà dell'integrale appena definito.

Proposizione 4.2.4 *Sia $D \in \mathcal{F}$, siano f, g integrabili su D. Valgono i seguenti fatti:*

(i) (monotonia) *se $f \leq g$, allora $\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$;*

(ii) $\left| \int_D f \, d\mu \right| \leq \int_D |f| \, d\mu$;

(iii) (omogeneità) $\int_D \alpha f \, d\mu = \alpha \int_D f \, d\mu$ *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione **(i)** Se si ha $0 \leq f \leq g$, la tesi è facile conseguenza delle definizioni 4.2.1 e 4.2.2. Nel caso generale, si osservi che da $f \leq g$ segue $f^- \geq g^-$ e $f^+ \leq g^+$; dunque, per il caso precedente,

$$\int_D f^+ \, d\mu \leq \int_D g^+ \, d\mu, \quad -\int_D f^- \, d\mu \leq -\int_D g^- \, d\mu.$$

Sommando le due disuguaglianze, per ipotesi non si ottiene mai $\pm(\infty - \infty)$, cosicché si deduce la tesi.

(ii) Ovvia conseguenza di (i).

(iii) Se $\alpha \geq 0$ e $f \geq 0$, la tesi segue facilmente dalle definizioni 4.2.1 e 4.2.2 e dal lemma 4.1.3; se $\alpha \geq 0$ e f è arbitraria, scrivendo $f = f^+ - f^-$ e osservando che $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$, la tesi segue utilizzando la parte già dimostrata. Se $\alpha \leq 0$, basta applicare nuovamente la definizione di integrale, tenendo conto del fatto che $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$ e $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$. $\square$

Prima di dimostrare l'additività, e quindi la linearità, dell'integrale, proviamo che l'integrale è numerabilmente additivo rispetto all'insieme di integrazione:

Proposizione 4.2.5 *Sia f una funzione integrabile su X. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi misurabili fra loro disgiunti, allora posto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ si ha*

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Osservazione 4.2.6 Si noti che, essendo ovviamente $\int_\emptyset f\,d\mu = 0$ per ogni f integrabile, nel caso in cui $f \geq 0$ questa proposizione ci dice che la funzione di insieme

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{F},$$

è una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{F}$.

Dimostrazione della proposizione 4.2.5 Se $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{F}$, la tesi segue dalla definizione 4.1.1 e dalla numerabile additività di μ. Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$, il risultato segue allo stesso modo.
Sia ora f misurabile e non negativa e supponiamo dapprima che f sia sommabile su A. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla definizione 4.2.2 segue che esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq f\chi_A$ e

$$\int_A \varphi\,d\mu = \int_X \varphi\,d\mu > \int_X f\chi_A\,d\mu - \varepsilon.$$

Poiché, per quanto già dimostrato,

$$\int_A \varphi\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \varphi\,d\mu,$$

si deduce, essendo $0 \leq \varphi\chi_{A_n} \leq f\chi_{A_n}$, che

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu < \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \varphi\,d\mu + \varepsilon \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu + \varepsilon,$$

e dall'arbitrarietà di ε segue

$$\int_A f\,d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Proviamo ora la disuguaglianza opposta. Per ogni $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, esiste $\psi_n \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \psi_n \leq f\chi_{A_n}$ e

$$\int_X \psi_n\,d\mu > \int_{A_n} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}};$$

posto, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $\varphi_N = \sum_{n=0}^N \psi_n$, grazie al lemma 4.1.3 si ha $\varphi_N \in \mathcal{S}$ e $0 \leq \varphi_N \leq f\chi_A$; ne segue

$$\sum_{n=0}^N \int_X \psi_n\,d\mu = \int_X \varphi_N\,d\mu \leq \int_X f\chi_A\,d\mu = \int_A f\,d\mu,$$

da cui

$$\int_A f\,d\mu > \sum_{n=0}^N \left(\int_{A_n} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) > \sum_{n=0}^N \int_{A_n} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Per $N \to \infty$ si ha allora

$$\int_A f\,d\mu \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{A_n} f\,d\mu - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

cioè

$$\int_A f\,d\mu \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Ciò conclude la dimostrazione nel caso in cui f è non negativa e sommabile su A. Il caso in cui $f \geq 0$ e $\int_A f\,d\mu = +\infty$ è analogo (fissato $M > 0$, basta selezionare $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq f\chi_A$ e $\int_X \varphi\,d\mu > M$, e poi procedere come prima).
Infine se f è un'arbitraria funzione integrabile, basta applicare la parte già dimostrata a f^+ e f^- e poi sottrarre le uguaglianze ottenute (una delle quali è sicuramente tra quantità finite). $\square$

Osservazione 4.2.7 Dalla precedente proposizione segue questa utile proprietà: se g è integrabile su D e f è una funzione misurabile su D tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in D, ove $D \in \mathcal{F}$, allora f è integrabile su D e $\int_D f\,d\mu = \int_D g\,d\mu$. Infatti, posto $B = \{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$, si ha $B \in \mathcal{F}$ e $\mu(B) = 0$; quindi, scrivendo $D = (D \setminus B) \cup B$ e utilizzando la proposizione 4.2.5 si ottiene

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} f^+\,d\mu + \int_B f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^+\,d\mu + \int_B f^+\,d\mu;$$

poiché, per l'osservazione 4.2.3, $\int_B f^+ d\mu = \int_B g^+ d\mu = 0$, si deduce

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^+\,d\mu = \int_D g^+\,d\mu.$$

Analogamente,

$$\int_D f^-\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^-\,d\mu = \int_D g^-\,d\mu,$$

da cui, essendo g integrabile su D, la tesi.

Proposizione 4.2.8 *Sia $D \in \mathcal{F}$, siano f, g integrabili su D. Vale la seguente proprietà:*

(additività) *se non si ha $\int_D f\,d\mu = -\int_D g\,d\mu = \pm\infty$, allora*

$$\int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu.$$

Notiamo che in effetti $f + g$ non è definita sull'insieme

$$N = \{x \in D : f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$$

il quale, per ipotesi, ha misura nulla (si veda anche l'esercizio 4.2.7). Quindi, ponendo ad esempio $f + g = 0$ su N, nell'integrale a primo membro si può sostituire D con $D \setminus N$ senza alterarne il valore, in virtù dell'osservazione precedente. Si osservi anche che, combinando questo risultato con la proprietà di omogeneità (proposizione 4.2.4), si ottiene che l'integrale è un'applicazione lineare:

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_D f\,d\mu + \beta \int_D g\,d\mu,$$

purché naturalmente siano ben definiti i due membri.

Dimostrazione Proveremo la tesi distinguendo vari casi.

I - $f, g \geq 0$. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ tali che $0 \leq \varphi \leq f\chi_D$, $0 \leq \psi \leq g\chi_D$: allora $0 \leq \varphi + \psi \leq (f+g)\chi_D$ e dunque, per il lemma 4.1.3,

$$\int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu = \int_X (\varphi + \psi) \, d\mu \leq \int_D (f+g) \, d\mu;$$

per l'arbitrarietà di φ e ψ si ottiene

$$\int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu \leq \int_D (f+g) \, d\mu.$$

Per provare l'altra disuguaglianza, introduciamo gli insiemi misurabili

$$D^m = \{x \in D : m \leq f(x) + g(x) < m+1\}, \quad m \in \mathbb{N}^+,$$

$$D^\infty = \{x \in D : f(x) + g(x) = +\infty\},$$

$$D_m = \left\{x \in D : \frac{1}{m+1} \leq f(x) + g(x) < \frac{1}{m}\right\}, \quad m \in \mathbb{N}^+,$$

$$D_\infty = \{x \in D : f(x) + g(x) = 0\}.$$

Fissiamo $\beta \in]0,1[$ e scegliamo $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq \beta(f+g)\chi_D$. Siano poi $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ due successioni di funzioni semplici, costruite con la procedura descritta nella proposizione 3.1.7, convergenti puntualmente alle funzioni $f\chi_D$ e $g\chi_D$ rispettivamente. Per l'osservazione 3.1.8, la convergenza delle φ_n e delle ψ_n è uniforme in ciascuno degli insiemi D^m e D_m ($m \neq \infty$). Dunque, poiché

$$(f+g) - \varphi \geq (1-\beta)(f+g) \geq (1-\beta)m \qquad \text{in } D^m,$$

$$(f+g) - \varphi \geq (1-\beta)(f+g) \geq \frac{1-\beta}{m+1} \qquad \text{in } D_m\,,$$

$$\varphi < f + g = +\infty \qquad \text{in } D^\infty,$$

$$\varphi = f + g = 0 \qquad \text{in } D_\infty\,,$$

per ogni $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ esiste $\nu_m \in \mathbb{N}$ tale che per qualunque $n \geq \nu_m$ risulta

$$\varphi \leq (f+g) - (1-\beta)m \leq \varphi_n + \psi_n \leq f + g \qquad \text{in } D^m,$$

$$\varphi \leq (f+g) - \frac{1-\beta}{m+1} \leq \varphi_n + \psi_n \leq f + g \qquad \text{in } D_m\,,$$

$$\varphi \leq \varphi_n + \psi_n < +\infty = f + g \qquad \text{in } D^\infty,$$

$$\varphi = \varphi_n + \psi_n = 0 = f + g \qquad \text{in } D_\infty\,.$$

Per l'additività dell'integrale sulle funzioni semplici non negative e per la monotonia, si ricava per ogni $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned}\int_{D^m} \varphi \, d\mu &\leq \int_{D^m} (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \\ &= \int_{D^m} \varphi_n \, d\mu + \int_{D^m} \psi_n \, d\mu \leq \int_{D^m} f \, d\mu + \int_{D^m} g \, d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{D_m} \varphi \, d\mu &\leq \int_{D_m} (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \\ &= \int_{D_m} \varphi_n \, d\mu + \int_{D_m} \psi_n \, d\mu \leq \int_{D_m} f \, d\mu + \int_{D_m} g \, d\mu,\end{aligned}$$

cioè

$$\int_{D^m} \varphi \, d\mu \leq \int_{D^m} f \, d\mu + \int_{D^m} g \, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\},$$
$$\int_{D_m} \varphi \, d\mu \leq \int_{D_m} f \, d\mu + \int_{D_m} g \, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}.$$

Sommiamo rispetto a $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$: dato che

$$D = \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^+} D^m \right) \cup D^\infty \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^+} D_m \right) \cup D_\infty,$$

per la proposizione 4.2.8 si deduce

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_D \varphi \, d\mu \leq \int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu,$$

e per l'arbitrarietà di φ,

$$\beta \int_D (f+g) \, d\mu \leq \int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu.$$

Per $\beta \to 1^-$ si ottiene la disuguaglianza cercata.

II - $f, g \leq 0$. In questo caso basta applicare il risultato del caso I alle funzioni $-f, -g$ e poi usare l'omogeneità.

Prima di passare agli altri casi, osserviamo che $f+g$ è sicuramente integrabile su D: infatti si ha $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ e $(f+g)^- \leq f^- + g^-$, e d'altra parte, per ipotesi e per la parte **I** già dimostrata, una almeno fra le funzioni $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ è sommabile su D.

III - $f \geq 0, \ g \leq 0$. In questo caso una almeno tra f e g è sommabile. Definiamo

$$S^+ = \{x \in D : \ f(x) + g(x) \geq 0\}, \quad S^- = \{x \in D : \ f(x) + g(x) < 0\} :$$

dato che $f\chi_{S^\pm} = (f+g)\chi_{S^\pm} + (-g)\chi_{S^\pm}$, per le parti I e II già dimostrate si ha

$$\int_{S^+} f\,d\mu = \int_{S^+} (f+g)\,d\mu - \int_{S^+} g\,d\mu,$$

$$\int_{S^-} g\,d\mu = \int_{S^-} (f+g)\,d\mu - \int_{S^-} f\,d\mu.$$

Supponiamo ora che, ad esempio, sia sommabile la f. Aggiungiamo ai due membri delle uguaglianze precedenti rispettivamente le quantità $-\int_{S^+} f\,d\mu$ e $\int_{S^-} f\,d\mu$, e sottraiamo poi nella prima la quantità $\int_{S^+}(f+g)\,d\mu$ (che è finita essendo $0 \le f+g \le f$ su S^+), Si ottiene

$$\int_{S^+} f\,d\mu + \int_{S^+} g\,d\mu = \int_{S^+} (f+g)\,d\mu = \int_D (f+g)^+\,d\mu,$$
$$\int_{S^-} f\,d\mu + \int_{S^-} g\,d\mu = \int_{S^-} (f+g)\,d\mu = -\int_D (f+g)^-\,d\mu.$$

A queste stesse uguaglianze si arriva supponendo sommabile g in luogo di f. Sommando le due equazioni (il che è lecito perché $f+g$ è integrabile) si ha, grazie alla proposizione 4.2.8, la tesi.
Notiamo che se è $f \le 0$ e $g \ge 0$, anziché $f \ge 0$ e $g \le 0$, si ottiene la tesi scambiando i ruoli di f e di g.

IV - f, g di segno qualunque. Poniamo

$$F^+ = \{x \in D : f(x) \ge 0\}, \qquad F^- = \{x \in D : f(x) < 0\},$$
$$G^+ = \{x \in D : g(x) \ge 0\}, \qquad G^- = \{x \in D : g(x) < 0\},$$

e decomponiamo X nell'unione disgiunta

$$X = (F^+ \cap G^+) \cup (F^+ \cap G^-) \cup (F^- \cap G^+) \cup (F^- \cap G^-).$$

Su ciascuno di tali quattro insiemi vale la relazione di additività richiesta, in virtù dei passi precedenti; quindi, tenuto conto dell'integrabilità di $f+g$, la tesi segue grazie alla proposizione 4.2.8. $\square$

Osservazione 4.2.9 Se f è una funzione misurabile su X, allora $|f|$ è integrabile su ogni $D \in \mathcal{F}$ e si ha

$$\int_D |f|\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu + \int_D f^-\,d\mu.$$

Infatti $|f| = f^+ + f^-$, quindi la tesi segue dall'additività dell'integrale (proposizione 4.2.8).

Esercizi 4.2

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ n & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \quad \text{e la sua prima cifra decimale} \\ & \qquad\qquad\quad \text{non nulla è la } n\text{-sima.} \end{cases}$$
Si provi che f è misurabile rispetto alla misura di Lebesgue e si calcoli l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} f\,\chi_{[0,1]}\,dm.$$

2. Si verifichi che se f è sommabile su X, allora f è sommabile su D per ogni $D \in \mathcal{F}$.

3. Si verifichi che se $D \in \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{M}_D$, allora f è sommabile su D se e solo se lo è $|f|$.

4. Si provi che se f è una funzione definita in $[a, b]$, misurabile secondo Lebesgue e Riemann-integrabile in $[a, b]$, allora f è sommabile in $[a, b]$.

5. Siano $A, B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) = 0$. Si provi che se f è integrabile su X, allora
$$\int_A f\,d\mu = \int_{A\cup B} f\,d\mu.$$

6. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f misurabile su D. Se esiste una funzione g, sommabile su D, tale che $|f| \le g$ q.o. in D, si provi che anche f è sommabile su D e che
$$\int_D |f|\,d\mu \le \int_D g\,d\mu.$$

7. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f sommabile su D. Si dimostri che
$$\mu(\{x \in D : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

8. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f misurabile su D. Si provi che $\int_D |f|\,d\mu = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. in D.

9. Se f è sommabile su X e $f \ge 0$, si verifichi che
$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}_0,\ 0 \le \varphi \le f\right\};$$
utilizzando la funzione $\chi_{]0,\infty[}$ nello spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, m)$, ove m è la misura di Lebesgue e $\mathcal{F}$ è la σ-algebra definita da
$$\mathcal{F} = \mathcal{M}_{]-\infty,0]} \cup \{E \in \mathcal{M} : E = A\cup]0,\infty[,\ A \in \mathcal{M}_{]-\infty,0]}\},$$
si provi che l'enunciato precedente non vale se f è soltanto integrabile.

10. Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, si provi che per ogni funzione f non negativa ed integrabile su X si ha

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \; \varphi \in \mathcal{S}_0, \; 0 \le \varphi \le f \right\}.$$

11. Se f è sommabile su X (oppure $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito) e $f \le 0$, si verifichi che

$$\int_X f \, d\mu = \inf \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \; \varphi \in \mathcal{S}_0, \; 0 \ge \varphi \ge f \right\}.$$

12. Sia f sommabile su X; si provi che l'insieme $\{x \in X : f(x) \ne 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile di insiemi misurabili $A_n \subseteq A_{n+1}$ di misura finita.

13. Sia f misurabile e q.o. finita su X, con $\mu(X) < \infty$. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $E_n = \{x \in X : n - 1 \le |f(x)| < n\}$, si provi che f è sommabile se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \, \mu(E_n)$ è convergente. Che succede se $\mu(X) = +\infty$?

14. Sia f sommabile su X. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$, si provi che risulta $\lim_{n\to\infty} n\mu(F_n) = 0$. È vero il viceversa?

15. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Si definisca l'insieme

$$M = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e q.o. finita}\}$$

e si consideri l'insieme quoziente $M_0 = M/\simeq$, ove

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Posto

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \, d\mu, \qquad f, g \in M_0\,,$$

si provi che:

(i) d è una distanza su M_0 e (M_0, d) è uno spazio metrico completo;

(ii) si ha $d(f_n, f) \to 0$ se e solo se $f_n \to f$ in misura.

16. Si mostri che la definizione 4.2.1 è applicabile anche a funzioni non misurabili, ma che in tal caso l'integrale non è necessariamente additivo.
[**Traccia:** si considerino $f = \chi_W$ e $g = \chi_{[0,1]\setminus W}$, con $W \subset [0, 1]$ non misurabile secondo Lebesgue, e si applichi l'esercizio 4.1.3.]

4.3 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Una delle più importanti caratteristiche della teoria dell'integrazione che stiamo esponendo è il fatto di poter scambiare fra loro le operazioni di limite e di integrazione sotto ipotesi molto blande. Il primo risultato di questo tipo riguarda successioni crescenti di funzioni non negative, ed è di grande importanza perché si applica in modo naturale alle serie di funzioni assolutamente convergenti.

Teorema 4.3.1 (di B. Levi, o della convergenza monotona) *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su X, tali che $0 \le f_n \le f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Osserviamo che il risultato è falso se si sopprime qualcuna delle ipotesi. Ad esempio, in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni $f_n = -\chi_{[n,\infty[}$ formano una successione crescente ma non positiva, e risulta

$$\int_X f_n \, d\mu = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0;$$

invece le funzioni $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ sono non negative ma non formano una successione crescente, e risulta

$$\int_X f_n \, d\mu = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0.$$

Dimostrazione $(\le)$ Evidente conseguenza della monotonia dell'integrale (proposizione 4.2.4).

$(\ge)$ Fissiamo $\psi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \le \psi \le f$, e sia $\beta \in]0, 1[$. Gli insiemi $A_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \beta\psi(x)\}$ appartengono a $\mathcal{F}$, si ha $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Per monotonia ed omogeneità (proposizione 4.2.4) si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\beta \int_{A_n} \psi \, d\mu = \int_{A_n} \beta\psi \, d\mu \le \int_{A_n} f_n \, d\mu \le \int_X f_n \, d\mu.$$

Poiché, per l'osservazione 4.2.6, $\lambda(E) = \int_E \psi d\mu$ è una misura, utilizzando la proposizione 2.1.5 si ricava per $n \to \infty$

$$\beta \int_X \psi \, d\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \psi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \forall \beta \in]0, 1[.$$

Passando al limite per $\beta \to 1^-$, si ottiene

$$\int_X \psi \, d\mu = \int_{X_0} \psi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \forall \psi \in \mathcal{S} \quad \text{con} \quad 0 \le \psi \le f,$$

da cui la tesi per definizione di integrale. $\square$

Se la successione di funzioni non negative non è crescente, il teorema di B. Levi non è applicabile, ma vi è comunque un criterio di passaggio al limite.

Proposizione 4.3.2 (lemma di Fatou) *Sia* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio misurato; sia inoltre* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora posto* $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$*, si ha*

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione Si ha $f = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m$; quindi, posto $g_n = \inf_{m\geq n} f_m$, la successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le ipotesi del teorema di B. Levi. Ne segue, essendo ovviamente $g_n \leq f_n$,

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu. \quad \square$$

Il più importante teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale è però il seguente:

Teorema 4.3.3 (di Lebesgue o della convergenza dominata) *Sia* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio misurato, e sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili tali che:*

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in X$*;*

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *per ogni* $x \in X$*, ove* g *è una funzione sommabile su* X*.*

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Si osservi che la tesi del teorema si può rafforzare: in effetti si può concludere che $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$ (basta considerare le funzioni $|f_n - f|$ in luogo delle f_n, ed osservare che esse tendono puntualmente a 0 e sono "dominate" dalla funzione sommabile $2g$).

Dimostrazione Applichiamo il lemma di Fatou alle successioni $\{g + f_n\}$ e $\{g - f_n\}$, entrambe puntualmente convergenti e costituite da funzioni non negative. Si ottiene

$$\int_X (g+f)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g+f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

$$\int_X (g-f)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g-f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mu.$$

Sottraendo la quantità finita $\int_X g\,d\mu$, si ottiene

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

cioè la tesi. $\square$

Il teorema di Lebesgue ha anche una versione "continua", di grande importanza nelle applicazioni.

Teorema 4.3.4 *Sia* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio misurato, sia* $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *e sia* $f : X \times \mathbb{R} \setminus \{t_0\} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione tale che:*

(i) *$f(\cdot,t)$ è misurabile su X per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$;*

(ii) *$|f(x,t)| \le g(x)$ per ogni $x \in X$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, con g sommabile su X;*

(iii) *$\exists \lim_{t \to t_0} f(x,t) = F(x)$ per ogni $x \in X$.*

Allora

$$\exists \lim_{t \to t_0} \int_X f(\cdot,t)\, d\mu = \int_X F\, d\mu.$$

Dimostrazione Sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ un'arbitraria successione che tende a t_0 per $n \to \infty$; posto $f_n = f(\cdot, t_n)$, la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente a F in X ed è dominata dalla funzione sommabile g. Dunque per il teorema di Lebesgue

$$\exists \lim_{n \to \infty} \int_X f(\cdot, t_n)\, d\mu = \int_X F\, d\mu.$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{t_n\}$ segue la tesi. $\square$

Esempio 4.3.5 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $f(\cdot,t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;

(ii) f è derivabile rispetto a t in ogni punto $(x,t) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le \varphi(x)$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, ove φ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

In queste ipotesi si ha, indicando con m_x la misura di Lebesgue rispetto alla variabile x,

$$\exists \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, dm_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dm_x\,.$$

Infatti, fissato $t \in \mathbb{R}$, i rapporti incrementali

$$f_h(x) = \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0,$$

verificano le ipotesi del teorema 4.3.4 perché, grazie al teorema del valor medio,

$$|f_h(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{t,x,h})\right| \le \varphi(x) \qquad \forall h \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ove $\xi_{t,x,h}$ è un opportuno punto compreso fra t e $t+h$; ne segue che

$$\exists \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_h(x)\, dm_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dm_x\,,$$

che è quanto si voleva.

Esercizi 4.3

1. Dimostrare che il teorema di B. Levi è ancora valido se si suppone che per ogni $n \in \mathbb{N}$ le relazioni $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ siano verificate soltanto q.o. in X.

2. Si provi questa generalizzazione del teorema 4.3.1: se le funzioni f_n sono misurabili e verificano $f_{n+1} \geq f_n \geq g$, ove g è una funzione sommabile su X, allora posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, si ha
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

3. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X. Si provi che
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

4. Dimostrare che il lemma di Fatou ed il teorema di Lebesgue sono ancora validi supponendo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la relazione puntuale richiesta per f_n sia verificata soltanto q.o. in X, anziché per ogni $x \in X$.

5. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X, e supponiamo che esista una funzione misurabile e non negativa f, tale che $f_n \leq f$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$. Si provi che
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

6. Esibire una successione $\{f_n\}$ di funzioni misurabili tale che
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu < \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu < \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu < \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

   [**Traccia:** per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga $f_{2n+1} = \chi_{[1/3,1]}$, $f_{2n+2} = \chi_{[0,1/3]}$.]

7. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili su X, tale che:

   (i) $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$;

   (ii) $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (iii) $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$;

   (iv) g_n e g sono sommabili su X e $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$ per $n \to \infty$.

   Si provi che
$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

8. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X. Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty,$$

si provi che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è sommabile su X e che

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

9. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se f è sommabile su X, si provi che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X |f|^{1/n} \, d\mu = \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}).$$

10. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili tale che $\int_X |f_n - f| \, d\mu \; \to 0$; si provi che allora $f_n \to f$ in misura. È vero il viceversa?

11. (*Teorema di Severini-Egorov con convergenza dominata*) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X, tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X, e supponiamo che esista g sommabile su X per cui risulti $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme misurabile E con $\mu(E) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c per $n \to \infty$.
[**Traccia:** si ripeta, con le modifiche necessarie, la dimostrazione del teorema 3.4.2.]

12. (*Lemma di Fatou per la convergenza in misura*) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili e q.o. finite su X, con $f_n \geq 0$ q.o.; si provi che se $f_n \to f$ in misura, allora

$$0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mu.$$

[**Traccia:** per assurdo, usando la definizione di minimo limite, si troverà una sottosuccessione di $\{f_n\}$, dalla quale si estrarrà un'ulteriore sottosuccessione a cui applicare il lemma di Fatou ...]

13. Si provi che se $f_n \to f$ in misura, e se esiste una funzione sommabile g tale che $|f_n| \leq g$ q.o., allora $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$.
[**Traccia:** si applichi l'esercizio precedente a $2g \pm |f_n - f|$.]

14. Sia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]}$ una famiglia di σ-algebre di sottoinsiemi di un fissato insieme X. Per ogni $t \in [0, 1]$, sia μ_t una misura su $(X, \mathcal{F}_t)$; posto $\mathcal{F} = \bigcap_{t\in[0,1]} \mathcal{F}_t$, supponiamo che per ogni $E \in \mathcal{F}$ la funzione $t \mapsto \mu_t(E)$ sia misurabile secondo Lebesgue.

    (i) Si provi che la funzione

    $$\mu(E) = \int_0^1 \mu_t(E) \, dt$$

    è una misura su $(X, \mathcal{F})$;

(ii) si descriva esplicitamente la misura μ nei casi seguenti:

(a) $X = [0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{M}$, $\mu_t =$ misura di Dirac concentrata nel punto t,

(b) $X = [0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{M}$, $\mu_t(E) = m(E \cap [0,t])$.

4.4 Confronto fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue

Consideriamo lo spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. Come suggerisce l'esercizio 4.2.4, sembra esserci una relazione fra l'integrabilità secondo Riemann e la sommabilità secondo Lebesgue: come vedremo subito, la prima implica la seconda e l'integrale di Riemann di una funzione, se esiste, coincide con quello di Lebesgue. Ciò, fra l'altro, ci permetterà di dire che il calcolo esplicito di un integrale di Lebesgue, quando è possibile, si fa esattamente come siamo da sempre abituati a fare. Questo paragrafo è dedicato al confronto tra le due nozioni di integrale, compreso il caso degli integrali di Riemann impropri; daremo anche una caratterizzazione delle funzioni Riemann integrabili in termini della misura di Lebesgue.

Indicheremo con $\mathcal{R}(a,b)$ l'insieme delle funzioni Riemann integrabili sul generico intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e con $\mathcal{L}^1(a,b)$ quello delle funzioni Lebesgue sommabili su $[a,b]$; denoteremo rispettivamente con

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f\,dm$$

gli integrali di f su $[a,b]$ secondo Riemann e secondo Lebesgue.

Per quanto riguarda l'integrale di Riemann su un intervallo, vale il seguente risultato:

Proposizione 4.4.1 *Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, allora $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ e*

$$\int_a^b f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx;$$

viceversa, esistono funzioni sommabili su $[a,b]$ che non sono Riemann integrabili su $[a,b]$.

Dimostrazione La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$ è sommabile in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con integrale nullo, ma non è Riemann integrabile su alcun intervallo di ampiezza positiva.

Dimostriamo l'enunciato principale. Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$: proviamo per prima cosa che f è misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue). Anzitutto osserviamo che per ogni funzione φ costante a tratti e nulla fuori di $[a,b]$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{I_i}, \qquad I_i \subseteq [a,b] \quad \text{intervalli disgiunti,}$$

l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue su $[a,b]$ coincidono:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi\,dm = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(I_i).$$

Per definizione, poi, f è limitata in $[a,b]$ e si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sup\left\{\int_a^b \varphi\,dm : \varphi \text{ costante a tratti, } \varphi \le f \text{ in } [a,b]\right\} = \\ &= \inf\left\{\int_a^b \psi\,dm : \psi \text{ costante a tratti, } \psi \ge f \text{ in } [a,b]\right\}.\end{aligned}$$

Quindi esistono due successioni $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ di funzioni costanti a tratti tali che $\varphi_n \le f \le \psi_n$ in $[a,b]$ e $\int_a^b(\psi_n - \varphi_n)\,dm < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Inoltre si può supporre che $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ e $\psi_n \ge \psi_{n+1}$ per ogni n (rimpiazzando φ_n con $\max_{k\le n}\varphi_k$ e ψ_n con $\min_{k\le n}\psi_k$).
Definiamo ora

$$\varphi = \sup_n \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\varphi_n \qquad \psi = \inf_n \psi_n = \lim_{n\to\infty}\psi_n\,.$$

Le funzioni φ e ψ sono misurabili (proposizione 3.1.6), e si ha $\varphi \le f \le \psi$; dimostriamo che $\varphi = \psi$ q.o. in $[a,b]$.
Poiché $0 \le \psi - \varphi \le \psi_n - \varphi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, per la monotonia dell'integrale deduciamo

$$0 \le \int_a^b (\psi - \varphi)\,dm \le \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

quindi $\psi - \varphi$, essendo non negativa ed avendo integrale nullo, è q.o. nulla in $[a,b]$ per l'esercizio 4.2.7.
Pertanto abbiamo $\varphi = f = \psi$ q.o. in $[a,b]$: dunque f coincide q.o. con una funzione misurabile e quindi, in virtù della completezza della misura di Lebesgue, è essa stessa misurabile (osservazione 3.2.2).
Poichè f è limitata in $[a,b]$, f è sommabile su $[a,b]$. Inoltre, per la monotonia dell'integrale, per ogni coppia di funzioni costanti a tratti φ,ψ, tali che $\varphi \le f \le \psi$ in $[a,b]$, risulta

$$\int_a^b \varphi\,dm \le \int_a^b f\,dm \le \int_a^b \psi\,dm;$$

ne segue, per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f\,dm \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

il che prova che gli integrali di Riemann e di Lebesgue di f coincidono. □

Per quanto riguarda gli integrali di Riemann impropri, la situazione è meno facile. Ci limiteremo per semplicità a trattare il caso di integrali impropri su $[0,\infty[$; indicheremo con $\mathcal{R}^*(0,\infty)$ la classe delle funzioni che sono Riemann integrabili in senso improprio su tale semiretta: per definizione, si ha $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ se e solo se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$ ed esiste finito il limite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx,$$

il quale definisce appunto l'integrale improprio $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Proposizione 4.4.2 **(i)** *Se $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, allora in generale $f \notin \mathcal{R}^*(0,\infty)$.*

(ii) *Se $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, e se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, allora $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ e*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f\,dm\ .$$

(iii) *Se $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ allora in generale $f \notin \mathcal{L}^1(0,\infty)$.*

(iv) *Se $f, |f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ allora $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ e*

$$\int_0^\infty f\,dm = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Dimostrazione **(i)** La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$ è sommabile su $[0,\infty[$ con integrale nullo, e non appartiene a $\mathcal{R}^*(0,\infty)$.

(ii) La funzione f è sommabile su $[0,\infty[$, e poiché per ipotesi essa è anche Riemann integrabile su ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, dalla proposizione 4.4.1 segue che

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f\ dm \quad \forall b > 0.$$

Passiamo al limite per $b \to +\infty$: per ogni $x > 0$ si ha

$$\lim_{b\to+\infty} f(x)\chi_{[0,b]}(x) = f(x)\chi_{[0,+\infty[}(x),$$

ed inoltre

$$|f(x)\chi_{[0,b]}(x) \le |f(x)| \qquad \forall x > 0;$$

quindi dalla sommabilità di f e dal teorema 4.3.4 segue che

$$\exists \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f\,dm,$$

da cui la tesi.

(iii) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \ge 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $[0,\infty[$; inoltre, come si sa, $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ mentre $|f| \notin \mathcal{R}^*(0,\infty)$. Ne segue che f non è sommabile su $[0,\infty[$: infatti se fosse $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, avremmo anche $|f| \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, e allora da (ii) seguirebbe $|f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$, cosa che non è vera.

(iv) Se $f, |f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$, allora in particolare $f, |f| \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$; dalla proposizione 4.4.1 segue allora che $f\chi_{[a,b]}$ è misurabile per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, e quindi f, essendo il limite puntuale di $f\chi_{[0,n]}$ per $n \to \infty$, è misurabile. Inoltre, applicando il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) alla successione $\{|f|\chi_{[0,n]}\}$, si ottiene

$$\int_0^\infty |f|\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |f|\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

In particolare, tale integrale è finito e pertanto $|f|$ è sommabile su $[0, \infty[$. Di conseguenza f è sommabile su $[0, \infty[$ ed applicando (ii) si ottiene la tesi. $\square$

È possibile caratterizzare, tramite la misura di Lebesgue, le funzioni di $\mathcal{L}^1(a, b)$ che appartengono alla sottoclasse $\mathcal{R}(a, b)$. Si ha infatti:

Proposizione 4.4.3 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si ha $f \in \mathcal{R}(a, b)$ se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.*

Dimostrazione **($\Longrightarrow$)** Sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Come abbiamo visto nella dimostrazione della proposizione 4.4.1, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esistono φ_n, ψ_n costanti a tratti in $[a, b]$ tali che

$$\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \psi_{n+1} \le \psi_n \text{ in } [a, b], \qquad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dm < \frac{1}{n}\,,$$

ed inoltre, posto $\varphi = \sup_n \varphi_n$ e $\psi = \inf_n \psi_n$, si ha $\varphi \le f \le \psi$ in $[a, b]$ e $\varphi = f = \psi$ q.o. in $[a, b]$.
Definiamo ora

$$B = \{x \in [a, b] : \exists n \in \mathbb{N}^+ : x \text{ è punto di discontinuità per } \varphi_n \text{ o per } \psi_n\},$$
$$P = \{x \in [a, b] : \varphi(x) < \psi(x)\};$$

come si è visto P ha misura nulla, ed anche B ha misura nulla essendo al più numerabile. Quindi

$$A \equiv B \cup P \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad m(A) = 0.$$

Dimostriamo che f è discontinua *al più* nei punti di A: ciò proverà la tesi.
Se x è un punto di discontinuità per f, devono esistere $\varepsilon > 0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \qquad |f(x_k) - f(x)| \ge \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per provare che $x \in A$, notiamo che se $x \in B$ allora evidentemente $x \in A$; se invece $x \notin B$, allora x è punto di continuità per tutte le funzioni φ_n, ψ_n. Dato che tali funzioni sono costanti a tratti, ciò implica che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_n(x_k) = \varphi_n(x), \quad \psi_n(x_k) = \psi_n(x) \qquad \forall k \ge k_n.$$

Ne segue, fissando arbitrariamente n e scegliendo $k \ge k_n$,

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) - \varphi_n(x_k) \ge f(x) - f(x_k) & \text{se } f(x_k) \le f(x) - \varepsilon \\ \psi_n(x_k) - \varphi_n(x) \ge f(x_k) - f(x) & \text{se } f(x_k) \ge f(x) + \varepsilon. \end{cases}$$

In entrambi i casi si deduce

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) \ge |f(x_k) - f(x)| \ge \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$\psi(x) \ge \varphi(x) + \varepsilon > \varphi(x).$$

Pertanto $x \in P$ ed infine, come si voleva, $x \in A$.

($\Longleftarrow$) Sia f limitata in $[a, b]$ e continua salvo che in un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la partizione π_n di $[a, b[$ i cui nodi sono

$$x_i = a + \frac{i}{2^n}(b - a), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^n,$$

e poniamo $I_{in} = [x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \ldots, 2^n$; definiamo poi le seguenti funzioni costanti a tratti:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \inf_{I_{in}} f \cdot \chi_{I_{in}}\,, \qquad \psi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \sup_{I_{in}} f \cdot \chi_{I_{in}}\,.$$

Dato che, per ogni n, π_{n+1} è più fine di π_n, è chiaro che

$$\inf_{[a,b[} f = \varphi_0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \psi_{n+1} \le \psi_n \le \psi_0 = \sup_{[a,b[} f\ .$$

Quindi, posto $\varphi = \sup_n \varphi_n$ e $\psi = \inf_n \psi_n$, si ha per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dm = \int_a^b \varphi\, dm, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n\, dm = \int_a^b \psi\, dm,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dm = \int_a^b (\psi - \varphi)\, dm.$$

Osserviamo ora che se x è un punto di continuità di f, allora deve essere $\varphi(x) = \psi(x)$. Infatti, se f è continua in x, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x' - x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

allora, per n abbastanza grande, l'unico intervallo I_{in} a cui appartiene x è contenuto in $]x - \delta, x + \delta[$. Di conseguenza si ha, per n abbastanza grande,

$$x' \in I_{in} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e dunque

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \sup_{I_{in}} f - \inf_{I_{in}} f \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{definitivamente.}$$

Quindi, a maggior ragione,

$$0 \le \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, deve essere $\varphi(x) = \psi(x)$.
Per ipotesi, i punti di discontinuità di f formano un insieme di misura nulla: ne segue, essendo $\varphi \le f \le \psi$ in $[a, b]$,

$$\varphi = f = \psi \qquad \text{q.o. in } [a, b],$$

cosicché f è misurabile grazie alla completezza della misura di Lebesgue. Inoltre

$$\int_a^b \varphi\, dm = \int_a^b f\, dm = \int_a^b \psi\, dm,$$

ed in particolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dm = 0.$$

Per definizione di integrale di Riemann si conclude che $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f\, dm. \quad \square$$

Esercizi 4.4

1. Determinare una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite in $[0,1]$, tali che:

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1], \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dm = 1.$$

2. Determinare una funzione f, sommabile su $\mathbb{R}$, ed illimitata sul complementare di ogni compatto.

3. Si consideri la funzione Γ di Eulero, già incontrata nel teorema 2.6.1. Si provi che Γ è una funzione di classe C^∞, ed anzi analitica, su $]0,\infty[$, e che

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\log x)^n\, e^{-x}\, dx \qquad \forall p > 0.$$

4. Si consideri la funzione

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - a\sin^2 t}}, \qquad 0 < a < 1.$$

(i) Si verifichi che F è di classe C^∞ su $]0,1[$.

(ii) Si calcolino, se esistono, i limiti

$$\lim_{a\to 0^+} F(a), \qquad \lim_{a\to 1^-} F(a).$$

5. Sia

$$f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n, \qquad x \in [0,\infty[.$$

Dimostrare che $f_n \geq f_{n+1}$ e calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; dire inoltre se si può passare al limite sotto il segno di integrale nei due casi seguenti:

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty f_n(x) e^{x/2}\, dm, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty f_n(x) e^{-x/2}\, dm.$$

6. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

   (i) $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\log x|\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1,$

   (ii) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{1+(n+1)^2} \quad \forall t \in [-1,1],$

   (iii) $\int_0^1 \sin x \log x\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n(2n)!}$,

   (iv) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1}\,dx = \Gamma(p) \quad \forall p > 0,$

   (v) $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$,

   (vi) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x+1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$,

   (vii) $\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \sin nx}{a^n}\,dx = \frac{2a(1+a^2)}{(a^2-1)^2} \quad \forall a > 1,$

   (viii) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$,

   (ix) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n} x^{-1/n}\,dx = 1,$

   (x) $\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$

   (xi) $\int_0^1 (e^x - 1)(\log x + \frac{1}{x})\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+n+1}{(n-1)!(n^2+n)^2}$,

   (xii) $\int_0^1 \frac{(x\log x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}$,

   (xiii) $\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh bx}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2} \quad \forall b > a > 0,$

   (xiv) $\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!}$.

   (xv) $\frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

7. Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin n\sqrt{x}\cdot\cos nx\cdot e^{-x}}{nx+x^2}\,dx.$$

8. Si verifichi che se $a > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = 0,$$

   e che ciò è falso per $a = 0$.

9. Si provi che per $p, q > 0$ risulta

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}\,;$$

dedurne che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

10. Si provi che per $|a| \leq 1$ risulta

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}\,;$$

dedurne che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+1)(6n+2)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2.$$

11. Sia $f :]0,\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile, tale che le funzioni $x^\alpha f(x)$, $x^\beta f(x)$ siano sommabili su $]0,\infty[$, ove α, β sono numeri reali con $\alpha < \beta$. Provare che $x^\gamma f(x)$ è sommabile su $]0,\infty[$ per ogni $\gamma \in]\alpha, \beta[$, e che la funzione $F(\gamma) = \int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dm$ è continua in $[\alpha, \beta]$.

12. Poniamo

$$F_n(t) = \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+n^2(x-t)^2}\,dm, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Provare che se f è continua in un punto $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = f(t).$$

13. Sia C_ξ l'insieme di Cantor di parametro $\xi \in]0, \frac{1}{3}[$ (paragrafo 1.6). Le funzioni χ_{C_ξ} sono Riemann integrabili su $[0,1]$?

14. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esista finito il limite

$$g(x_0) \equiv \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Dimostrare che f è limitata, che f è misurabile, e che f è Riemann integrabile.

15. Si costruisca un elemento $f \in L^1(0,1)$ tale che nessuna funzione equivalente a f sia Riemann integrabile.

Vogliamo analizzare alcune relazioni che possono intercorrere fra diverse misure definite su una stessa σ-algebra. Consideriamo dunque un insieme X ed una σ-algebra $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X; siano poi λ e μ due misure definite su $\mathcal{F}$.

Definizione 4.4.4 *Diciamo che λ è* assolutamente continua *rispetto a μ, e scriviamo $\lambda \ll \mu$, se*

$$E \in \mathcal{F}, \quad \mu(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(E) = 0.$$

Una misura λ è quindi assolutamente continua rispetto ad un'altra misura μ se ha (almeno) gli stessi insiemi di misura nulla che ha μ.

Definizione 4.4.5 *Sia $A \in \mathcal{F}$; diciamo che la misura μ è* concentrata *su A se si ha*

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Questa definizione è stata già incontrata nell'esempio 2.1.3 (2). Si può dire, equivalentemente, che μ è concentrata su A se e solo se risulta $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{F}$ disgiunto da A. Si noti che l'insieme A non è univocamente determinato: se μ è concentrata su A, allora μ è concentrata anche su tutti gli insiemi di $\mathcal{F}$ che contengono A, ed anche su quelli che differiscono da A per un insieme di misura nulla (esercizio **??**.1).

Definizione 4.4.6 *Diciamo che λ è* singolare *rispetto a μ, e scriviamo $\lambda \perp \mu$, se esistono due insiemi disgiunti $A, B \in \mathcal{F}$ tali che λ sia concentrata su A e μ sia concentrata su B.*

Notiamo che la relazione di assoluta continuità è riflessiva e transitiva, mentre quella di singolarità è simmetrica. Inoltre le due nozioni sono fra loro "duali", nel senso precisato dalla seguente

Proposizione 4.4.7 *Siano $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ misure sulla σ-algebra $\mathcal{F}$. Allora:*

(i) *se $\lambda_1 \perp \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$, allora $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$;*

(ii) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \ll \mu$, allora $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$;*

(iii) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$, allora $\lambda_1 \perp \lambda_2$;*

(iv) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_1 \perp \mu$, allora $\lambda_1 = 0$.*

Dimostrazione Vedere l'esercizio **??**.3. $\square$

Il termine "assoluta continuità", che sembra avere poca affinità con il concetto espresso nella definizione 4.4.4, è giustificato dalla proposizione che segue:

Proposizione 4.4.8 *Siano λ, μ misure definite sulla σ-algebra $\mathcal{F}$, e supponiamo che $\lambda(X) < +\infty$. Si ha $\lambda \ll \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$E \in \mathcal{F}, \ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) < \varepsilon.$$

Dimostrazione **($\Longrightarrow$)** Sia $\lambda \ll \mu$. Ragioniamo per assurdo: negando la tesi, otteniamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si può trovare $E_n \in \mathcal{F}$ per il quale risulta $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\lambda(E_n) \geq \varepsilon$. Posto allora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \ , \qquad F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \limsup_{n \to \infty} E_n \ ,$$

si ha

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k},$$

da cui $\mu(F_n) \to 0$ per $n \to \infty$; dato che $F \subseteq F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si deduce $\mu(F) \leq \mu(F_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e pertanto $\mu(F) = 0$.
D'altra parte, essendo $F_n \supseteq E_n$, risulta $\lambda(F_n) \geq \lambda(E_n) \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; e poiché $F_n \supseteq F_{n+1}$, dal fatto che $\lambda(X) < \infty$ e dalla proposizione 2.1.5 segue che

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) \geq \varepsilon.$$

Quindi λ non verifica la definizione di assoluta continuità rispetto a μ.

($\Longleftarrow$) Ragionando nuovamente per assurdo, sia $E \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $\lambda(E) > 0$: allora, scelto $\varepsilon \in]0, \lambda(E)]$, si ha

$$\mu(E) = 0 < \delta \quad \forall \delta > 0, \quad \text{ma} \quad \lambda(E) \geq \varepsilon,$$

contraddicendo così l'ipotesi. $\square$

Osserviamo che la caratterizzazione fornita dalla proposizione precedente non vale in generale per misure λ non finite (esercizio **??**.4).

L'esempio tipico di una misura finita ed assolutamente continua rispetto ad una misura assegnata μ è dato dall'integrale di una funzione μ-sommabile. Vale infatti la proprietà seguente (*assoluta continuità dell'integrale*):

Proposizione 4.4.9 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se f è una funzione misurabile su X, allora la misura*

$$\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{F},$$

è assolutamente continua rispetto a μ. Se in particolare $f \in \mathcal{L}^1(X)$, allora λ è una misura finita su X.

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Ovviamente allora risulta

$$\lambda(X) = \int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Inoltre, se f è misurabile su X, allora $|f|$ è integrabile e per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) = 0$ si ha $\lambda(E) = 0$ grazie all'osservazione 4.2.3. $\square$

Uno dei più importanti risultati di teoria della misura è costituito dal viceversa di questa proposizione, noto come *teorema di Radon-Nikodým*; da esso segue che se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, allora ogni misura finita λ definita su $\mathcal{F}$, assolutamente continua rispetto a μ, è del tipo

$$\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu$$

per qualche f μ-sommabile su X. Dimostreremo questo teorema più avanti nel corso.

Esercizi ??

1. Si provi che se μ è una misura concentrata su un insieme $A \in \mathcal{F}$, allora μ è concentrata in ogni insieme $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A \setminus B) = 0$, mentre non è concentrata su alcun insieme D tale che $\mu(A \setminus D) > 0$.

2. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in \mathcal{M}_X$.

   (i) Si verifichi che $\mathcal{S} = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene i boreliani ma non è necessariamente contenuta in $\mathcal{M}$.

   (ii) Posto
   $$\lambda_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{S},$$
   si provi che λ_f è una misura su $\mathcal{S}$, che λ_f è concentrata su $f(X)$, e che se μ è completa, oppure finita, allora λ_f è completa, oppure finita. Se μ è σ-finita, è vero che λ_f è σ-finita? (Ricordiamo che, allorché X è uno spazio probabilizzato, la misura λ_f è chiamata *misura immagine*, o *legge*, della variabile aleatoria f; si veda l'esercizio 3.1.6.)

   (iii) Si verifichi che
   $$\int_{\mathbb{R}} \chi_B(t)\, d\lambda_f = \int_X \chi_B(f(x))\, d\mu \qquad \forall B \in \mathcal{S},$$
   e si deduca che se $\mu(X) < \infty$ allora
   $$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, d\lambda_f = \int_X g(f(x))\, d\mu \qquad \forall g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}, \lambda_f).$$

   (iv) Siano $f, g \in \mathcal{M}_X$ tali che si abbia $\mu(f^{-1}(g(X))) = 0$, oppure $\mu(g^{-1}(f(X))) = 0$. Si provi che allora $\lambda_f \perp \lambda_g$.

   (v) Sia $X = [-1, 1]$ e sia μ la misura di Lebesgue su X. Se $f(x) = \max\{x, 0\}$ e $g(x) = \min\{x, 0\}$, è vero che $\lambda_f \perp \lambda_g$?

3. Si dimostrino gli enunciati della proposizione 4.4.7.

4. Sia μ la misura di Lebesgue su $]0, 1[$, e poniamo
   $$\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}, \qquad E \in \mathcal{M},\ E \subseteq]0, 1[\,.$$
   Si provi che λ è assolutamente continua rispetto a μ, ma non vale la condizione espressa nella proposizione 4.4.9.

5. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f_n, f sono funzioni misurabili tali che $f_n \to f$ in misura, si provi che, dette λ_n e λ le leggi di f_n e f rispettivamente, risulta
   $$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda \qquad \forall g \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$
   (Se $\mu(X) = 1$, in linguaggio probabilistico si dice che le variabili aleatorie f_n convergono *in legge* alla variabile aleatoria f.)
   [**Traccia:** Si utilizzi la formula illustrata nell'esercizio **??**.2(iii).]

4.5 Lo spazio L^1

Poiché due funzioni sommabili che coincidono q.o. hanno lo stesso integrale, conviene identificare fra loro le funzioni q.o. coincidenti, come si è fatto per lo spazio $\mathcal{L}^\infty$.
Sia dunque $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e introduciamo nello spazio vettoriale $\mathcal{L}^1(X)$ delle funzioni sommabili su X la seguente relazione di equivalenza, già introdotta nel paragrafo 3.2:

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \text{ q.o. in } X.$$

Definizione 4.5.1 *Lo spazio quoziente $\mathcal{L}^1(X)/\simeq$ si indica con $L^1(X)$.*

Gli elementi di $L^1(X)$ sono dunque classi di equivalenza di funzioni sommabili su X; la struttura vettoriale di L^1 è la stessa di L^∞ ed è ovvia.

Teorema 4.5.2 *Lo spazio $L^1(X)$ è uno spazio di Banach con la norma*

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu.$$

Dimostrazione La quantità $\|f\|_1$ dipende solo dalla classe $[f]$ e non dal rappresentante f, in virtù dell'osservazione 4.2.7; le proprietà che fanno di essa una norma sono pressocché ovvie. Proviamo che L^1 è completo rispetto a questa norma.
Sia $\{[f_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in L^1: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|[f_n] - [f_m]\|_1 = \|[f_n - f_m]\|_1 < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon.$$

Dunque, scelto $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, si costruisce una successione strettamente crescente $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|[f_{\nu_{k+1}} - f_{\nu_k}]\|_1 < 2^{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Scegliamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un elemento $g_n \in [f_n]$: allora si ha

$$\int_X |g_{\nu_{k+1}} - g_{\nu_k}| \, d\mu < 2^{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notiamo ora che

$$g_{\nu_k} = g_{\nu_0} + \sum_{h=0}^{k-1} (g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e che la serie $\sum_{h=0}^\infty (g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h})$ converge assolutamente q.o. in X; infatti, per l'esercizio 4.3.3,

$$\int_X \sum_{h=0}^\infty |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}| \, d\mu = \sum_{h=0}^\infty \int_X |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}| \, d\mu < \sum_{h=0}^\infty 2^{-h} = 2,$$

e quindi la funzione $\sum_{h=0}^\infty |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$, essendo sommabile, è q.o. finita su X (esercizio 4.2.7). Pertanto

$$\exists f(x) \equiv \lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}(x) \quad \text{q.o. in } X.$$

Completiamo la definizione di f ponendo $f(x) = 0$ nei punti x in cui la serie sopra scritta non converge: la funzione f così definita risulta allora misurabile su X. Essa è inoltre sommabile, essendo limite puntuale q.o. delle g_{ν_k}, le quali sono dominate dalla funzione sommabile $|g_{\nu_0}| + \sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$; quindi la funzione f definisce un elemento $[f] \in L^1(X)$. Proviamo che $[f_n] \to [f]$ in L^1: in virtù del lemma di Fatou per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned} \|[f_n] - [f]\|_1 &= \int_X |g_n - f| \, d\mu \leq \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |g_n - g_{\nu_k}| \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \|[f_n] - [f_{\nu_k}]\|_1 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

il che prova la tesi. $\square$

Osserviamo che dalla dimostrazione precedente discende, in particolare, la seguente proprietà:

Proposizione 4.5.3 *Se $f_n \to f$ in $L^1(X)$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge q.o. a f in modo dominato, cioè esiste una funzione non negativa $g \in L^1(X)$ tale che $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ q.o. in X.*

Dimostrazione Le g_{ν_k} della dimostrazione precedente convergono q.o. a f e sono dominate dalla funzione sommabile $|g_{\nu_0}| + \sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$. $\square$

Osservazione 4.5.4 Nella proposizione precedente si è volutamente confuso il generico elemento di L^1, cioè la classe di equivalenza, con uno dei rappresentanti di tale classe, che è una funzione sommabile. Questo modo di fare semplifica i discorsi e non provoca guai, quindi verrà sistematicamente adottato nel seguito. L'unica differenza che ne risulta è che le relazioni puntuali tra funzioni di L^1 valgono solamente *quasi ovunque*, perché tali "funzioni" sono definite a meno di insiemi di misura nulla.

Esercizi 4.5

1. Si consideri lo spazio misurato $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ ove $\nu(E)$ è la cardinalità di E. Si caratterizzi lo spazio $L^1(\mathbb{N})$, e si discutano le connessioni fra convergenza puntuale, convergenza uniforme, convergenza in misura e convergenza in L^1.

2. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in L^1(X, \mu)$. Posto $\lambda(E) = \int_E |f| \, d\mu$, si provi che risulta $g \in L^1(X, \lambda)$ se e solo se $fg \in L^1(X, \mu)$ e che in tal caso
$$\int_X |g| \, d\lambda = \int_X |fg| \, d\mu.$$
[**Traccia:** provare il risultato per $g \in \mathcal{S}$ e poi usare la proposizione 3.1.7 ed il teorema di Lebesgue.]

3. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia f integrabile su X. Provare la seguente formula di "integrazione per fette":
$$\int_X |f| \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dm.$$

[**Traccia:** si tratti dapprima il caso $f \in \mathcal{S}$, scrivendo f nella forma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$, con i numeri $|\alpha_i|$ ordinati in modo crescente e con $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$; poi si usi il teorema di B.Levi.]

4. Siano f_n, f funzioni di $L^1(X)$ tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X. Si provi che se, inoltre, $\int_X |f_n|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$, allora $f_n \to f$ in $L^1(X)$, e che la tesi è in generale falsa senza questa ipotesi.

5. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito e sia $f \in L^1(X)$. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A) < \infty$ e $\int_{A^c} |f|\, d\mu < \varepsilon$.

6. Provare che le funzioni f_n definite da
$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n(e^{x/n} - 1)\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$
appartengono a $L^1(0, \infty)$ (rispetto alla misura di Lebesgue). Si dica se esiste finito il limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\, dm.$$

7. Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$
$$f_n(x) = \left[\frac{1}{nx}\right], \qquad x > 0,$$
ove $[y]$ indica la parte intera di y.

   (i) Si verifichi che $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $]0, \infty[$.

   (ii) Si dica se $\{f_n\}$ converge a 0 in $L^1(]0, \infty[)$ (rispetto alla misura di Lebesgue).

   (iii) Si dica se $\{f_n\}$ converge a 0 in misura.

8. Sia $L^1_w(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ per le quali esiste $c > 0$ tale che
$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}) \le \frac{c}{t} \qquad \forall t > 0$$
(la lettera w sta per "weak", cioè "debole").

   (i) Si verifichi che $L^1_w(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale.

   (ii) Si dimostri che $L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_w(\mathbb{R})$ con inclusione stretta.

   (iii) Si provi che se $\{f_n\} \subset L^1_w(\mathbb{R})$, se $f_n \to f$ in misura, e se esiste $K > 0$ tale che
$$\sup_{t>0}\{t \cdot m(\{x \in R : |f_n(x)| > t\})\} \le K \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
allora $f \in L^1_w(\mathbb{R})$.

4.6 Teoremi di densità in L^1

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. È utile sapere se e quando sia possibile approssimare gli elementi di $L^1(X)$, oppure di $L^\infty(X)$, rispetto alla corrispondente norma, mediante funzioni "migliori" in qualche senso. Come vedremo, vi sono svariati risultati di questo tipo.
Il primo di questi riguarda un arbitrario spazio misurato.

Proposizione 4.6.1 *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora $\mathcal{S}_0$ è denso in $L^1(X)$.*

Dimostrazione Sia $f \in L^1$. Poiché l'insieme dove f è diversa da 0 è σ-finito (esercizio 4.2.12), applicando l'osservazione 3.1.8 possiamo trovare una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } X, \qquad |\varphi_n(x)| \leq |f(x)| \quad \text{q.o. in } X$$

(si ricordi l'osservazione 4.5.4). Dato che

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 2|f(x)| \quad \text{q.o. in } \ X,$$

il teorema di Lebesgue, nella variante dell'esercizio 4.3.4, fornisce la tesi. □

Osservazione 4.6.2 Come già sappiamo (proposizione 3.1.7 ed osservazione 3.1.8), lo spazio $\mathcal{S}$ è denso in $L^\infty(X)$, ma lo spazio $\mathcal{S}_0$ non lo è, a meno che non sia $\mu(X) < \infty$.

Consideriamo adesso lo spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. In questo ambito pressocché tutti gli spazi di funzioni regolari risultano densi in $L^1(\mathbb{R})$.

Proposizione 4.6.3 *$C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Poiché $\mathcal{S}_0$ è denso in L^1, basterà dimostrare che ogni $f \in \mathcal{S}_0$ è arbitrariamente vicina ad una funzione continua e sommabile g, ed a questo scopo è chiaro che è sufficiente considerare il caso $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{M}$ e $m(E) < \infty$.
Sia dunque $\varepsilon > 0$; per la proposizione 1.7.3 esistono un aperto A ed un chiuso C tali che $C \subseteq E \subseteq A$ e $m(A \setminus C) < \varepsilon$; in particolare, $m(A) < m(E) + \varepsilon < \infty$. Poniamo, come nella dimostrazione del teorema 3.4.1,

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}(x, A^c)}{\mathrm{d}(x, A^c) + \mathrm{d}(x, C)}\ , \qquad x \in \mathbb{R};$$

si ha $0 \leq g \leq 1$, $g = 1$ su C, $g = 0$ su A^c ed inoltre g è continua. D'altra parte $g \in L^1(\mathbb{R})$ perché

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \int_A g\, dm \leq m(A) < \infty.$$

La tesi segue allora dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_E - g|\, dm = \int_{A\setminus C} |\chi_E - g|\, dm \leq m(A \setminus C) < \varepsilon. \quad \square$$

Osservazione 4.6.4 Lo stesso risultato vale in ogni spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dotato delle seguenti proprietà:

(i) X è uno spazio topologico T_4, cioè tale che chiusi disgiunti abbiano intorni disgiunti;

(ii) $\mathcal{F}$ è una σ-algebra contenente gli aperti;

(iii) μ è una misura regolare, cioè per ogni $E \in \mathcal{F}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

Ad esempio, ciò è vero per $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$, qualunque sia $N \in \mathbb{N}^+$, ed in $(\mathbb{R}^N, \mathcal{H}_p, H_p)$, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e $p \in]0, N]$.

Consideriamo ora lo spazio $C_0^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue il cui *supporto*, cioè la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$, è compatto.

Proposizione 4.6.5 *$C_0^0(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Basta provare che le funzioni di $C_0^0(\mathbb{R})$ approssimano nella norma di $L^1(\mathbb{R})$ quelle di $C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Sia $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, e consideriamo le funzioni

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq n \\ n+1-|x| & \text{se } |x| \in [n, n+1] \\ 0 & \text{se } |x| \geq n+1; \end{cases}$$

allora si ha $f\varphi_n \in C_0^0(\mathbb{R})$, $f\varphi_n \to f$ puntualmente in $\mathbb{R}$, $|f\varphi_n| \leq |f|$ in $\mathbb{R}$; ne segue, per il teorema di Lebesgue, $f\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Proposizione 4.6.6 *$C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Basta provare che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $C_0^0(\mathbb{R})$ rispetto alla norma di $L^1(\mathbb{R})$. Sia $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, e sia $M > 0$ tale che il supporto di f sia contenuto in $]-M, M[$, cosicché $f = 0$ per $|x| \geq M$. Utilizziamo il fatto che lo spazio $C_0^\infty(]-M, M[)$ è denso in $C_0^0(]-M, M[)$ rispetto alla norma uniforme (una dimostrazione di questo fatto è tratteggiata negli esercizi 4.6.10 e 4.6.11); dunque, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in C_0^\infty(]-M, M[)$ tale che

$$\sup_{|x| \leq M} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ne segue

$$\|\varphi - f\|_1 = \int_{-M}^{M} |\varphi - f| \, dm \leq 2M \sup_{|x| \leq M} |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Esercizi 4.6

1. Si provi che l'insieme delle funzioni che sono costanti a tratti e nulle fuori di un insieme di misura finita è denso in $L^1(\mathbb{R})$.
   [**Traccia:** si osservi che ogni $g \in C_0^0(\mathbb{R})$ è Riemann integrabile in un opportuno intervallo $[a, b]$.]

2. Esibire un esempio di successione $\{f_n\}$ che converga in $L^1(X)$ ma tale che per ogni $x \in X$ la successione $\{f_n(x)\}$ non abbia limite.

3. (*Continuità in L^1 delle traslazioni*) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posto, per $h \in \mathbb{R}$, $f_h(x) = f(x+h)$, si provi che:

   (i) $f_h \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f_h\|_1 = \|f\|_1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$;

   (ii) $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

   [**Traccia:** utilizzare la densità di $\mathcal{S}_0$ e di $C_0^0(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$.]

4. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posto, per $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_\lambda(x) = f(\lambda x)$, si provi che:

   (i) $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|F_\lambda\|_1 = \frac{1}{|\lambda|}\|f\|_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

   (ii) $\lim_{\lambda\to 1} \|F_\lambda - f\|_1 = 0$.

5. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} x^\alpha n^2 \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) dx,$$

   e calcolarlo.

6. Sia $g \in C^0(\mathbb{R})$ con $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$. Provare che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(x) f\left(\frac{x}{n}\right) dm = 0.$$

7. (*Lemma di Riemann-Lebesgue*) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, si provi che

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dm = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin tx\, dm = 0.$$

8. Sia $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) < \infty$. Provare che

$$\int_E \frac{1}{2 - \sin nx}\, dm = \frac{m(E)}{\sqrt{3}}.$$

   [**Traccia:** se E è un intervallo, l'integrale si calcola esplicitamente e, usando la periodicità, si ottiene il risultato passando al limite; si approssimi poi χ_E con funzioni costanti a tratti(esercizio 4.6.1).]

9. Sia X un insieme, sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e sia $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di misure definite su $\mathcal{F}$. Definita la misura $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ per $E \in \mathcal{F}$, si provi che:

   (i) se $f \in L^1(X,\mu)$ allora $f \in L^1(X,\mu_n)$ per ogni n, e

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\, d\mu_n;$$

(ii) in generale $L^1(X,\mu) \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} L^1(X,\mu_n)$.

10. Fissata $f \in C^0[0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'n-simo *polinomio di Bernstein* di f è definito da
$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che $P_n(0) = f(0)$ e $P_n(1) = f(1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

(ii) Si mostri che
$$P_n(t) - f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \quad \forall t \in [0,1].$$

(iii) Si provino le seguenti identità ($x \in \mathbb{R}$):
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \ ,$$
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \ ,$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx \ .$$

(iv) Fissato $\delta > 0$ e posto, per ogni $t \in [0,1]$,
$$A_t = \left\{ k \in \mathbb{N} : 0 \le k \le n, \left| \frac{k}{n} - t \right| \ge \delta \right\},$$
$$B_t = \left\{ k \in \mathbb{N} : 0 \le k \le n, \left| \frac{k}{n} - t \right| < \delta \right\},$$
si dimostrino le due disuguaglianze
$$\left| \sum_{k \in A_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| \le$$
$$\le \sum_{k \in A_t} \frac{(k-nt)^2}{\delta^2 n^2} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} 2\|f\|_\infty \le \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} [nt(1-t)] \le \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n},$$
$$\left| \sum_{k \in B_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| \le \varepsilon \qquad \text{se } \delta \le \delta_\varepsilon,$$
e si concluda che $P_n \to f$ uniformemente in $[0,1]$ per $n \to \infty$.

(v) Si deduca che, per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $C^\infty[a,b]$ è denso in $C^0[a,b]$ nella norma uniforme.

11. Sia $f \in C^0_0(\,]a,b[\,)$ e sia $\delta \in]0,(b-a)/4[$ tale che $f(x) = 0$ per $x \le a + 2\delta$ e per $x \ge b - 2\delta$. Sia poi $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi che converge uniformemente a f in $[a,b]$. Utilizzando le funzioni

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus]0,1[, \end{cases} \qquad \psi(x) = \frac{\int_x^1 \varphi\, dm}{\int_0^1 \varphi\, dm}, \quad x \ge 0,$$

ed infine

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le a + \delta \\ \psi\left(\frac{a+2\delta-x}{\delta}\right) & \text{se } a + \delta < x < a + 2\delta \\ 1 & \text{se } a + 2\delta \le x \le b - 2\delta \\ \psi\left(\frac{x-b+2\delta}{\delta}\right) & \text{se } b - 2\delta < x < b - \delta \\ 0 & \text{se } x \ge b - \delta, \end{cases}$$

si provi che $\{\eta Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\,]a,b[\,)$ e che tale successione converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$; si concluda che $C^\infty_0(\,]a,b[\,)$ è denso in $C^0_0(\,]a,b[\,)$ nella norma uniforme.

Capitolo 5

Misure prodotto

5.1 Rettangoli misurabili

Abbiamo già introdotto (paragrafo 2.2) la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, ma non siamo ancora in grado, come vorremmo, di ricondurre il calcolo degli integrali multipli a N integrazioni semplici successive, né di stabilire quando sia lecito scambiare l'ordine di integrazione. Tutto ciò è reso possibile, come si vedrà, dalla costruzione delle misure negli spazi prodotto.
Siano dunque $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ due spazi misurati. Nel prodotto cartesiano $X \times Y$ introduciamo la classe $\mathcal{R}$ dei *rettangoli misurabili*:

$$\mathcal{R} = \{E \subseteq X \times Y : E = A \times B, A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}.$$

La classe $\mathcal{R}$ non è né una σ-algebra né un'algebra, perché non è chiusa rispetto all'unione e nemmeno rispetto al passaggio al complementare; essa è soltanto chiusa rispetto all'intersezione, dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Inoltre $\mathcal{R}$ è una classe troppo ristretta di sottoinsiemi di $X \times Y$: nel caso $X = Y = \mathbb{R}$, ad esempio, vorremmo poter annoverare tra gli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ i triangoli, i cerchi, e tanti altri insiemi che non sono elementi di $\mathcal{R}$.
D'altra parte, su $\mathcal{R}$ possiamo definire una misura prodotto in modo naturale: se $E = A \times B \in \mathcal{R}$, poniamo (con la solita convenzione $0 \cdot \infty = 0$)

$$\lambda(E) = \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'algebra generata da $\mathcal{R}$, cioè la più piccola algebra contenente i rettangoli misurabili: è facile, anche se noioso, verificare che $\mathcal{A}$ è costituita da tutte le unioni finite di elementi di $\mathcal{R}$; altrettanto noioso, ma sempre facile, è provare che $\mathcal{A}$ è costituita da tutte le unioni finite di elementi *disgiunti* di $\mathcal{R}$ (esercizi 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3).
Ci sarà utile la seguente nozione:

Definizione 5.1.1 *Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di un insieme qualunque Z è detta* classe monotona *se:*

(i) *per ogni* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ *tale che* $P_n \subseteq P_{n+1}$ *si ha* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \mathcal{M}$;

(ii) *per ogni* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ *tale che* $P_n \supseteq P_{n+1}$ *si ha* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \mathcal{M}$.

Osserviamo che ogni σ-algebra è una classe monotona ma che il viceversa è falso (esercizi 5.1.6 e 5.1.7). Inoltre l'intersezione di una famiglia arbitraria di classi monotone è ancora una classe monotona.
Introduciamo adesso la σ-algebra di sottoinsiemi di $X \times Y$ su cui costruiremo la misura prodotto, ponendo

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \text{ la minima } \sigma\text{-algebra contenente } \mathcal{R}.$$

Ovviamente, $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è anche la minima σ-algebra contenente $\mathcal{A}$.
Vedremo in seguito che la funzione λ si può estendere alla σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e che tale estensione è una misura, che verrà denominata *misura prodotto* di μ e ν ed indicata col simbolo $\mu \times \nu$.

Esercizi 5.1

1. Si provi che se $E = A \times B \in \mathcal{R}$, allora E^c è unione finita di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$.

2. Si provi che se $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$, allora $\bigcup_{i=1}^m R_i$ è unione finita di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$.

3. Sia $\mathcal{A}$ la più piccola algebra contenente la classe $\mathcal{R}$. Si provi che

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\{ \bigcup_{i=1}^m R_i : R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R},\ m \in \mathbb{N} \right\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^m R_i : R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R} \text{ disgiunti},\ m \in \mathbb{N} \right\}.\end{aligned}$$

4. Sia $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni $A \times B \in \mathcal{R}$; si provi che se $R \in \mathcal{R}$ è l'unione finita o numerabile di elementi disgiunti $R_i \in \mathcal{R}$, allora

$$\lambda(R) = \sum_i \lambda(R_i).$$

5. Si estenda all'algebra $\mathcal{A}$ la funzione λ definita nell'esercizio precedente, ponendo

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^m \lambda(R_i) \qquad \text{se } A = \bigcup_{i=1}^m R_i, \quad R_i \text{ disgiunti}.$$

Si verifichi che questa è una buona definizione, ossia non dipende dal modo in cui si decompone A in rettangoli disgiunti; si provi poi che se $A \in \mathcal{A}$ è l'unione finita o numerabile di elementi disgiunti $A_i \in \mathcal{A}$, allora

$$\lambda(A) = \sum_i \lambda(A_i).$$

6. Provare che la famiglia di tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ (compreso l'insieme vuoto ed i singoli punti $\{x\}$) è una classe monotona che non è una σ-algebra.

7. Trovare una classe monotona di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sia chiusa rispetto al passaggio al complementare ma non sia una σ-algebra.

8. Dimostrare che la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^2$ è strettamente contenuta nella σ-algebra $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

5.2 Insiemi misurabili in $X \times Y$

Analizziamo adesso le proprietà della σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e dei suoi elementi. Cominciamo con un'utile caratterizzazione di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$:

Proposizione 5.2.1 *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati. Allora la σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è la minima classe monotona che contiene l'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili di $X \times Y$.*

Dimostrazione Indichiamo con $\mathcal{M}$ la minima classe monotona contenente $\mathcal{A}$; poiché ogni σ-algebra è una classe monotona, è chiaro che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Per provare l'uguaglianza, basterà mostrare che anche $\mathcal{M}$ è una σ-algebra, essendo $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ la *minima* σ-algebra contenente $\mathcal{A}$.
Cominciamo col dimostrare il seguente

Lemma 5.2.2 *Se $P, Q \in \mathcal{M}$, allora $P \setminus Q, P \cup Q \in \mathcal{M}$.*

Dimostrazione Per ogni $P \subseteq X \times Y$ sia

$$\Omega(P) = \{Q \subseteq X \times Y : \ Q \setminus P, \ P \setminus Q, \ P \cup Q \in \mathcal{M}\}.$$

Allora si verificano facilmente i seguenti fatti:

(a) $Q \in \Omega(P)$ se e solo se $P \in \Omega(Q)$ (a causa della simmetria nella definizione di $\Omega(P)$);

(b) $\Omega(P)$ è una classe monotona per ogni $P \subseteq X \times Y$ (perché tale è $\mathcal{M}$);

(c) $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$ (infatti, se $P \in \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{A}$, allora, essendo $\mathcal{A}$ un'algebra, si ha $P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$: dunque se $P \in \mathcal{A}$ risulta $Q \in \Omega(P)$ per ogni $Q \in \mathcal{A}$, ossia $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$);

(d) $\mathcal{M} \subseteq \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$ (per (b), (c) e per definizione di $\mathcal{M}$);

(e) $\mathcal{M} \subseteq \Omega(Q)$ per ogni $Q \in \mathcal{M}$ (infatti se $Q \in \mathcal{M}$ si ha, per (d), $Q \in \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$, ossia, per (a), $P \in \Omega(Q)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$, il che significa $\mathcal{A} \subseteq \Omega(Q)$: dunque, per (b) e per definizione di $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq \Omega(Q)$).

L'enunciato (e) fornisce allora la dimostrazione del lemma. $\square$

È facile adesso provare che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra. Anzitutto, $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$; poi, per il lemma precedente, se $Q \in \mathcal{M}$ si ha $Q^c = (X \times Y) \setminus Q \in \mathcal{M}$. Infine, sia $\{P_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{M}$: posto, per ogni N, $Q_N = \bigcup_{n=0}^{N} P_n$, si ha $Q_N \in \mathcal{M}$ (per il lemma precedente) e $Q_N \subseteq Q_{N+1}$, da cui, per la monotonia della classe $\mathcal{M}$,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n \in \mathcal{M}.$$

Ciò conclude la dimostrazione della proposizione 5.2.1. $\square$

Passiamo ora ad esaminare gli elementi di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, definiamo gli insiemi "proiezione" di E su X e su Y:

Definizione 5.2.3 *Sia $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Le* proiezioni *di E su Y sono gli insiemi*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad x \in X;$$

le proiezioni *di E su X sono gli insiemi*

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}, \qquad y \in Y.$$

È immediato constatare che gli insiemi E_x verificano per ogni $x \in X$

$$(E^c)_x = (E_x)^c, \quad \left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (E_\alpha)_x\,, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (E_\alpha)_x\,,$$

ed analoghe relazioni valgono per gli insiemi E^y, per ogni $y \in Y$.

Proposizione 5.2.4 *Se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora $E_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$ ed $E^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione Poniamo

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{G} \ \forall x \in X\}, \quad \mathcal{V} = \{E \subseteq X \times Y : E^y \in \mathcal{F} \ \forall y \in Y\}.$$

Grazie alle proprietà degli insiemi E_x, E^y sopra scritte, si verifica subito che $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono σ-algebre; d'altra parte entrambe contengono $\mathcal{R}$, in quanto se $Q = A \times B \in \mathcal{R}$, allora

$$Q_x = \begin{cases} B & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{se } x \in X \setminus A, \end{cases} \qquad Q^y = \begin{cases} A & \text{se } y \in B \\ \emptyset & \text{se } y \in Y \setminus B, \end{cases}$$

cosicché $Q_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$ e $Q^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$, ossia $Q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.
Ne segue $\mathcal{U}, \mathcal{V} \supseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ per definizione di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, cioè la tesi. $\square$

La proposizione precedente garantisce la misurabilità delle proiezioni su X e su Y di qualunque insieme $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (si noti che il viceversa è falso, come mostra l'esercizio 5.2.2); dunque possiamo calcolare $\nu(E_x)$ per ogni $x \in X$ e $\mu(E^y)$ per ogni $y \in Y$. Con il fondamentale teorema che segue si mostra che, sotto ragionevoli ipotesi sugli spazi misurati, le quantità $\nu(E_x)$ e $\mu(E^y)$ sono funzioni misurabili della variabile da cui dipendono, e per di più hanno integrali uguali; ciò ci consentirà di definire la misura prodotto $\mu \times \nu$ sugli elementi di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Teorema 5.2.5 *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Allora:*

(i) *la funzione $\Gamma_E : X \to [0, \infty]$, data da $\Gamma_E(x) = \nu(E_x)$ per ogni $x \in X$, è $\mathcal{F}$-misurabile;*

(ii) *la funzione $\Gamma^E : Y \to [0, \infty]$, data da $\Gamma^E(y) = \mu(E^y)$ per ogni $y \in Y$, è $\mathcal{G}$-misurabile;*

(iii) *vale la relazione*

$$\int_X \Gamma_E \, d\mu = \int_Y \Gamma^E \, d\nu.$$

Si noti che la tesi di questo teorema ci dice che

$$\int_X \left[\int_Y \chi_E(x, y) d\nu \right] d\mu = \int_X \Gamma_E \; d\mu = \int_Y \Gamma^E d\nu = \int_Y \left[\int_X \chi_E(x, y) d\mu \right] d\nu,$$

quindi abbiamo potuto scambiare l'ordine di integrazione. Questo ci permette anche, come vedremo fra poco, di *definire* la misura $\mu \times \nu(E)$ come il valore comune di tali integrali.

Dimostrazione Anzitutto, se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ allora, come si è già osservato, le proiezioni E_x, E^y appartengono rispettivamente a $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$, cosicché le funzioni Γ_E, Γ^E sono ben definite.
Sia Ω la famiglia degli elementi $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ che verificano la tesi del teorema: proveremo che Ω è una classe monotona che contiene l'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili di $X \times Y$; dalla proposizione 5.2.1 seguirà che $\Omega \supseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e quindi la tesi.
Dividiamo la dimostrazione in quattro passi.

(i) $\Omega \supseteq \mathcal{A}$. Infatti, se anzitutto $Q = A \times B \in \mathcal{R}$, allora risulta

$$\Gamma_Q(x) = \nu(B)\chi_A(x), \qquad \Gamma^Q(y) = \mu(A)\chi_B(y),$$

quindi la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile; inoltre

$$\int_X \Gamma_Q d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \Gamma^Q d\nu,$$

e dunque $Q \in \Omega$. Sia ora $A \in \mathcal{A}$: per l'esercizio 5.1.3, si ha $A = \bigcup_{i=1}^k R_i$ con gli R_i elementi disgiunti di $\mathcal{R}$. Si verifica allora facilmente che $\Gamma_A = \sum_{i=1}^k \Gamma_{R_i}$ e $\Gamma^A = \sum_{i=1}^k \Gamma^{R_i}$; quindi la $\mathcal{F}$-misurabilità di Γ_A e la $\mathcal{G}$-misurabilità di Γ^A, nonché l'uguaglianza $\int_X \Gamma_A d\mu = \int_Y \Gamma^A d\nu$, si ottengono per additività. Ciò prova che $A \in \Omega$, ossia $\mathcal{A} \subseteq \Omega$.

(ii) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi di Ω tale che $Q_n \subseteq Q_{n+1}$, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Infatti, posto $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ si ha, per la proposizione 2.1.5, $\Gamma_Q(x) = \lim_{n \to \infty} \Gamma_{Q_n}(x)$ e $\Gamma^Q(y) = \lim_{n \to \infty} \Gamma^{Q_n}(y)$, quindi (proposizione 3.1.6) la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile; l'uguaglianza dei due integrali segue dal teorema di B. Levi.

Ciò prova che $Q \in \Omega$.

(iii) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi disgiunti di Ω, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Infatti, posto $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ si ha, per numerabile additività, $\Gamma_Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{Q_n}$ e $\Gamma^Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{Q_n}$, da cui, analogamente a (ii), si ottiene $Q \in \Omega$.

(iv) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi di Ω tale che $Q_n \supseteq Q_{n+1}$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Per provare ciò, posto $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, distinguiamo due casi.

(a) Se $\mu(X) < \infty$ e $\nu(Y) < \infty$, allora $\nu((Q_0)_x) \le \nu(Y) < \infty$ e $\mu((Q_0)^y) \le \mu(X) < \infty$. Nuovamente per la proposizione 2.1.5, si ha $\Gamma_Q(x) \to \Gamma_{Q_n}(x)$ e $\Gamma^Q(y) \to \Gamma^{Q_n}(y)$ per $n \to \infty$; quindi la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile. Inoltre, l'uguaglianza degli integrali si ottiene in virtù del teorema di Lebesgue, il quale è applicabile perché

$$\Gamma_{Q_n}(x) \le \Gamma_{Q_0}(x) \quad \forall x \in X, \qquad \Gamma^{Q_n}(y) \le \Gamma^{Q_0}(y) \quad \forall y \in Y,$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_X \Gamma_{Q_0} d\mu \le \int_X \Gamma_{X\times Y} d\mu \\ \int_Y \Gamma^{Q_0} d\nu \le \int_Y \Gamma^{X\times Y} d\nu \end{array}\right\} = \mu(X)\nu(Y) < \infty.$$

Dunque in questo caso si ha $Q \in \Omega$.

(b) Se invece $\mu(X) = \infty$ oppure $\nu(Y) = \infty$, utilizziamo il fatto che, essendo i due spazi misurati σ-finiti, esistono due successioni di insiemi disgiunti $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, $\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, tali che $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$, $Y = \bigcup_{m=0}^{\infty} Y_m$, $\mu(X_k) < \infty$ per ogni k e $\nu(Y_m) < \infty$ per ogni m. Pertanto $X \times Y = \bigcup_{k,m\in\mathbb{N}}(X_k \times Y_m)$ e tale unione è disgiunta.
Poniamo $Q_{nkm} = Q_n \cap (X_k \times Y_m)$ e dimostriamo anzitutto che $\{Q_{nkm}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$. Consideriamo la famiglia

$$\Lambda = \{P \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} : P \cap (X_k \times Y_m) \in \Omega \quad \forall k, m \in \mathbb{N}\} :$$

essa è una classe monotona contenente $\mathcal{A}$, come segue subito da (i), (ii) e dal caso (a) già provato. Quindi, per la minimalità di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, si ha $\Lambda = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e dunque $\Omega \subseteq \Lambda$: ciò mostra che $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ e dunque, come si voleva, $\{Q_{nkm}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$.
Ciò premesso, si deduce che anche $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ appartiene a Λ, ossia $Q \cap (X_k \times Y_m) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_{nkm} \in \Omega$. Da (iii) concludiamo allora che Q, essendo l'unione disgiunta dei $Q \cap (X_k \times Y_m)$, sta anch'esso in Ω.

Da (ii) e (iv) segue che Ω è una classe monotona; per (i), essa contiene $\mathcal{A}$. La tesi è provata. □

Definizione 5.2.6 *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti. La* misura prodotto *$\mu \times \nu$ è definita come segue:*

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \Gamma_E \, d\mu = \int_Y \Gamma^E \, d\nu \qquad \forall E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G},$$

ove le funzioni Γ_E, Γ^E sono definite nel teorema 5.2.5.

Si noti che $\mu \times \nu$ è davvero una misura: risulta $\mu \times \nu(\emptyset) = 0$ (infatti $\Gamma_\emptyset$ e $\Gamma^\emptyset$ sono identicamente nulle), e se $\{E_n\}$ è una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora posto $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si ha $\Gamma_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{E_n}$ e $\Gamma^E = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{E_n}$, e dunque l'uguaglianza $\mu \times \nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(E_n)$ segue dal teorema di B. Levi. Si osservi inoltre che $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni $A \times B \in \mathcal{R}$, come si è visto nel passo (i) della dimostrazione del teorema 5.2.5.

Osservazione 5.2.7 La misura prodotto $\mu \times \nu$ non è in generale completa, neanche se μ e ν lo sono: ad esempio, se $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{M}$ e $\mu = \nu = m$, la misura prodotto $m \times m$ non è completa. Infatti, sia $V \subset [0, 1]$ un insieme non misurabile, e sia $B \neq \emptyset$ un insieme misurabile di misura nulla: allora $V \times B \notin \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, perché altrimenti, per la proposizione 5.2.4, scelto $y \in B$ la proiezione $(V \times B)^y = V$ sarebbe un elemento di $\mathcal{M}$. D'altra parte, $V \times B \subset [0, 1] \times B$, e quest'ultimo insieme è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile con misura nulla. Peraltro, è immediato verificare che $V \times B \in \mathcal{M}_2$, essendo $m_2^*(v \times B) = 0$.

Esercizi 5.2

1. Siano $k, h, N \in \mathbb{N}^+$ con $k + h = N$. Indicando con $\mathcal{B}_N$ la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^N$, si provi l'uguaglianza
$$\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h.$$
[**Traccia:** $(\subseteq)$ si verifichi che gli aperti di $\mathbb{R}^N$ appartengono a $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h$.
$(\supseteq)$ Si provi che per ogni aperto $B \subseteq \mathbb{R}^h$ la classe $\mathcal{U}_B = \{A \subseteq \mathbb{R}^k : A \times B \in \mathcal{B}_N\}$ è una σ-algebra che contiene gli aperti di $\mathbb{R}^k$. Poi, analogamente, si provi che per ogni $A \in \mathcal{B}_k$ la classe $\mathcal{V}_A = \{B \subseteq \mathbb{R}^h : A \times B \in \mathcal{B}_N\}$ è una σ-algebra che contiene gli aperti di $\mathbb{R}^h$.]

2. Sia $F \subset [0, 1]$ un insieme tale che $F \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$. Si provi che l'insieme $E = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in F\}$ appartiene a $\mathcal{M}_2$, che le sue proiezioni E_x e E^y sono elementi di $\mathcal{B}$ per ogni $x, y \in [0, 1]$, ma che $E \notin \mathcal{B}_2$.

3. Sia $g : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che g_x sia continua in $[0, 1]$ per ogni $x \in [0, 1]$ e g^y sia continua su $[0, 1]$ per ogni $y \in [0, 1]$. Si provi che g è una funzione boreliana, cioè tale che $\{(x, y) : g(x, y) > \alpha\} \in \mathcal{B}_2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
[**Traccia:** si approssimi la g con le seguenti funzioni g_n: posto $a_i = \frac{i}{n}$, se $(x, y) \in [a_{i-1}, a_i] \times [0, 1]$ si definisca
$$g_n(x, y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}} f(a_{i-1}, y) + \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} f(a_i, y).]$$

4. Poniamo $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0, 1] : E \in \mathcal{M}\}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{P}([0, 1])$; siano poi $\mu = m$ e λ definita da
$$\lambda(E) = \text{cardinalità di } E \cap V \qquad \forall E \in \mathcal{G},$$
ove V è un insieme non misurabile di $[0, 1]$. Si verifichi che, scelto $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = y\}$, le funzioni $\Gamma_\Delta, \Gamma^\Delta$ non sono entrambe misurabili. Giustificare il risultato.

5. Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia $\lambda : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to [0, \infty]$ una misura tale che $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni rettangolo $A \times B$ con $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Si provi che $\lambda = \mu \times \nu$.

5.3 Teoremi di integrazione successiva

Il nostro prossimo obiettivo è quello di provare che per una vasta famiglia di funzioni integrabili nello spazio misurato $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ si ha una formula di integrazione "una variabile per volta, in ordine arbitrario". Il passo più faticoso è già stato fatto: in effetti il teorema 5.2.5 e la definizione 5.2.6 ci dicono che la formula in questione è valida per le funzioni caratteristiche di insiemi $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabili. Si tratta ora di estendere tale risultato ad una classe più ampia di funzioni.
Anzitutto, per ogni funzione $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ definiamo le *sezioni* f_x, f^y di f nel modo seguente: se x è un fissato elemento di X, la funzione f_x è data da

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

e se y è un fissato elemento di Y, la funzione f_y è data da

$$f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f^y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Se f è continua, è chiaro che le sezioni f_x, f^y sono continue. Anche la misurabilità viene preservata; infatti si ha:

Proposizione 5.3.1 *Se $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile, allora per ogni $x \in X$ la funzione f_x è $\mathcal{G}$-misurabile, e per ogni $y \in Y$ la funzione f^y è $\mathcal{F}$-misurabile.*

Dimostrazione Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha, per ipotesi,

$$E_\alpha = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) > \alpha\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}.$$

In virtù della proposizione 5.2.4, si deduce

$$\{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} = (E_\alpha)_x \in \mathcal{G}, \qquad \{x \in X : f^y(x) > \alpha\} = (E_\alpha)^y \in \mathcal{F},$$

che è la tesi. $\square$

Veniamo ai teoremi sullo scambio dell'ordine di integrazione. Il primo riguarda funzioni misurabili non negative, anche non sommabili, il secondo riguarda funzioni sommabili, di segno qualunque.

Teorema 5.3.2 (di Tonelli) *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia f una funzione $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile e non negativa. Allora:*

(i) *f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per ogni $x \in X$ e f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ogni $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ è $\mathcal{F}$-misurabile e la funzione $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ è $\mathcal{G}$-misurabile;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f \ d\mu\times\nu = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu\right] d\nu.$$

Dimostrazione (i) Già dimostrato nella proposizione precedente.

(ii)-(iii) Se $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$, allora la tesi è stata già provata nel teorema 5.2.5. Per linearità, lo stesso risultato vale quindi per ogni funzione f semplice rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ e non negativa. Infine se f è una funzione $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-misurabile non negativa, per la proposizione 3.1.7 esiste una successione crescente $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici non negative che converge puntualmente a f in $X\times Y$. Per il teorema di B. Levi si ha allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} \varphi_n d\mu\times\nu = \int_{X\times Y} f \ d\mu\times\nu;$$

d'altra parte, essendo $\{(\varphi_n)_x\}$ e $\{(\varphi_n)^y\}$ due successioni crescenti di funzioni semplici (la prima rispetto a $\mathcal{G}$, la seconda rispetto a $\mathcal{F}$) non negative, che convergono puntualmente rispettivamente a f_x in Y ed a f^y in X, applicando nuovamente il teorema di B. Levi si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y (\varphi_n)_x d\nu = \int_Y f_x d\nu \quad \forall x\in X, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_X (\varphi_n)^y d\mu = \int_X f^y d\mu \quad \forall y \in Y.$$

Applicando allora ancora una volta il teorema di B. Levi deduciamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \left[\int_Y (\varphi_n)_x d\nu\right] d\mu = \int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y \left[\int_X (\varphi_n)^y d\mu\right] d\nu = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu\right] d\nu,$$

e dato che le φ_n soddisfano la tesi del teorema, la stessa proprietà si deduce per la f. □

Teorema 5.3.3 (di Fubini) *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia f una funzione $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-misurabile e sommabile su $X\times Y$. Allora:*

(i) *f_x è sommabile su Y per μ-q.o. $x\in X$ e f^y è sommabile su X per ν-q.o. $y\in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ è sommabile su X e la funzione $y\mapsto \int_X f^y d\mu$ è sommabile su Y;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f d\mu\times\nu = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu\right] d\nu.$$

Dimostrazione Le funzioni f^+, f^- soddisfano le ipotesi del teorema di Tonelli; quindi le funzioni $(f^\pm)_x$ sono $\mathcal{G}$-misurabili per ogni $x \in X$, le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^\pm)_x d\nu$ sono $\mathcal{F}$-misurabili e

$$\int_X \left[\int_Y (f^\pm)_x d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f^\pm d\mu \times \nu.$$

In particolare, essendo il secondo membro finito per ipotesi, le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^\pm)_x d\nu$ sono sommabili su X; ciò a sua volta implica che

$$\int_Y (f^\pm)_x d\nu < +\infty \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X,$$

ossia che $(f^+)_x$ e $(f^-)_x$ sono sommabili su Y per μ-q.o. $x \in X$.
In modo assolutamente uguale si verifica che per $(f^+)^y, (f^-)^y$ valgono gli analoghi risultati. Ciò mostra che f^+, f^- verificano la tesi del teorema. Per sottrazione, $f = f^+ - f^-$ verifica (i), e dato che gli integrali sono finiti, f verifica anche (ii) e (iii). □

Le ipotesi dei teoremi di Tonelli e Fubini sono essenzialmente minimali, come mostrano i seguenti esempi.

Esempi 5.3.4 **(1)** Nel teorema di Fubini la f deve essere sommabile, o almeno integrabile (esercizio 5.3.13): in caso contrario, può capitare che l'integrale doppio non esista mentre esistono finiti e diversi i due integrali iterati. Ad esempio, se $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{M}$ e $\mu = \nu = m$, consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1],$$

che è continua in tutti i punti tranne che nell'origine, quindi è certamente $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. Essa non è integrabile: infatti, applicando a f^+ il teorema di Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f^+ \, dm \times m &= \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right] dx \geq \\ &\geq \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{x^2-y^2}{4x^4} \, dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{6x} \, dx = +\infty, \end{aligned}$$

e similmente

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f^- \, dm \times m = \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right] dy \geq \int_0^1 \frac{1}{6y} \, dy = +\infty.$$

Per questa funzione i due integrali iterati esistono finiti e diversi fra loro: infatti, come si verifica facilmente,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \, \frac{y}{x^2+y^2} \, dy \right] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \, \frac{-x}{x^2+y^2} \, dx \right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

(2) Nel teorema di Tonelli la f deve essere non negativa, o almeno integrabile (esercizio 5.3.13). Ciò è provato dalla funzione f dell'esempio precedente, che è a segno variabile e non è integrabile.

(3) Abbiamo definito la misura prodotto solo nel caso in cui sia μ, sia ν sono misure σ-finite. In effetti si può fare a meno di questa ipotesi, introducendo $\mu \times \nu$ per altra via (esercizio 5.4.6), ma comunque il teorema di Tonelli non vale senza la σ-finitezza: consideriamo ad esempio $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}([0,1])$, e siano $\mu = m$ e ν la misura "cardinalità", che ovviamente non è σ-finita. Allora, posto $\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x = y\}$, per la funzione χ_Δ si ha

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (\chi_\Delta)^y dm \right] d\nu = \int_0^1 m(\{y\}) d\nu = 0,$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (\chi_\Delta)_x d\nu \right] dm = \int_0^1 \nu(\{x\}) dm = 1.$$

Esercizi 5.3

1. Provare che
$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$
[**Traccia:** utilizzare l'uguaglianza $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ ed i teoremi di Tonelli e Fubini.]

2. Dimostrare che la funzione $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ è sommabile nel primo quadrante $[0,\infty[\times[0,\infty[$, e dedurre che
$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Provare le uguaglianze
$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
[**Traccia:** Si calcoli dapprima l'integrale $\int_0^\infty e^{-xy^2} dy$...]

4. Provare che
$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{(\sin x)^2}{x}\, dx = \frac{1}{4} \log 5, \qquad \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \arctan 2.$$

5. Si consideri la funzione
$$f(x,y,t) = \frac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}, \qquad x \in [0,1],\ y \in [0,1],\ t > 0.$$
Si provi che $f \in L^1(]0,1[\times]0,1[\times]0,\infty[)$ e se ne deduca che
$$\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt = \pi \log 2.$$

6. Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati. Se $f \in L^1(X)$ e $g \in L^1(Y)$, si mostri che $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ appartiene a $L^1(X \times Y)$ e che

$$\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

7. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito, sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{F}$-misurabile. Si provi che se $t \in \mathbb{R}$ risulta $\mu(\{x \in X : f(x) = t\}) = 0$ ad eccezione al più di un insieme numerabile di valori di t.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Si provi che f è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[: y \leq f(x)\}$ appartiene a $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, e che in tal caso si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm = m \times m(E) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq y\}) dm;$$

si confronti questo risultato con quello dell'esercizio 4.5.3.

9. Si provi che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{M}$-misurabile ha grafico $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile con misura $m \times m$ nulla, ma che il viceversa è falso.

10. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per $\alpha > 0$ si definisca

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt, \qquad x \geq 0;$$

si provi che

$$\alpha \int_0^y g_\alpha(x) dx = g_{\alpha+1}(y) \qquad \forall y \geq 0.$$

11. Si verifichi che la funzione $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ non è integrabile rispetto alla misura $m \times m$ in $[0, 1] \times [1, \infty[$.

12. Posto

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 \ \ \forall x \in]0, 2], \quad g(x, y) = f(x) f(y) \ \ \forall (x, y) \in]0, 2] \times]0, 2],$$

si provi che f è integrabile in $]0, 2]$, mentre g non è integrabile in $]0, 2] \times]0, 2]$.

13. Dimostrare che sia nel teorema di Tonelli che nel teorema di Fubini il terzo enunciato vale per ogni funzione *integrabile* su $X \times Y$ rispetto alla misura $\mu \times \nu$.
[**Traccia:** si utilizzi la linearità dell'integrale.]

5.4 Completamento delle misure prodotto

Come abbiamo visto (osservazione 5.2.7), le misure prodotto non sono in generale complete. In particolare non è completa la misura prodotto $m \times m$, ove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, né, più generalmente, lo sono le misure prodotto $m_k \times m_h$: ciò significa che per adesso non possiamo applicare i teoremi di Tonelli e Fubini al calcolo di integrali

di funzioni Lebesgue sommabili in $\mathbb{R}^N$.
Se vogliamo una misura completa nello spazio prodotto, occorre in generale prendere il *completamento* della misura prodotto: ricordiamo che il completamento di una generica misura λ (o meglio, di uno spazio misurato $(Z, \mathcal{C}, \lambda)$) è stato descritto nell'esercizio 2.1.1, e consiste nell'introdurre nello spazio Z la σ-algebra "completata"

$$\overline{\mathcal{C}} = \{E \subseteq Z : \ E = A \cup B, \ A \in \mathcal{C}, \ B \subseteq F, \ F \in \mathcal{C}, \ \lambda(F) = 0\},$$

sulla quale si definisce la misura $\overline{\lambda}$ ponendo $\overline{\lambda}(E) = \lambda(A)$. La funzione $\overline{\lambda}$ risulta ben definita, ed è una misura completa su $\overline{\mathcal{C}}$ che estende la misura di partenza λ.
Per quanto riguarda il prodotto di misure di Lebesgue, il legame fra la misura prodotto $m_k \times m_h$ e la misura $(k+h)$-dimensionale m_{k+h} è descritto nella seguente

Proposizione 5.4.1 *Se $k, h \in \mathbb{N}^+$ e $N = k + h$, allora la misura di Lebesgue m_N è il completamento della misura prodotto $m_k \times m_h$.*

Dimostrazione Anzitutto osserviamo che (esercizio 5.2.1)

$$\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$$

(dove $\mathcal{B}_p$ è la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}^p$ e $\mathcal{M}_p$ denota la famiglia degli insiemi Lebesgue misurabili in $\mathbb{R}^p$).
Notiamo adesso che per ogni aperto $A \in \mathbb{R}^N$ si ha che $m_N(A)$ (ben definita in quanto $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{M}_N$) coincide con $m_k \times m_h(A)$ (ben definita per quanto appena visto): infatti se A è un N-parallelepipedo ciò segue dalla definizione di m_N, m_k e m_h; il caso generale è conseguenza del fatto che A è unione numerabile di N-parallelepipedi P_n disgiunti, cosicché

$$m_N(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(P_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_k \times m_h(P_n) = m_k \times m_h(A).$$

Proviamo ora che

$$\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N.$$

Sia $E \times F \in \mathcal{R} \subset \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$, cioè $E \in \mathcal{M}_k$ e $F \in \mathcal{M}_h$, e supponiamo per cominciare che si abbia $m_k(E) < \infty$ e $m_h(F) < \infty$. Tenuto conto della proposizione 1.7.3 (che vale anche per m_N), per provare che $E \times F \in \mathcal{M}_N$ basta far vedere che si possono trovare un aperto A ed un chiuso C tali che $C \subseteq E \times F \subseteq A$, e per i quali $m_N(A \setminus C)$ sia arbitrariamente piccola. Fissato $\varepsilon > 0$, selezioniamo un aperto U ed un chiuso G in $\mathbb{R}^k$, nonché un aperto V ed un chiuso H in $\mathbb{R}^h$, in modo che risulti

$$G \subseteq E \subseteq U, \quad m_k(U \setminus G) < \varepsilon; \qquad H \subseteq F \subseteq V, \quad m_h(V \setminus H) < \varepsilon.$$

Allora $U \times V$ è aperto in R^N, $G \times H$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$, si ha $G \times H \subseteq E \times F \subseteq U \times V$ ed inoltre

$$m_N((U \times V) \setminus (G \times H)) \leq m_N((U \setminus G) \times V) + m_N(U \times (V \setminus H));$$

d'altra parte

$$m_N((U \setminus G) \times V) = m_k \times m_h((U \setminus G) \times V) = m_k(U \setminus G) m_h(V) < \varepsilon(m_h(F) + \varepsilon),$$

ed analogamente

$$m_N(U \times (V \setminus H)) = m_k \times m_h(U \times (V \setminus G)) = m_k(U)m_h(V \setminus H) < \varepsilon(m_k(E) + \varepsilon).$$

Ciò prova che $E \times F \in \mathcal{M}_N$ quando $m_k(E)$ e $m_h(F)$ sono finite. Si noti che risulta anche $m_N(E \times F) = m_k(E)m_h(F)$: infatti per monotonia si ha

$$m_N(G \times H) \leq m_N(E \times F) \leq m_N(U \times V),$$

$$m_k \times m_h(G \times H) \leq m_k \times m_h(E \times F) \leq m_k \times m_h(U \times V);$$

ma dato che il primo ed il terzo membro della prima disuguaglianza coincidono rispettivamente con il primo ed il terzo membro della seconda, otteniamo

$$|m_N(E \times F) - m_k \times m_h(E \times F)| \leq m_N(U \times V) - m_N(G \times H) \leq C\varepsilon$$

ove ε è arbitrario e $C = m_k(E)+m_h(F)+2\varepsilon$. Dunque $m_N(E\times F) = m_k\times m_h(E\times F) = m_k(E)m_h(F)$.
Nel caso che almeno una fra $m_k(E)$ e $m_h(F)$ sia infinita, $E \times F$ è comunque unione numerabile di insiemi disgiunti $E_n \times F_m$ con $m_k(E_n) < \infty$ e $m_h(F_m) < \infty$, i quali sono tutti in $\mathcal{M}_N$ per quanto visto: dunque anche in questo caso $E \times F \in \mathcal{M}_N$ e, per numerabile additività, si ha ancora $m_N(E \times F) = m_k \times m_h(E \times F) = m_k(E)m_h(F)$.
Abbiamo così provato che $\mathcal{M}_k\times\mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N$ e che m_N e $m_k\times m_h$ coincidono su $\mathcal{M}_k\times\mathcal{M}_h$.
Proviamo infine che m_N è il completamento di $m_k\times m_h$. Se $E \in \mathcal{M}_N$, per la proposizione 1.7.3 esistono $D, B \in \mathcal{B}_N$ tali che $D \subseteq E \subseteq B$ e $m_N(B\setminus D) = 0$; quindi possiamo scrivere $E = D \cup (E \setminus D)$, e si ha

$$D \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h, \quad E \setminus D \subseteq B \setminus D, \quad B \setminus D \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h,$$

e $m_k \times m_h(B \setminus D) = m_N(B \setminus D) = 0$. Ciò prova che $E \in \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$.
Viceversa, sia $E \in \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$: allora si ha $E = A \cup B$, con

$$A \in \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N, \quad B \subseteq F, \quad F \in \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N$$

e $m_k \times m_h(F) = m_N(F) = 0$. Per la completezza di m_N, si deduce $B \in \mathcal{M}_N$ e $m_N(B) = 0$, e dunque $E = A \cup B \in \mathcal{M}_N$; ciò mostra che $\mathcal{M}_N = \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$. Inoltre

$$m_N(E) = m_N(A) = m_k \times m_h(A) = \overline{m_k \times m_h}(E),$$

cosicché m_N coincide con $\overline{m_k \times m_h}$. $\square$

I teoremi di Fubini e Tonelli continuano a valere, con lievi modifiche, per il completamento delle misure prodotto, a patto di partire con spazi di misura completi, oltre che σ-finiti. Si ha infatti:

Teorema 5.4.2 (di Tonelli) *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti e completi, e sia f una funzione $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile e non negativa. Allora:*

(i) *f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per μ-q.o. $x \in X$ e f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ν-q.o. $y \in Y$;*

(ii) *la funzione* $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ *è* $\mathcal{F}$*-misurabile e la funzione* $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ *è* $\mathcal{G}$*-misurabile;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x d\nu \right] d\mu = \int_{X\times Y} f \; d\overline{\mu \times \nu} = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu \right] d\nu.$$

Dimostrazione Cominciamo con il seguente

Lemma 5.4.3 *Siano* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *spazi misurati* σ*-finiti e completi, e sia* f *una funzione* $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$*-misurabile. Allora esistono due funzioni* g*,* h*, ove* g *è* $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$*-misurabile e* h *è* $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$*-misurabile e nulla per* $\overline{\mu \times \nu}$*-q.o.* $(x, y) \in X \times Y$*, tali che* $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$ *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$*.*

Dimostrazione È chiaro che se il risultato vale per f^+ e per f^-, esso si deduce anche per f: quindi si può supporre $f \geq 0$. Allora per la proposizione 3.1.7 esiste una successione crescente $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici (rispetto a $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$), tale che $\varphi_n(x, y) \to f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$; quindi possiamo scrivere

$$f = \varphi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_{E_k}$$

per opportuni numeri $c_k \geq 0$ ed opportuni insiemi $E_k \in \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$. Sarà $E_k = A_k \cup B_k$, ove $A_k \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, $B_k \subseteq F_k$, $F_k \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, $\mu \times \nu(F_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Definiamo

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_{A_k}, \qquad h = f - g;$$

allora g è $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile e h è $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile, cosicché l'insieme

$$P = \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) \neq 0\}$$

appartiene a $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$ e si ha

$$P \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} (E_k \setminus A_k) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k \ .$$

Essendo $\mu \times \nu(\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu \times \nu(F_k) = 0$, si conclude che h è $\overline{\mu \times \nu}$-q.o. nulla in $X \times Y$. Ciò prova il lemma. $\square$

Proviamo ora il teorema 5.4.2. La funzione f, per il lemma precedente, può scriversi come $f = g + h$, con g funzione $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$- misurabile e h funzione $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile e nulla per $\overline{\mu \times \nu}$-q.o. $(x, y) \in X \times Y$. Osserviamo che nella dimostrazione del lemma 5.4.3 abbiamo mostrato, più precisamente, che si ha

$$P = \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) \neq 0\} \subseteq Q,$$

ove $Q = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e $\mu \times \nu(Q) = 0$. Quindi, per il teorema 5.2.5,

$$\int_X \Gamma_Q \, d\mu = \int_Y \Gamma^Q d\nu = \mu \times \nu(Q) = 0.$$

Siano

$$H = \{x \in X : \Gamma_Q(x) = \nu(Q_x) > 0\}, \quad K = \{y \in Y : \Gamma^Q(y) = \mu(Q^y) > 0\} :$$

dalle uguaglianze precedenti segue che $\mu(H) = 0$ e $\nu(K) = 0$.
Ora per ogni $x \notin H$ (ossia per μ-q.o. $x \in X$) si ha $\nu(Q_x) = 0$; dato che $P_x \subseteq Q_x$, la completezza di ν implica che per μ-q.o. $x \in X$ risulta $P_x \in \mathcal{G}$ e $\nu(P_x) = 0$. Essendo poi $h_x(y) = 0$ per ogni $y \notin P_x$ (ovvero per ν-q.o. $y \in Y$), otteniamo che per μ-q.o. $x \in X$ si ha, grazie alla completezza di ν, che h_x è $\mathcal{G}$-misurabile e h_x è ν-q.o. nulla in Y. Un analogo risultato si ottiene per h^y. Ciò prova che:

(a) per μ-q.o. $x \in X$ si ha $f_x = g_x$ ν-q.o. in Y;

(b) per ν-q.o. $y \in Y$ si ha $f^y = g^y$ μ-q.o. in X.

Dato che g_x è $\mathcal{G}$-misurabile e g^y è $\mathcal{F}$-misurabile per il teorema 5.3.2, dalla completezza di μ e ν segue (osservazione 3.2.2) la parte (i) del teorema. Inoltre da (a) e (b) segue che

$$\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y g_x \, d\nu \quad \text{per } \mu\text{-}q.o.\ x \in X,$$
$$\int_X f^y \, d\mu = \int_X g^y \, d\mu \quad \text{per } \nu\text{-}q.o.\ y \in Y,$$

e ciò prova, sempre per il teorema 5.3.2 e l'osservazione 3.2.2, la parte (ii) del teorema. Infine la parte (iii) si ricava integrando rispettivamente su X e su Y le ultime due uguaglianze, ed osservando che, poiché f e g coincidono $\overline{\mu \times \nu}$-q.o. in $X \times Y$, risulta

$$\int_{X \times Y} f \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_{X \times Y} g \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_{X \times Y} g \, d\mu \times \nu.$$

Il teorema 5.4.2 è completamente dimostrato. $\square$

Teorema 5.4.4 (di Fubini) *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti e completi, e sia f una funzione $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile e sommabile su $X \times Y$. Allora:*

(i) *f_x è sommabile su Y per μ-q.o. $x \in X$ e f^y è sommabile su X per ν-q.o. $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ è sommabile su X e la funzione $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ è sommabile su Y;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f d\overline{\mu \times \nu} = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu \right] d\nu.$$

Dimostrazione Per le funzioni f^+ e f^- sono validi i risultati del teorema 5.4.2. Allora per sottrazione si ottiene che f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per μ-q.o. $x \in X$, e che f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ν-q.o. $y \in Y$; inoltre le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^+)_x d\nu$ e $x \mapsto \int_Y (f^-)_x d\nu$ sono $\mathcal{F}$-misurabili e le funzioni $y \mapsto \int_X (f^+)^y d\mu$ e $y \mapsto \int_X (f^-)^y d\mu$ sono $\mathcal{G}$-misurabili, ed infine f^+ e f^- verificano le uguaglianze (iii) nelle quali, essendo f sommabile su $X \times Y$, tutti gli integrali sono finiti. Dunque f^+ e f^- (e, per sottrazione, anche f) verificano (ii): in particolare (esercizio 4.2.7) $\int_Y f_x d\nu$ è finito per μ-q.o. $x \in X$ e $\int_X f^y d\mu$ è finito per ν-q.o. $y \in Y$. Di conseguenza, per μ-q.o. $x \in X$ la funzione f_x è sommabile su Y e per ν-q.o. $y \in Y$ la funzione f^y è sommabile su X; dunque f verifica (i). Tornando a (iii), sottraendo le relazioni verificate da f^+ e da f^-, il che è lecito trattandosi di quantità finite, si ottiene che f verifica (iii). $\square$

Dalla proposizione 5.4.1 e dai due teoremi precedenti si deduce, in particolare, che se $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile e non negativa, oppure sommabile, allora si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \; dm_2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dm(y) \right] dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dm(x) \right] dm(y).$$

Qesto fatto si estende in modo ovvio agli integrali in $\mathbb{R}^N$, i quali sono dunque decomponibili in N integrali iterati. Abbiamo dunque un metodo per il calcolo effettivo degli integrali multipli, che naturalmente per funzioni continue su insiemi "buoni" si riduce al sistema consueto usato per gli integrali multipli di Riemann, sia propri che impropri. Per questa ragione, gli integrali rispetto alla misura di Lebesgue verranno d'ora in poi scritto nel modo consueto: $\int_D f(x) \; dx$ anziché $\int_D f \; dm$.

Esercizi 5.4

1. Si provi che se $k, h \in \mathbb{N}^+$ e $k + h = N$ allora le inclusioni

   $$\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N$$

   sono strette.

2. Sia $\mathcal{C}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ contenente i boreliani, nonché tutti gli insiemi $E \in \mathcal{M}_N$ tali che $m_N(E) = 0$. Si provi che $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{M}_N$.

3. Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ poniamo $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$. Provare che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E' \in \mathcal{M}_2$.

4. *(Convoluzioni)* Si provino i fatti seguenti:

   (i) se f è $\mathcal{M}$-misurabile, allora $(x,y) \mapsto f(x-y)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile;

   (ii) se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora la *convoluzione* $f \star g$, definita da

   $$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

   è una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e si ha $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$;

(iii) l'operazione di convoluzione è commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma;

(iv) se $f \in C_0^k(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \star g \in C^k(\mathbb{R})$ e $(f \star g)^{(k)} = f^{(k)} \star g$.

5. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ fuori della palla unitaria e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, dm_N = 1$; per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ (la funzione φ_ε si chiama *mollificatrice*). Posto, per $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f_\varepsilon(x) = f \star \varphi_\varepsilon(x)$, si provi che $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, e che $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$; si mostri anche che se f è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$ allora $f_\varepsilon \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}^N$.

6. Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati. Poniamo

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \times B_n), A_n \in \mathcal{F}, B_n \in \mathcal{G} \right\}.$$

(i) Si provi che λ^* è una misura esterna, ossia è non negativa, monotona e numerabilmente subadditiva.

(ii) Posto

$$\mathcal{C} = \{E \subseteq X \times Y : \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \ \forall A \subseteq X \times Y\},$$

si provi che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra contenente i rettangoli misurabili di $X \times Y$.

(iii) Si provi che la restrizione λ di λ^* a $\mathcal{C}$ è una misura completa.

(iv) Si provi che se μ e ν sono σ-finite, allora

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}, \qquad \lambda = \overline{\mu \times \nu}.$$

7. Sia λ la misura costruita nell'esercizio 5.4.6, essendo $\mu = m$ la misura di Lebesgue in $[0,1]$ e ν la misura "cardinalità" in $[0,1]$ (esempio 5.3.4 (3)). Posto $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x = y\}$, si provi che $\lambda(\Delta) = +\infty$.
[**Traccia:** supposto per assurdo $\lambda(\Delta) < \infty$, si provi che esistono $R_n \in \mathcal{R}$, disgiunti, tali che $\Delta \subseteq \bigcup_n R_n$, $\sum_n \lambda(R_n) < \infty$ e $R_n = A_n \times A_n$ con gli A_n disgiunti e $\bigcup_n A_n = [0,1]$. Posto poi $N_1 = \{n : m(A_n) > 0\}$, si provi che $1 \leq \nu(A_n) < \infty$ per ogni $n \in N_1$; se ne deduca che $m(\bigcup_{n \in N_1} A_n) = 0$ e quindi l'assurdo.]

8. Sia f una funzione misurabile secondo Lebesgue in $[a,b]$. Si provi che $f \in L^1(a,b)$ se e solo se la funzione $G(x,y) = f(x)f(y)$ appartiene a $L^1([a,b] \times [a,b])$, e che in tal caso si ha

$$\|G\|_1 = \|f\|_1^2 \, .$$

Capitolo 6

Derivazione

6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Vogliamo analizzare le connessioni fra l'integrazione secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ e l'operazione di derivazione di funzioni reali: in particolare, cercheremo un analogo, per l'integrale di Lebesgue, di ciò che è il teorema fondamentale del calcolo integrale rispetto all'integrazione secondo Riemann. Ricordiamo che se f è una funzione continua in $[a, b]$, allora si ha

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \forall x \in [a, b],$$

e che se f è una funzione di classe C^1 su $[a, b]$ allora risulta

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

In altre parole, le operazioni di derivata e di integrale commutano fra loro nell'ambito delle funzioni sufficientemente regolari in $[a, b]$ che si annullano nel primo estremo.
Sia ora $f \in L^1(a, b)$. Posto $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, ci domandiamo:

(i) F è derivabile, almeno q.o., in $[a, b]$?

(ii) Sarà $F'(x) = f(x)$, almeno q.o., in $[a, b]$?

Viceversa, se g è derivabile in $[a, b]$ e la sua derivata è sommabile in $[a, b]$, ci chiediamo:

(iii) Risulterà $\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$ in $[a, b]$?

Per rispondere a queste domande dovremo introdurre alcune nozioni ed alcune classi di funzioni interessanti di per sé, sulle quali comunque insisteremo soltanto lo stretto necessario. Gli sviluppi matematici che partono da questa problematica sono innumerevoli, profondi ed assai raffinati, ma al di là della portata del nostro corso.

Esercizi 6.1

1. Stabilire in quali punti esiste la derivata della funzione
$$f(x) = \int_0^x \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$
e calcolarla.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia f_n la funzione definita da
$$f_n(x) = \inf\left\{\left|x - \frac{m}{10^n}\right| : m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad x \in [0,1].$$
Si provi che la funzione
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in [0,1],$$
è continua, ma non è derivabile in alcun punto di $[0,1]$.
[**Traccia:** si verifichi che la serie è uniformemente convergente. Fissato poi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 10^{-n}$, ove $\alpha_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ e lo sviluppo decimale è infinito, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ si ponga
$$x_k = \begin{cases} x - 10^{-k} & \text{se } \alpha_k = 4,9 \\ x + 10^{-k} & \text{se } \alpha_k = 0,1,2,3,5,6,7,8. \end{cases}$$
Si verifichi che $f_n(x) = f_n(x_k)$ per $n \geq k$, mentre $f_n(x) - f_n(x_k) = \pm(x - x_k)$ per $n < k$. Se ne deduca che $f(x) - f(x_k) = p \cdot (x - x_k)$, ove p, qualunque sia il suo segno, è un intero con la stessa parità di $k-1$; si concluda che, per $k \to \infty$, $x_k \to x$ mentre $p = \frac{f(x_k)-f(x)}{x_k - x}$ non ha limite.]

6.2 Punti di Lebesgue

Data una qualunque funzione f sommabile su $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, le sue proprietà di misurabilità e di sommabilità non cambiano se essa viene modificata su un insieme di misura nulla. In questo paragrafo ci poniamo il problema di trovare, se possibile, una versione "canonica" di f, che ne ottimizzi la regolarità buttando via, ad esempio, le discontinuità eliminabili.
Cominciamo con la seguente

Definizione 6.2.1 *Sia f sommabile su $\mathbb{R}^N$. Un punto $x \in \mathbb{R}^N$ si dice* punto di Lebesgue *per f se $f(x) \in \mathbb{R}$ e*
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)|\, dm_N = 0,$$
ove $B(x,r)$ è la palla di centro x e raggio r in $\mathbb{R}^N$ e $m_N(B_r)$ è la sua misura (ovviamente indipendente dal centro).

Osserviamo che se f è continua, allora ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$ è di Lebesgue per f, ma per una generica f sommabile non è detto a priori che i punti di Lebesgue esistano. In effetti però si ha:

Teorema 6.2.2 *Se f è sommabile su $\mathbb{R}^N$, allora quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è punto di Lebesgue per f.*

Dimostrazione Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ introduciamo le seguenti quantità:

$$A_r f(x) = \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)| \, dm_N, \qquad r > 0,$$

$$Af(x) = \limsup_{r \to 0^+} A_r f(x),$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f| \, dm_N.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 0\}) = 0,$$

ed a questo scopo basterà provare che

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > t\}) = 0 \qquad \forall t > 0,$$

in quanto da questo fatto e dalla subadditività di m_N^* segue che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

ha misura esterna nulla (e quindi è misurabile, con misura nulla).
Sia dunque $t > 0$. Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $g_n \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ una funzione tale che

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{1}{n}$$

(proposizione 4.6.5). Si noti che si ha $Ag_n \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N$. Utilizzando il fatto che

$$Af(x) \le A(f - g_n)(x) + Ag_n(x) = A(f - g_n)(x),$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Af(x) &\le A(f - g_n)(x) \le \\ &\le \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f - g_n| dm_N + |f(x) - g_n(x)| \le \\ &\le M(f - g_n)(x) + |f(x) - g_n(x)| \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} &m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \le \\ &\qquad \le m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M(f - g_n)(x) > t\}) + m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\})\,; \end{aligned}$$

osserviamo che i due insiemi a secondo membro sono misurabili, il secondo per la misurabilità di f e g_n, il primo perché è addirittura un aperto (esercizio 6.2.1).
Il secondo addendo si stima facilmente:

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t}\|f - g_n\|_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

per maggiorare il primo addendo ci occorre un enunciato apposito.

Proposizione 6.2.3 *Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$, allora*

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}) \leq \frac{3^N}{t}\|\varphi\|_1.$$

Dimostrazione Sia K un arbitrario compatto contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$. Ogni punto $x \in K$ è allora il centro di una palla aperta $B_x = B(x, r_x)$ tale che

$$\int_{B_x} |\varphi|\, dm_N > t \cdot m_N(B_x).$$

poiché le palle $\{B_x\}_{x \in K}$ ricoprono K, esisterà una famiglia finita di palle $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_p}\}$ estratta da $\{B_x\}_{x \in K}$, tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_{x_i}.$$

Proveremo ora che si può trovare una ulteriore sottofamiglia $\{B_{x_{i_1}}, \ldots, B_{x_{i_k}}\}$ contenuta in $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_p}\}$, ove $B_{x_{i_j}} = B(x_{i_j}, r_{i_j})$, tale che:

(i) le palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$, $j = 1, \ldots k$, sono tutte disgiunte;

(ii) $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$;

(iii) $m_N(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^{k} m_N(B(x_{i_j}, r_{i_j}))$.

Per provare ciò, non è restrittivo supporre che si abbia $r_1 \geq r_2 \geq \ldots r_p$. Scegliamo $i_1 = 1$ e buttiamo via tutte le palle $B(x_i, r_i)$, con $i > i_1$, che intersecano $B(x_{i_1}, r_{i_1})$. Sia ora $B(x_{i_2}, r_{i_2})$ la prima palla, secondo l'ordinamento degli indici, che è disgiunta da $B(x_{i_1}, r_{i_1})$ (ammesso che ci sia). Nuovamente, buttiamo via le palle $B(x_i, r_i)$, con $i > i_2$, che intersecano $B(x_{i_2}, r_{i_2})$, e prendiamo come terza palla $B(x_{i_3}, r_{i_3})$ la prima che è disgiunta da $B_(x_{i_2}, r_{i_2})$. Procedendo in questa maniera, dopo un numero finito di passi esauriamo le palle a disposizione ed il processo si arresta. Il risultato è la famiglia $\{B(x_{i_1}, r_{i_1}), \ldots, B(x_{i_k}, r_{i_k})\}$, che per costruzione è fatta di palle tra loro disgiunte. Dunque vale (i). Inoltre notiamo che se $B(x_i, r_i)$ è una della palle scartate, allora deve essere $B(x_i, r_i) \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) \neq \emptyset$ per qualche $j = 1, \ldots, k$ con $i > i_j$; in particolare si ha $r_i \leq r_{i_j}$ e di conseguenza $B(x_i, r_i) \subseteq B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$. La stessa inclusione vale ovviamente se $B(x_i, r_i)$ è invece una delle palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$. Per l'arbitrarietà di $B(x_i, r_i)$, si conclude che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, r_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j}),$$

ossia vale (ii). Infine, (iii) è facile conseguenza di (ii) in quanto

$$m_N(B(x_{i_j}, 3r_{i_j})) = 3^N m_N(B(x_{i_j}, r_{i_j})).$$

Dunque, denotando per semplicità con B_j le palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$,

$$m_N(K) \le 3^N \sum_{j=1}^{k} m_N(B_j) \le \frac{3^N}{t} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} |\varphi| dm_N,$$

ed essendo le palle B_j disgiunte, si conclude che

$$m_N(K) \le \frac{3^N}{t} \|\varphi\|_1.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni compatto K contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$; dato che ogni chiuso $F \subseteq \mathbb{R}^N$ è unione al più numerabile dei compatti $F \cap \overline{B(0,k)}$, $k \in \mathbb{N}^+$, la stessa disuguaglianza vale per ogni chiuso contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$. Poiché tale insieme è misurabile, ne segue la tesi. □

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per quanto abbiamo visto, possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} &m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \le \\ &\quad \le m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M(f - g_n)(x) > t\}) + m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\}) \le \\ &\quad \le \frac{1 + 3^N}{t} \|f - g_n\|_1, \end{aligned}$$

e dunque, per come si è scelta g_n ,

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \le \frac{1 + 3^N}{nt} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) = 0,$$

da cui la tesi del teorema. □

Dal teorema precedente otteniamo subito la risposta alle domande (i) e (ii) che ci siamo posti alla fine del paragrafo 6.1.

Corollario 6.2.4 *Se f è sommabile in $\mathbb{R}$, e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, allora si ha $F'(x) = f(x)$ in ogni punto x di Lebesgue per f, ossia q.o. in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione Sia x un punto di Lebesgue per f. Per ogni successione reale infinitesima $\{\delta_n\}$, tale che $\delta_n \neq 0$ per ogni n, si ha

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(x + \delta_n) - F(x)}{\delta_n} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\, dt - f(x) \right| \le \\ &\quad \le \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\, dt \le \frac{1}{|\delta_n|} \int_{x-|\delta_n|}^{x+|\delta_n|} |f(t) - f(x)|\, dt = \\ &\quad = \frac{2}{m(B(x, |\delta_n|))} \int_{B(x,|\delta_n|)} |f(t) - f(x)|\, dt \to 0 \quad \text{per } n \to \infty \end{aligned}$$

in virtù della definizione 6.2.1. Per l'arbitrarietà della successione $\{\delta_n\}$, si ha la tesi. $\square$

Corollario 6.2.5 *Se f è sommabile in $[a,b]$, allora*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad q.o.\ \ in\ [a,b].$$

Dimostrazione Basta prolungare f a 0 fuori di $[a,b]$ ed applicare il corollario precedente a $f\chi_{[a,b]}$. $\square$

Osservazione 6.2.6 È possibile definire la nozione di punto di Lebesgue di un arbitrario elemento di $L^1(\mathbb{R}^N)$, e non solo di una arbitraria funzione sommabile su $\mathbb{R}^N$; in altre parole, la definizione 6.2.1 può essere modificata in modo da dipendere solo dalla classe di equivalenza in L^1, e non dal particolare rappresentante. Questa variante è descritta nell'esercizio 6.2.2.

Esercizi 6.2

1. Provare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora per ogni $t > 0$ l'insieme

   $$\{x \in \mathbb{R}^N : Mf(x) > t\}$$

   è aperto in $\mathbb{R}^N$.

2. Sia $F \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Diciamo che un punto $x \in \mathbb{R}^N$ è di Lebesgue per F, e scriviamo $x \in L(F)$, se esistono $y_x \in \mathbb{R}$ e $g \in F$ tali che

   $$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |g - y_x|\, dm_N = 0.$$

   (i) Si provi che se $x \in L(F)$ allora il limite sopra scritto è 0 per ogni $h \in F$.

   (ii) Si provi che se $g \in F$ e x è punto di Lebesgue per g secondo la definizione 6.2.1, allora $x \in L(F)$; se ne deduca che $\mathbb{R}^N \setminus L(F)$ ha misura nulla.

   (iii) Posto

   $$f(x) = \begin{cases} y_x & \text{se } x \in L(F) \\ 0 & \text{se } x \notin L(F), \end{cases}$$

   si provi che $f \in F$; si provi anche che se $g \in F$ e x è punto di Lebesgue per g secondo la definizione 6.2.1, allora $f(x) = g(x)$; se ne deduca che $L(F)$ è l'unione di tutti i punti di Lebesgue delle $g \in F$, e che f è il rappresentante "canonico" della classe F.

3. Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $f(x) \le Mf(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^N$.

4. Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile, la *densità* di E nel punto x è definita da

   $$\delta_E(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(E \cap B(x,r))}{m_N(B(x,r))}$$

   nei punti dove il limite esiste (si confronti con l'esercizio 1.4.3). Si provi che

   $$\delta_E(x) = 1 \quad \text{q.o. in } E, \qquad \delta_E(x) = 0 \quad \text{q.o. in } E^c.$$

6.3 Derivabilità delle funzioni monotone

La risposta alla domanda (iii) che ci siamo posti nel paragrafo 6.1 è, come vedremo, alquanto articolata. Per cominciare, analizziamo a questo riguardo il comportamento delle funzioni monotone.
Una funzione monotona in un intervallo $[a,b]$ può avere infiniti punti di discontinuità (ma mai più di un'infinità numerabile, come mostra l'esercizio 6.3.1): un esempio è la funzione $f(x) = \frac{[1/x]}{1+[1/x]}$, $x \in]0,1]$. Nondimeno, le funzioni monotone godono di una proprietà sorprendente, espressa nel fondamentale e classico risultato che andiamo ad esporre.

Teorema 6.3.1 (di derivazione di Lebesgue) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente. Allora f è derivabile q.o. in $[a,b]$, f' è sommabile in $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f'\,dm \le f(b) - f(a).$$

Dimostrazione Tutto si basa sul seguente lemma di ricoprimento:

Lemma 6.3.2 (di Vitali) *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli chiusi dotati di queste proprietà:*

(a) *$\mathcal{F}$ è un ricoprimento di E;*

(b) *per ogni $x \in E$ e per ogni $\delta > 0$ esiste $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $m(I) < \delta$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $I_1, \dots, I_N \in \mathcal{F}$, disgiunti, tali che

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i\right) < \varepsilon.$$

Dimostrazione Sia A un aperto contenente E, tale che $m(A) < \infty$; si può supporre allora che sia $I \subset A$ per ogni $I \in \mathcal{F}$. Costruiamo una sottofamiglia disgiunta $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{F}$ nel modo seguente. Scegliamo $I_1 \in \mathcal{F}$ in modo arbitrario; se $E \subseteq I_1$, ci fermiamo perché il singolo intervallo I_1 soddisfa la tesi del lemma, essendo $m^*(E\setminus I_1) = m^*(\emptyset) = 0$. Altrimenti, esiste $x \in E\setminus I_1$; quindi, per le proprietà (a) e (b), esiste almeno un intervallo $I \in \mathcal{F}$ tale che $I \cap I_1 = \emptyset$. Posto allora

$$k_1 = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{F},\ I \cap I_1 = \emptyset\},$$

si ha $0 < k_1 \le m(A) < \infty$. Si può dunque scegliere $I_2 \in \mathcal{F}$, disgiunto da I_1, tale che

$$m(I_2) > \frac{1}{2}\,k_1\,.$$

Induttivamente, costruiti $I_1, \dots I_n$ disgiunti, e supposto che non risulti $E \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ (nel qual caso avremmo ottenuto la tesi del lemma), si osserva che per le proprietà (a) e (b) esistono intervalli $I \in \mathcal{F}$ disgiunti da $I_1, \dots, I_n$. Dunque, posto

$$k_n = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{F},\ I \cap I_i = \emptyset \text{ per } i = 1, \dots, n\},$$

risulta $0 < k_n \leq k_{n-1} \leq \cdots \leq k_1 \leq m(A) < \infty$. Pertanto si può scegliere $I_{n+1} \in \mathcal{F}$, disgiunto da $I_1, \ldots, I_n$ e tale che

$$m(I_{n+1}) > \frac{1}{2}\, k_n\,.$$

Se non accade mai che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ (nel qual caso abbiamo la tesi del lemma), otteniamo una successione $\{I_n\} \subseteq \mathcal{F}$ costituita da intervalli disgiunti, l'n-esimo dei quali ha misura maggiore di $\frac{1}{2}k_n$. Poiché $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} I_n \subseteq A$, si ha anche $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} m(I_n) \leq m(A) < \infty$.
Sia ora $\varepsilon > 0$: esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}\,.$$

Poniamo $F = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i$, e dimostriamo che si ha $m^*(F) < \varepsilon$: ciò concluderà la dimostrazione. Sia $x \in F$: poiché x non appartiene al chiuso $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$, esiste $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $I \subseteq A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. D'altra parte, I deve intersecare qualcuno degli I_n con $n > N$, poiché in caso contrario per definizione di k_n avremmo

$$m(I) \leq k_n < 2m(I_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e dunque $m(I) = 0$, il che è assurdo. Pertanto esiste $n > N$ tale che $I \cap I_n \neq \emptyset$ e $I \cap I_k = \emptyset$ per $k = 1, \ldots, N$. Detto x_n il punto medio di I_n, si ha allora

$$|x_n - x| \leq m(I) + \frac{1}{2}\, m(I_n) \leq k_{n-1} + \frac{1}{2}\, m(I_n) < 2m(I_n) + \frac{1}{2}\, m(I_n) = \frac{5}{2}\, m(I_n).$$

Indicando con J_n l'intervallo chiuso di centro x_n e ampiezza quintupla di quella di I_n, risulta quindi $x \in J_n$: abbiamo così mostrato che $F \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$, da cui

$$m^*(F) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} m(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon. \quad \Box$$

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per $x \in]a, b[$ consideriamo i quattro *numeri derivati* (o *derivate del Dini*) così definiti:

$$D^+ f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad D_+ f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

$$D^- f(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad D_- f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Ovviamente si ha sempre $D_+ f(x) \leq D^+ f(x)$ e $D_- f(x) \leq D^- f(x)$; proveremo che per q.o. $x \in]a, b[$ risulta $D_+ f(x) = D^+ f(x) = D_- f(x) = D^- f(x)$ e che per q.o. $x \in]a, b[$ tale valore è finito e quindi è la derivata $f'(x)$.
Per mostrare l'uguaglianza dei quattro numeri derivati basterà far vedere che

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x) \text{ q.o. in }]a, b[\,, \qquad D^- f(x) \leq D_+ f(x) \text{ q.o. in }]a, b[\,;$$

proveremo in effetti la prima disuguaglianza perché l'altra è del tutto analoga (cambia solo il segno dell'incremento h).
Sia
$$E = \{x \in]a,b[: D^+ f(x) > D_- f(x)\};$$
sarà allora $E = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$, dove
$$E_{\alpha\beta} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \beta \\ \{x \in]a,b[: D_- f(x) < \alpha < \beta < D^+ f(x)\} & \text{se } \alpha < \beta; \end{cases}$$
quindi basterà mostrare che
$$m^*(E_{\alpha\beta}) = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \text{ con } \alpha < \beta.$$
Fissiamo $\varepsilon > 0$: allora esiste un aperto B, contenente $E_{\alpha\beta}$, tale che $m(B) < m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon$. Se $x \in E_{\alpha\beta}$, si ha
$$D_- f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < \alpha,$$
quindi per ogni $\delta > 0$ esiste $h_\delta \in]0, \delta]$ tale che
$$[x - h_\delta, x] \subset B, \qquad f(x) - f(x - h_\delta) < \alpha h_\delta\,.$$
La famiglia di intervalli $\{[x - h_\delta, x] : \; x \in E_{\alpha\beta}, \; \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $E_{\alpha\beta}$ che verifica le ipotesi del lemma di Vitali ed è costituito da sottoinsiemi di B. Dal lemma 6.3.2 segue che esistono $[x_1 - h_1, x_1], \ldots, [x_N - h_N, x_N]$ disgiunti, tali che
$$\bigcup_{i=1}^N [x_i - h_i, x_i] \subset B, \qquad m^*\left(E_{\alpha\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^N [x_i - h_i, x_i]\right) < \varepsilon.$$
Perciò l'aperto $A = \bigcup_{i=1}^N]x_i - h_i, x_i[$ è contenuto in B e verifica $m^*(E \setminus A) < \varepsilon$; inoltre si ha, applicando ad A la definizione di misurabilità:
$$m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) = m^*(E_{\alpha\beta}) - m^*(E_{\alpha\beta} \setminus A) > m^*(E_{\alpha\beta}) - \varepsilon.$$
Consideriamo ora l'insieme $A \cap E_{\alpha\beta}$ e ripetiamo lo stesso ragionamento: se $y \in A \cap E_{\alpha\beta}$ si ha
$$D^+ f(x) = \limsup_{k\to 0^+} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} > \beta,$$
quindi per ogni $\delta > 0$ esiste $k_\delta \in]0, \delta]$ tale che
$$[y, y + k_\delta] \subset A, \qquad f(y + k_\delta) - f(y) > \beta k_\delta\,.$$
La famiglia di intervalli $\{[y, y + k_\delta] : \; y \in A \cap E_{\alpha\beta}, \; \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $A \cap E_{\alpha\beta}$ che verifica le ipotesi del lemma di Vitali ed è costituita da sottoinsiemi di A. Dal lemma 6.3.2 segue che esistono $[y_1, y_1 + k_1], \ldots, [y_M, y_M + k_M]$ disgiunti, tali che
$$\bigcup_{j=1}^M [y_j, y_j + k_j] \subset A, \qquad m^*\left((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus \bigcup_{j=1}^M [y_j, y_j + k_j]\right) < \varepsilon.$$

Perciò l'aperto $C = \bigcup_{j=1}^M]y_j, y_j + k_j[$ è contenuto in A e verifica $m^*((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus C) < \varepsilon$. Tenuto conto della precedente stima per $m^*(A \cap E_{\alpha\beta})$, ne deduciamo, per la misurabilità di C,

$$\begin{aligned} m(C) &\geq m^*(C \cap A \cap E_{\alpha\beta}) = m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - m^*((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus C) > \\ &> m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - \varepsilon > m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^M (f(y_j + k_j) - f(y_j)) > \beta \sum_{j=1}^M k_j = \beta m(C) \geq \beta(m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon).$$

D'altra parte, essendo $C \subseteq A$, per ogni fissato $j \in \{1, \ldots, M\}$ esiste un unico $i \in \{1, \ldots, N\}$ tale che $]y_j, y_j + k_j[\subseteq]x_i - h_i, x_i[$; dal fatto che f è crescente segue allora

$$\sum_{j=1}^M (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \leq \sum_{i=1}^N (f(x_i) - f(x_i - h_i)),$$

il che implica

$$\beta(m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon) < \alpha(m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon),$$

cioè

$$m^*(E_{\alpha\beta}) < \varepsilon \frac{\alpha + 2\beta}{\beta - \alpha}.$$

Poiché ε è arbitrario, si ottiene che $m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$. Ne segue che $E = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$ ha misura esterna nulla, ossia risulta $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ q.o. in $]a, b[$, come si voleva dimostrare. In modo analogo, come già osservato, si trova che $D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ q.o. in $]a, b[$.
Abbiamo mostrato che per q.o. $x \in]a, b[$ esiste la funzione

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h};$$

resta da far vedere che $|g(x)| < \infty$ per q.o. $x \in]a, b[$.
Dopo aver esteso la funzione f oltre b ponendo $f(x) = f(b)$ per ogni $x \geq b$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \qquad x \in [a, b].$$

Chiaramente, $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in $[a, b]$; inoltre le g_n sono misurabili (perché tale è f, essendo monotona), e dunque g è una funzione misurabile, oltre che non negativa dal momento che f è crescente. Dal lemma di Fatou segue perciò

$$\begin{aligned}
\int_a^b g\,dm &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\,dm = \\
&= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f\,dm - \int_a^b f\,dm\right] = \\
&= \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{b}^{b+\frac{1}{n}} f\,dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f\,dm\right] \leq \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} n \left[\int_{b}^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,dm\right] = f(b)-f(a).
\end{aligned}$$

Quindi g è sommabile in $[a,b]$ e in particolare g è q.o. finita in $[a,b]$. Ciò significa che f è q.o. derivabile in $[a,b]$ e che f' è sommabile: in particolare

$$\int_a^b f'dm \leq f(b)-f(a).$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Lebesgue. $\square$

Osservazioni 6.3.3 **(1)** La disuguaglianza $\int_a^b f'\,dm \leq f(b)-f(a)$ può essere stretta, come si vedrà; nel paragrafo 6.5 caratterizzeremo la classe delle funzioni per le quali vale il segno di uguaglianza.

(2) Se f è monotona decrescente, applicando il teorema di Lebesgue a $-f$ si ottiene che f è derivabile q.o., che f' è sommabile e che $\int_a^b f'dm \geq f(b)-f(a)$.

Esercizi 6.3

1. Si provi che se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione monotona, allora f ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità.

2. Si costruisca una funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ monotona e discontinua in ogni punto di $\mathbb{Q}\cap[0,1]$.

3. Si calcolino i quattro numeri derivati nel punto 0 per la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0. \end{cases}$$

4. Si verifichi che, assegnati $a<b$ e $c<d$, la funzione
$$f(x) = \begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x} + bx\cos^2\frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ cx\sin^2\frac{1}{x} + dx\cos^2\frac{1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$
soddisfa $D_+f(0)=a$, $D^+f(0)=b$, $D_-f(0)=c$, $D^-f(0)=d$.

5. Si calcolino i quattro numeri derivati nel generico punto $x \in \mathbb{R}$ per la funzione $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

6. Provare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora le funzioni D^+f, D_+f, D^-f e D_-f sono misurabili rispetto alla misura di Lebesgue.

7. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che se esiste $f'(x)$, allora
$$D^+(f+g)(x) = f'(x) + D^+g(x),$$
e che analoghi risultati valgono per gli altri numeri derivati.

8. Fornire un esempio nel quale risulti $D^+(f+g) \neq D^+f + D^+g$.

6.4 Funzioni a variazione limitata

Questo paragrafo è dedicato alla descrizione di un'importante classe di funzioni: quelle a variazione limitata.

Definizione 6.4.1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Per ogni partizione $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ di $[a,b]$ poniamo*
$$t_a^b(f,\pi) = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \ ;$$
la quantità
$$T_a^b(f) = \sup_{\pi} t_a^b(f,\pi)$$
si chiama variazione totale *di f in $[a,b]$. Se $T_a^b(f) < \infty$ diciamo che f è a* variazione limitata *in $[a,b]$, e scriviamo $f \in BV[a,b]$.*

Osservazioni 6.4.2 **(1)** Ogni funzione monotona in $[a,b]$ è a variazione limitata in $[a,b]$ e si ha
$$T_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$
(2) $BV[a,b]$ è uno spazio vettoriale: infatti se $f, g \in BV[a,b]$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha, come è facile verificare,
$$T_a^b(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| T_a^b(f) + |\mu| T_a^b(g).$$
(3) Ogni funzione di $BV[a,b]$ è limitata in $[a,b]$: infatti se $f \in BV[a,b]$ si ha
$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq \\ &\leq |f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + T_a^b(f). \end{aligned}$$

D'altra parte ovviamente esistono funzioni limitate che non sono a variazione limitata: ad esempio la funzione χ_A, ove $A = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, è limitata in $[0,1]$ ma non sta in $BV[0,1]$. Infatti per ogni $N \in \mathbb{N}^+$, scelta la partizione $\pi_N : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1/2} < \frac{1}{N-1} < \frac{1}{N-3/2} <$

$\ldots < \frac{1}{2} < \frac{1}{2-1/2} < 1$, l'incremento di f da un nodo al successivo è sempre ± 1, e quindi $t_0^1(\chi_A, \pi_N) = 2N$; ne segue $T_0^1(\chi_A) = +\infty$.

La variazione totale di una funzione è additiva rispetto alle decomposizioni di $[a,b]$ in sottointervalli adiacenti. Si ha infatti:

Proposizione 6.4.3 *Se $f \in BV[a,b]$, allora*

$$T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f) \qquad \forall c \in]a,b[\,.$$

Dimostrazione ($\leq$) Per ogni partizione π di $[a,b]$, l'aggiunta del nodo c determina due partizioni π_1 di $[a,c]$ e π_2 di $[c,b]$, la cui unione è π. Si ha allora

$$t_a^b(f,\pi) \leq t_a^c(f,\pi_1) + t_c^b(f,\pi_2) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f),$$

e quindi, per l'arbitrarietà di π,

$$T_a^b(f) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f).$$

($\geq$) Per ogni coppia di partizioni π_1 di $[a,c]$ e π_2 di $[c,b]$, la loro unione è una partizione π di $[a,b]$ contenente il nodo c: ne segue

$$t_a^c(f,\pi_1) + t_c^b(f,\pi_2) = t_a^b(f,\pi) \leq T_a^b(f),$$

e per l'arbitrarietà di π_1 e π_2,

$$T_a^c(f) + T_c^b(f) \leq T_a^b(f). \quad \square$$

L'additività della variazione totale ci permette di arrivare al risultato che segue, che è il punto chiave della teoria delle funzioni a variazione limitata.

Corollario 6.4.4 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in BV[a,b]$ se e solo se f è differenza di due funzioni crescenti in $[a,b]$.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Poiché le funzioni crescenti in $[a,b]$ sono a variazione limitata, la tesi segue dal fatto che $BV[a,b]$ è uno spazio vettoriale.
($\Longrightarrow$) La funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è crescente in $[a,b]$: infatti, per la proposizione precedente,

$$T_a^y(f) = T_a^x(f) + T_x^y(f) \geq T_a^x(f) \qquad \text{se } y > x.$$

Si osservi inoltre che $T_a^a(f) = 0$.
D'altra parte, anche la funzione $x \mapsto T_a^x(f) - f(x)$ è crescente in $[a,b]$, perché se $y > x$ si ha, ancora dalla proposizione 6.4.3,

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq T_x^y(f) = T_a^y(f) - T_a^x(f).$$

Quindi, scrivendo

$$f(x) = T_a^x(f) - (T_a^x(f) - f(x)),$$

si ha la tesi. $\square$

Da questo corollario e dal teorema di derivazione di Lebesgue (teorema 6.3.1) segue subito:

Corollario 6.4.5 *Ogni funzione $f \in BV[a,b]$ è derivabile q.o., e la derivata f' è sommabile in $[a,b]$.* $\square$

Esercizi 6.4

1. Si provi che
$$\|f\|_{BV[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + T_a^b(f)$$
è una norma nello spazio $BV[a,b]$, e che $BV[a,b]$ con questa norma è completo. Si provi inoltre che $BV[a,b]$ non è chiuso in $\mathcal{L}^\infty(a,b)$.

2. Calcolare la variazione totale delle seguenti funzioni:

   (i) $f(x) = x(x^2-1), \quad x \in [-2,2]$;

   (ii) $f(x) = 3\chi_{[0,1/2]}(x) - 6\chi_{[1/4,3/4]}(x), \quad x \in [0,1]$;

   (iii) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0,2\pi]$;

   (iv) $f(x) = x - [x], \quad x \in [-50,50]$.

3. Sia $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right], \ n \geq 2, \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=2}^\infty \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]. \end{cases}$$

   (i) Provare che $f, g \in BV[0,1]$ e calcolarne le rispettive variazioni totali.

   (ii) Dimostrare che $g \circ f \notin BV[0,1]$.

4. Siano $f, g \in BV[a,b]$. Provare che $f \vee g, f \wedge g \in BV[a,b]$.

5. Sia $f \in C^0[a,b]$. Si provi che $f \in BV[a,b]$ se e solo se il grafico Γ di f è una curva rettificabile, e che in tal caso si ha
$$T_a^b(f) \leq \ell(\Gamma) \leq T_a^b(f) + b - a.$$

6. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona e sia Γ_f il suo grafico.

   (i) Si verifichi che
$$\sqrt{(b-a)^2 + |f(b) - f(a)|^2} \leq \ell(\Gamma_f) \leq b - a + |f(b) - f(a)|.$$

   (ii) Si determinino le funzioni f continue e monotone per le quali
$$\ell(\Gamma_f) = \sqrt{(b-a)^2 + |f(b) - f(a)|^2}.$$

   (iii) Si trovi una classe di funzioni f continue e monotone per le quali
$$\ell(\Gamma_f) = b - a + |f(b) - f(a)|.$$

7. Sia $f \in BV[a,b]$; si dimostri che f è continua in $x_0 \in [a,b]$ se e solo se la funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è continua in x_0.

8. Siano $f, g \in BV[a,b]$. Si provi che $fg \in BV[a,b]$ e che (v. esercizio 6.4.1)

$$\|fg\|_{BV[a,b]} \leq \|f\|_{BV[a,b]} \|g\|_{BV[a,b]}.$$

9. Siano $f, g \in BV[a,b]$, con $g \neq 0$ in $[a,b]$. Provare che se $\inf_{[a,b]} |g| > 0$ allora $\frac{f}{g} \in BV[a,b]$. È vero il viceversa?

10. Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c,d] \to [a,b]$, con g strettamente crescente. Provare che se $f \in BV[a,b]$, allora $f \circ g \in BV[c,d]$.

6.5 Funzioni assolutamente continue

Introduciamo adesso una classe di funzioni all'interno della quale sarà possibile dare una risposta positiva alla domanda (iii) del paragrafo 6.1.

Definizione 6.5.1 *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è detta* assolutamente continua *in $[a,b]$, e scriveremo $f \in AC[a,b]$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, \ldots, k$, contenuti in $[a,b]$ e verificanti $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.*

Osservazioni 6.5.2 (1) È immediato verificare che se f è assolutamente continua, allora la condizione richiesta dalla definizione è soddisfatta anche nel caso di famiglie *infinite* di intervalli disgiunti.

(2) Se f è assolutamente continua in $[a,b]$, allora ovviamente f è anche continua in $[a,b]$; il viceversa, come vedremo nell'esempio 6.5.6, non è vero.

(3) Se $g \in L^1(a,b)$, allora la funzione $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ appartiene ad $AC[a,b]$, a causa dell'assoluta continuità dell'integrale (proposizione 4.4.9).

Tutte le funzioni assolutamente continue in $[a,b]$ hanno necessariamente variazione limitata in $[a,b]$, come mostra la seguente

Proposizione 6.5.3 *Risulta $AC[a,b] \subset BV[a,b]$.*

L'inclusione è ovviamente propria, dato che esistono funzioni discontinue a variazione limitata; ad esempio, $\chi_{[1,2]} \in BV[0,3]$ con $T_0^3(\chi_{[1,2]}) = 2$.

Dimostrazione Sia $f \in AC[a,b]$. Scelto $\varepsilon = 1$, sia δ il corrispondente numero con il quale la f verifica la definizione 6.5.1. Dividiamo $[a,b]$ in N parti uguali di ampiezza $\frac{b-a}{N} < \delta$, e poniamo $x_n = a + \frac{n}{N}(b-a)$, $0 \leq n \leq N$. Risulta allora, per costruzione,

$$T_{x_n}^{x_{n+1}}(f) \leq 1, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Dunque, per la proposizione 6.4.3 si ha

$$T_a^b(f) = \sum_{n=0}^{N-1} T_{x_n}^{x_{n+1}}(f) \leq N < \infty. \quad \square$$

In particolare, dal corollario 6.4.5 segue che ogni funzione assolutamente continua in $[a,b]$ è derivabile q.o. con derivata sommabile in $[a,b]$. Verificheremo fra breve che per tali funzioni f l'integrale della derivata vale esattamente $f(b)-f(a)$. Intanto osserviamo che il risultato del corollario 6.4.4 si può ulteriormente precisare:

Corollario 6.5.4 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in AC[a,b]$ se e solo se f è differenza di due funzioni assolutamente continue e crescenti in $[a,b]$.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) È sufficiente osservare che $AC[a,b]$ è uno spazio vettoriale.
($\Longrightarrow$) Per il corollario 6.4.4 si ha

$$f(x) = T_a^x(f) - (T_a^x(f) - f(x)),$$

e le due funzioni a secondo membro sono crescenti in $[a,b]$. Basterà allora provare che $x \mapsto T_a^x(f)$ appartiene ad $AC[a,b]$.
Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ il numero fornito dalla definizione 6.5.1 applicata a f. Sia $\{]\alpha_i,\beta_i[\}_{1\le i\le N}$ una famiglia di sottointervalli disgiunti di $[a,b]$ con $\sum_{i=1}^N(\beta_i-\alpha_i) < \delta$, e per ogni i sia π_i una partizione di $]\alpha_i,\beta_i[$; allora risulta, grazie all'assoluta continuità di f,

$$\sum_{i=1}^N t_{\alpha_i}^{\beta_i}(f,\pi_i) < \varepsilon \ ;$$

di conseguenza, per l'arbitrarietà delle partizioni π_i,

$$\sum_{i=1}^N \left(T_a^{\beta_i}(f) - T_a^{\alpha_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^N T_{\alpha_i}^{\beta_i}(f) \le \varepsilon,$$

e ciò prova la tesi. $\square$

Il teorema che segue caratterizza la classe delle funzioni assolutamente continue proprio in termini della proprietà (iii) del paragrafo 6.1.

Teorema 6.5.5 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$f \in AC[a,b]$;*

(ii) *f è derivabile q.o. in $[a,b]$, f' è sommabile in $[a,b]$ e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dimostrazione [**(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**] Sappiamo già che f è derivabile q.o. in $[a,b]$; dobbiamo solo provare l'uguaglianza sopra scritta. A questo scopo, ricordando il corollario 6.5.4, possiamo supporre che f sia crescente in $[a,b]$.
Essendo f crescente, esiste la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_f associata a f, introdotta nell'esempio 2.1.3(3) e ben definita grazie alla continuità di f: proviamo che μ_f è definita su $\mathcal{M}$ e che $\mu_f \ll m$ (definizione 4.4.4).
Sia $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; scelto $\delta > 0$ in modo da soddisfare la

definizione di assoluta continuità di f, esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m(A) < \delta$. Per l'esercizio 1.3.3, sarà $A = \bigcup_n]\alpha_n, \beta_n[$ con gli $]\alpha_n, \beta_n[$ disgiunti; poiché f è crescente, da $\sum_n(\beta_n - \alpha_n) < \delta$ segue $\sum_n(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) < \varepsilon$. Quindi

$$\mu_f^*(E) \leq \mu_f(A) \leq \sum_n \mu_f([\alpha_n, \beta_n[) = \sum_n (f(\beta_n) - f(\alpha_n)) < \varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrario, si ottiene $\mu_f^*(E) = 0$; quindi, per la completezza di μ_f, si ha $E \in \mathcal{M}_f$ e $\mu_f(E) = 0$. Poiché ogni insieme $G \in \mathcal{M}$ è l'unione di un boreliano B e di un insieme $E \in \mathcal{M}$ di misura nulla, ne segue $G = B \cup E \in \mathcal{M}_f$; quindi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_f$, ossia μ_f è definita su $\mathcal{M}$. Inoltre, come si è visto, se $m(E) = 0$ allora $\mu_f(E) = 0$. Ciò prova che $\mu_f \ll m$.
Adesso facciamo uso del *teorema di Radon-Nikodým*, già citato nel paragrafo **??**, e che verrà dimostrato nel capitolo 8 in modo ovviamente indipendente dalla teoria svolta fin qui; in base a questo risultato (che certamente vale per misure finite) possiamo concludere che esiste una funzione $h \in L^1(a, b)$, q.o. non negativa, tale che

$$\mu_f(E) = \int_E h(t)\, dt \qquad \forall E \in \mathcal{M}.$$

In particolare

$$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x[) = \int_a^x h(t)\, dt \qquad \forall x \in [a, b];$$

applicando allora il corollario 6.2.5 si ottiene che f è derivabile q.o. in $[a, b]$ (cosa che già sapevamo), e che $f' = h$ q.o. in $[a, b]$ (fatto nuovo). Quindi possiamo sostituire nell'integrale h con f', e pertanto vale (ii).
[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] La misura μ, definita da $\mu(E) = \int_E |f'(t)|\, dt$, è assolutamente continua rispetto a m in quanto $f' \in L^1(a, b)$; dato che entrambe le misure sono finite, in virtù della proposizione 4.4.8 per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$m(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f'(t)| dt < \varepsilon.$$

In particolare, quindi, se $\{]\alpha_i, \beta_i[\}_{i=1,\ldots,k}$ è una collezione finita di sottointervalli disgiunti di $[a, b]$ tale che $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulterà

$$\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| = \left| \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f'(t)| dt < \varepsilon,$$

il che mostra che $f \in AC[a, b]$. Ciò prova (i). $\square$

Non tutte le funzioni continue in $[a, b]$ sono assolutamente continue in $[a, b]$, come mostra il sorprendente esempio che segue: esistono funzioni continue, crescenti, q.o. derivabili, con derivata q.o. nulla, e tuttavia non costanti. Funzioni di questo tipo non possono essere assolutamente continue a causa del teorema 6.5.5, ma sono certamente a variazione limitata: per tali funzioni, in particolare, la disuguaglianza del teorema 6.3.1 è stretta.

Esempio 6.5.6 Sia C l'insieme ternario di Cantor $C_{1/3}$ introdotto nel paragrafo 1.6: si ha

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} E_n, \qquad E_n \supset E_{n+1}, \qquad E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{kn},$$

dove gli J_{kn} sono intervalli chiusi disgiunti con $m(J_{kn}) = 3^{-n}$. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$g_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{E_n}(x), \qquad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Si noti che

$$\int_{J_{kn}} g_n(t)dt = \left(\frac{3}{2}\right)^n m(J_{kn}) = \frac{1}{2^n},$$

$$\int_{J_{kn}} g_{n+1}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} m(J_{kn} \cap E_{n+1}) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^n},$$

Risulta allora

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^n m(E_n) = 1;$$

inoltre se $x \in E_n^c$ vale l'uguaglianza

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x g_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x g_n(t)\, dt = f_n(x)$$

(perché si integra solo sugli intervalli J_{kn} contenuti in $[0,x]$, dove gli integrali di g_n e g_{n+1} coincidono), mentre invece se $x \in E_n$, ad esempio $x \in J_{kn}$, vale la stima

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\int_0^x [g_{n+1}(t) - g_n(t)]\, dt\right| \le \int_{J_{kn}} |g_{n+1}(t) - g_n(t)|\, dt \le \\ &\le \int_{J_{kn}} [g_{n+1}(t) + g_n(t)]\, dt = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

(perché gli integrali fra 0 ed il primo estremo di J_{kn} si cancellano). In definitiva

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cosicché la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0,1]$ ad una funzione f. Poiché le f_n sono continue e crescenti, anche f è continua e crescente, e verifica $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Inoltre, dato che f_n è costante su ogni intervallo disgiunto da E_n, si ha $f_n' = 0$ in E_n^c ed a maggior ragione $f_m' = 0$ in E_n^c per ogni $m \ge n$, visto che in tal caso $E_m^c \supset E_n^c$; quindi se I è un intervallo contenuto in $\bigcup_{n=1}^\infty E_n^c$, ossia disgiunto da C, si ha $f_n \to f$ uniformemente in I e $f_n' = 0$ definitivamente in I: ciò implica che f è derivabile con $f' = 0$ in I. Pertanto f è derivabile con $f' = 0$ in C^c, ossia q.o. in $[0,1]$ (dal momento che C ha misura nulla).
Come si è già osservato, $f \notin AC[0,1]$ perché

$$1 = f(1) - f(0) > \int_0^1 f'(t)\ dt = 0.$$

La funzione f è chiamata *funzione di Lebesgue* o anche, più informalmente, “scala del diavolo”.

Esercizi 6.5

1. Provare che se $f, g \in AC[a,b]$, allora $f \vee g, f \wedge g \in AC[a,b]$.

2. Sia f crescente ed assolutamente continua in $[a,b]$. Posto $f(x) = f(b)$ per $x > b$ e $f(x) = f(a)$ per $x < a$, si verifichi che la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_f su $\mathbb{R}$ è data da
$$\mu_f(E) = \int_E f'(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathcal{M}.$$

3. Sia $f \in AC[a,b]$; si provi che per ogni $E \subseteq [a,b]$ misurabile con $m(E) = 0$ si ha $m^*(f(E)) = 0$; si provi inoltre che per ogni $E \subseteq [a,b]$ misurabile l'insieme $f(E)$ è misurabile.

4. Sia f crescente e continua a sinistra in $[a,b]$ e sia μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f. Si provi che $\mu_f \ll m$ se e solo se $f \in AC[a,b]$.

5. Si provi che
$$\|f\|_{AC[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt$$
è una norma nello spazio $AC[a,b]$, e che $AC[a,b]$ con questa norma è completo. Si provi inoltre che $AC[a,b]$ non è chiuso in $C[a,b]$.

6. Sia $f \in AC[a,b]$; si provi che $T_a^b(f) = \|f'\|_{L^1(a,b)}$, e se ne deduca che $AC[a,b]$ è un sottospazio chiuso di $BV[a,b]$.
[**Traccia:** Per provare che $T_a^b(f) \geq \|f'\|_{L^1(a,b)}$ si utilizzi il fatto che le funzioni costanti a tratti sono dense in $L^1(a,b)$.]

7. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si provi che f è lipschitziana su $[a,b]$ se e solo se $f \in AC[a,b]$ e $f' \in L^\infty(a,b)$.

8. Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^{-\beta} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Si provi che se $0 < \beta < \alpha$ allora $f \in AC[0,1]$, mentre se $0 < \alpha \leq \beta$ allora $f \notin BV[0,1]$.

9. Siano $f \in AC[a,b]$ e $g \in AC[c,d]$, con $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Si provi che:

   (i) se f è monotona, allora $g \circ f \in AC[a,b]$;

   (ii) se g è lipschitziana, allora $g \circ f \in AC[a,b]$;

   (iii) per $f(x) = x^2|\sin 1/x|$ e $g(x) = x^{1/2}$ si ha $f, g \in AC[0,1]$ ma $g \circ f \notin AC[0,1]$.

10. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dimostri che:

(i) se $f \in AC[\varepsilon, 1]$ per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$ e f è continua in 0, allora non è detto che $f \in AC[0, 1]$;

(ii) se $f \in AC[\varepsilon, 1]$ per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$, $f \in BV[0, 1]$ e f è continua in 0, allora $f \in AC[0, 1]$;

(iii) se $f \in AC[\varepsilon, 1]$ per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$, $f' \in L^1(0, 1)$ e f è continua in 0, allora $f \in AC[0, 1]$.

11. Siano $f, g \in AC[a, b]$. Si provi che $fg \in AC[a, b]$ e che vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

12. Provare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è della forma $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$, con $g \in L^1(\mathbb{R})$, se e solo se

$$f \in AC[-a, a] \quad \forall a > 0, \qquad \lim_{a \to +\infty} T_{-a}^a(f) < \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

13. (i) Siano $F \in AC[a, b]$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Si provi che $\varphi \circ F \in AC[a, b]$.

(ii) Si dimostri che per ogni $p \in [1, \infty[$ e $f \in L^1(a, b)$ esiste $g \in L^1(a, b)$ tale che

$$\left(\int_a^x |f(t)|\,dt \right)^p = \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

14. Sia f la funzione di Lebesgue dell'esempio 6.5.6; si provi che, detto Γ il suo grafico, risulta

$$\ell(\Gamma) = 2$$

(si confronti questo risultato con quello degli esercizi 6.4.5 e 6.4.6).

15. Sia f la funzione di Lebesgue dell'esempio 6.5.6; si provi che f è hölderiana di esponente $\frac{\log 2}{\log 3}$.

[**Traccia:** posto $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$, e dati $x, y \in [0, 1]$, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $3^{-n-1} < |x - y| \le 3^{-n}$; si provi che allora $|f(x) - f(y)| \le 2^{-n}$. Osservato che $2 \cdot 3^{-\alpha} = 1$, si deduca che $|f(x) - f(y)| \le 3^\alpha |x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in [0, 1]$.]

6.6 Cambiamento di variabile

Per l'integrale di Riemann la formula del cambiamento di variabile

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$$

vale per ogni f continua in un intervallo $[c, d]$ e per ogni funzione $g : [a, b] \to [c, d]$ di classe C^1. Ci chiediamo ora se questa formula si possa estendere al caso dell'integrale di Lebesgue, e sotto quali condizioni ciò sia possibile. Proveremo il seguente risultato:

Teorema 6.6.1 *Sia $f \in L^1(c,d)$ e sia $g : [a,b] \to [c,d]$ una funzione derivabile q.o. in $[a,b]$. Posto $F(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi$ per $x \in [c,d]$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) $(f \circ g)g' \in L^1(a,b)$ *e*

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(x)\,dx = \int_u^v f(g(t))g'(t)\,dt \qquad \forall u,v \in [a,b];$$

(ii) $F \circ g \in AC[a,b]$.

In tal caso risulta $(F \circ g)' = (f \circ g)g'$ q.o. in $[a,b]$.

Per dimostrare il teorema faremo uso di tre lemmi preliminari.

Lemma 6.6.2 *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di un sottoinsieme $E \subseteq [a,b]$. Se risulta $|g'(x)| \leq \beta$ per ogni $x \in E$, allora $m^*(g(E)) \leq \beta\, m^*(E)$.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_n = \left\{ x \in E : |g(t) - g(x)| \leq (\beta + \varepsilon)|t - x| \;\; \forall t \in \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\cap [a,b] \right\}.$$

Allora risulta

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} E_n\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo un ricoprimento $\{I_{jn}\}_{j \in \mathbb{N}}$ di E_n, fatto da intervalli di lunghezza minore di $\frac{1}{n}$, tale che

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} m(I_{jn}) < m^*(E_n) + \varepsilon.$$

Si ha allora, per definizione di E_n e per il fatto che $m(I_{jn}) < \frac{1}{n}$,

$$m^*(g(E_n)) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} m^*(g(E_n \cap I_{jn})) \leq (\beta + \varepsilon) \sum_{j \in \mathbb{N}} m(I_{jn}) < (\beta + \varepsilon)(m^*(E_n) + \varepsilon);$$

passando infine al limite per $n \to \infty$, e ricordando l'esercizio 1.7.2, otteniamo

$$\begin{aligned} m^*(g(E)) &= m^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} g(E_n) \right) = \lim_{n \to \infty} m^*(g(E_n)) \leq \\ &\leq (\beta + \varepsilon) \left[\lim_{n \to \infty} m^*(E_n) + \varepsilon \right] = (\beta + \varepsilon)\,[m^*(E) + \varepsilon]\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi del lemma per l'arbitrarietà di ε. $\square$

Lemma 6.6.3 *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $E \subseteq [a,b]$ un insieme tale che g sia derivabile in ogni punto $x \in E$. Allora si ha $m^*(g(E)) = 0$ se e solo se $g' = 0$ q.o. in E.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Sia $g' = 0$ q.o. in E. Poniamo

$$E_0 = \{x \in E : g'(x) = 0\}, \qquad E_k = \{x \in E : k-1 < |g'(x)| \le k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Per il lemma 6.6.2 si ha $m^*(g(E_0)) = 0$ ed anche

$$m^*(g(E \setminus E_0)) \le \sum_{k \in \mathbb{N}^+} m^*(g(E_k)) \le \sum_{k \in \mathbb{N}^+} k\, m^*(E_k) = 0,$$

da cui $m^*(g(E)) = 0$.
($\Longrightarrow$) Sia $m^*(g(E)) = 0$: Posto $B = \{x \in E : g'(x) \neq 0\}$, sarà $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, ove

$$B_n = \left\{ x \in E : |g(t) - g(x)| \ge \frac{1}{n}|t - x| \quad \forall x \in \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap [a, b] \right\}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $A = B_n \cap I$, ove I è un qualunque sottointervallo di $[a, b]$ di lunghezza minore di $\frac{1}{n}$. Se dimostriamo che $m(A) = 0$, avremo $m(B_n) = 0$ a causa dell'arbitrarietà di I; dunque, essendo arbitrario anche n, otterremo $m(B) = 0$, cioè la tesi. Proviamo in definitiva che $m(A) = 0$.
Sia $\varepsilon > 0$: dato che $m(g(A)) \le m(g(E)) = 0$, esiste un ricoprimento $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $g(A)$, fatto di intervalli, tale che $\sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_j) < \varepsilon$. Poiché $A \subseteq g(g^{-1}(A)) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} g^{-1}(I_j)$, definendo $U_j = g^{-1}(I_j) \cap A$ avremo anche $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Perciò

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\le \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(U_j) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \sup_{t,x\in U_j} |t - x| \le \\
&\quad \left(\text{per definizione di } B_n\,,\ \text{essendo } U_j \subseteq I \cap B_n \text{ e } m(I) \le \frac{1}{n}\right) \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{N}} n \sup_{t,x\in U_j} |g(t) - g(x)| \le (\text{essendo } g(U_j) \subseteq I_j) \\
&\le \sum_{j\in N} n\ m(I_j) < n\varepsilon,
\end{aligned}$$

ove ε è arbitrario e n è fissato. Quindi $m^*(A) = 0$. Ne segue la tesi. $\square$

Lemma 6.6.4 *Siano $F \in AC[c, d]$ e $g : [a, b] \to [c, d]$, e supponiamo che g e $F \circ g$ siano derivabili q.o. in $[a, b]$. Allora si ha $(F \circ g)' = (F' \circ g)g'$ q.o. in $[a, b]$.*

Dimostrazione Poniamo

$$M = \{y \in [c, d] : F'(y) \text{ non esiste}\}, \quad N = g^{-1}(M), \quad G = [a, b] \setminus N.$$

Notiamo che se $y \in [c, d] \setminus M$ e $k \in [c - y, d - y]$ si ha

$$F(y + k) - F(y) = k[F'(y) + \omega(y, k)], \quad \lim_{k\to 0} \omega(y, k) = 0;$$

quindi se $x \in G$ risulta $g(x) \in [c, d] \setminus M$ e pertanto, scelti $h \in [a - x, b - x]$ e $k = g(x + h) - g(x)$, avremo

$$F(g(x + h)) - F(g(x)) = [g(x + h) - g(x)][F'(g(x)) + \eta(x, h)],$$

ove
$$\eta(x,h)=\omega(g(x),g(x+h)-g(x))\to 0 \quad \text{per} \quad g(x+h)-g(x)\to 0.$$
Supponiamo ora che $x\in G$ e che esista $g'(x)$: ciò accade q.o. in G. In tal caso si ha $g(x+h)-g(x)\to 0$ per $h\to 0$, quindi $\eta(x,h)\to 0$ per $h\to 0$; allora dividendo per h la relazione precedente e passando al limite per $h\to 0$ otteniamo

$$(F\circ g)'(x)=g'(x)F'(g(x)) \qquad \text{q.o. in } G.$$

D'altra parte,
$$m(g(N))=m(M)=0,$$
ed essendo $F\in AC[c,d]$, si deduce $m(F(g(N)))=0$ in virtù dell'esercizio 6.5.3. Posto

$$N_0=\{x\in[a,b]:(F\circ g)'(x) \text{ non esiste}\},$$

si ha a maggior ragione $m(F(g(N\setminus N_0)))=0$; quindi, per il lemma 6.6.3, si ha $(F\circ g)'=0$ q.o. in $N\setminus N_0$, cioè q.o. in N. Similmente, posto

$$N_1=\{x\in[a,b]:g'(x) \text{ non esiste}\},$$

si ha a maggior ragione $m(g(N\setminus N_1))=0$, e ancora dal lemma 6.6.3 segue $g'=0$ q.o. in $N\setminus N_1$, ossia q.o. in N. Infine, ricordando che F' è q.o. finita in $[a,b]$ (essendo ivi sommabile), otteniamo

$$(F\circ g)'=0=(F'\circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N.$$

Pertanto si conclude che

$$(F\circ g)'=(F'\circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N\cup G=[a,b]. \quad \square$$

Dimostrazione del teorema 6.6.1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Per ipotesi, $(f\circ g)g'\in L^1(a,b)$ e vale la formula di cambiamento di variabile, cioè per ogni $x\in[a,b]$ si ha

$$F(g(x))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(x)} f(y)\,dy=\int_a^x f(g(t))g'(t)\,dt;$$

quindi $F\circ g\in AC[a,b]$ per il teorema 6.5.5.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Dato che $F\circ g\in AC[a,b]$ e $F\in AC[c,d]$, siamo nelle ipotesi del lemma 6.6.4: pertanto
$$(F\circ g)'=(F'\circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a,b].$$
Come nella dimostrazione del lemma 6.6.4, siano

$$M=\{y\in[c,d]:F'(y) \text{ non esiste}\}, \quad N=g^{-1}(M).$$

Fuori di N si ha $F'(g(x))=f(g(x))$ q.o., da cui

$$(F\circ g)'=(f\circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a,b]\setminus N;$$

dentro N, ragionando come nella dimostrazione del lemma 6.6.4, troviamo $(F\circ g)'(x) = 0$ q.o. e $g'(x) = 0$ q.o., da cui, essendo f sommabile e quindi q.o. finita,

$$(F \circ g)' = 0 = (f \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N.$$

In definitiva

$$(F \circ g)' = (f \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a, b],$$

e inoltre $(f \circ g)g'$ risulta sommabile in $[a, b]$ dato che $F \circ g \in AC[a, b]$. Perciò

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(x)\, dx = F(g(v)) - F(g(u)) =$$
$$= \int_u^v (F \circ g)'(t)\, dt = \int_u^v f(g(t))g'(t)\, dt \quad \forall u, v \in [a, b],$$

e ciò prova la tesi. □

Esercizi 6.6

1. Siano $f \in L^1(c, d)$, $g \in AC[a, b]$ e $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Si provi che se, in più, $f \in L^\infty(c, d)$, oppure g è monotona, allora $F \circ g \in AC[a, b]$ e quindi la formula di cambiamento di variabile è applicabile.

2. Posto
$$g(t) = t^3 \sin \frac{1}{t}\,,\ t \in [0, 1], \qquad f(x) = x^{-\frac{2}{3}},\ x \in [-1, 1],$$
si provi che la formula di cambiamento di variabile è falsa per $u = 0$ e $v > 0$. Come mai?

3. Posto
$$g(t) = t \sin \frac{1}{t}\,,\ t \in [0, 1], \qquad f(x) = x,\ x \in [-1, 1],$$
si provi che la formula di cambiamento di variabile è valida, benché $g \notin AC[0, 1]$ (e infatti nel teorema 6.6.1 l'ipotesi $g \in AC[a, b]$ non c'è).

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $E \subseteq [a, b]$ un insieme misurabile tale che la derivata $f'(x)$ esista finita in ogni punto $x \in E$. Si provi che
$$m^*(f(E)) \leq \int_E |f'|\, dm.$$
[**Traccia:** si supponga dapprima $|f'| \leq N$, e si definisca $E_{kn} = \{x \in E : 2^{-n}(k - 1) \leq |f'(x)| < 2^{-n}k\}$ ($n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, N2^n$). Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $m^*(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{N2^n} 2^{-n}k\, m(E_{kn}) \leq \int_E |f'|\, dm + 2^{-n}m(E) \ldots$]

5. Sia $F \in C^0[a, b] \cap BV[a, b]$, tale che per ogni $E \subset [a, b]$ con $m(E) = 0$ si abbia $m(F(E)) = 0$. Si provi che $F \in AC[a, b]$.
[**Traccia:** se $]x_i, y_i[\,, 1 \leq i \leq N$, sono intervalli disgiunti, sia $E_i = \{x \in]x_i, y_i[: \exists F'(x)\}$; si mostri che $m(F(]x_i, y_i[) = m(F(E_i))$ e che $\sum_{i=1}^N |F(x_i) - F(y_i)| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{y_i} |F'|dm$.]

6. Siano $F \in AC[a,b]$ e $G \in AC[c,d]$, con $[c,d] = F([a,b])$. Si provi che $G \circ F \in AC[a,b]$ se e solo se $G \circ F \in BV[a,b]$.

6.7 Cambiamento di variabili

Scopo di questo paragrafo è ricavare la formula del cambiamento di variabili negli integrali di Lebesgue N-dimensionali: vedremo che sotto opportune ipotesi sulla trasformazione $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è ancora valida la medesima formula che sussiste per gli integrali multipli di Riemann: in altre parole risulta, indicando con J_T il determinante della matrice Jacobiana di T,

$$\int_{T(E)} f \, dm_N = \int_E (f \circ T) \, |J_T| \, dm_N$$

per ogni insieme misurabile E e per ogni funzione f sommabile, oppure integrabile.
Nella dimostrazione faremo uso di diversi enunciati preliminari. Il più importante di essi è il teorema del punto fisso di Brouwer, risultato fondamentale in vari contesti e del quale si conoscono numerose dimostrazioni: per completezza il paragrafo successivo ne contiene una, dovuta a G. Stampacchia, che fa uso di strumenti puramente analitici.

Teorema 6.7.1 (di Brouwer) *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme non vuoto, convesso e compatto; sia $F : K \to K$ una funzione continua. Allora F ha almeno un punto fisso.*

Iniziamo la trattazione del cambiamento di variabili con un lemma che è una conseguenza diretta del teorema di Brouwer.

Lemma 6.7.2 *Sia B_r la palla aperta di $\mathbb{R}^N$ di centro 0 e raggio r, e sia S_r la sua frontiera. Sia $F : \overline{B_r} \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua e sia $\varepsilon \in]0,1[$ tale che*

$$|F(x) - x| < \varepsilon r \qquad \forall x \in S_r \, .$$

Allora $F(B_r) \supseteq B_{(1-\varepsilon)r}$.

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo: sia $a \in B_{(1-\varepsilon)r}$ tale che $a \notin F(B_r)$. Allora dall'ipotesi segue

$$|F(x)| \geq |x| - |x - F(x)| > (1-\varepsilon)r \qquad \forall x \in S_r \, ,$$

e dunque a non appartiene nemmeno a $F(S_r)$. Poniamo allora

$$G(x) = \frac{r(a - F(x))}{|a - F(x)|} \, , \qquad x \in \overline{B_r} \, :$$

G è un'applicazione continua da $\overline{B_r}$ in sé. Proviamo che G non ha punti fissi: ciò, contraddicendo il teorema di Brouwer, ci darà l'assurdo.
Se $x \in S_r$, allora $x \cdot x = r^2$ e quindi

$$x \cdot (a - F(x)) = x \cdot a + x \cdot (x - F(x)) - r^2 < r|a| + \varepsilon r^2 - r^2 < 0,$$

da cui $x \cdot G(x) < 0$ e pertanto $x \neq G(x)$.
Se invece $x \in B_r$, allora $x \neq G(x)$ in quanto $G(x) \in S_r$. Ne segue che G è priva di punti fissi. $\square$

Il lemma che segue mette in luce il ruolo chiave giocato dal determinante Jacobiano.

Lemma 6.7.3 *Sia V un aperto di $\mathbb{R}^N$, sia $T : V \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua. Se T è differenziabile in un punto $x \in V$, allora, detta $B(x,r)$ la palla aperta di centro x e raggio r,*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(T(B(x,r)))}{m_N(B(x,r))} = |\det T'(x)|.$$

Dimostrazione Osserviamo che $T(B(x,r))$ è misurabile: infatti $B(x,r)$ è unione numerabile di compatti e T è continua, cosicché anche $T(B(x,r))$ è unione numerabile di compatti.
Possiamo supporre, a meno di traslazioni, che $x = 0$ e $T(0) = 0$. Poniamo $A = T'(0)$; si hanno due casi: l'applicazione lineare A è bigettiva oppure no.

1$^{\text{o}}$ caso: A è bigettiva. Posto $F(x) = A^{-1}T(x)$ per ogni $x \in V$, si ha $F(0) = 0$, $F'(0) = I$ e, dalla teoria dell'integrazione secondo Riemann otteniamo, per ogni palla contenuta in V,

$$m_N(T(B)) = m_N(A(F(B))) = |\det A|\, m_N(F(B)),$$

cosicché la tesi sarà provata se faremo vedere che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(F(B(x,r)))}{m_N(B(x,r))} = 1.$$

Osserviamo esplicitamente che questo fatto sarebbe stato di dimostrazione abbastanza semplice se avessimo supposto T di classe C^1 su V, perché avremmo potuto far uso del teorema di inversione locale per applicazioni da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$. Nelle nostre ipotesi, invece, occorrerà utilizzare il teorema di Brouwer.
Sia $\varepsilon > 0$. Dall'ipotesi di differenziabilità segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |F(x) - x| < \varepsilon|x|,$$

e in particolare

$$|F(x)| \leq |F(x) - x| + |x| < (1+\varepsilon)|x| \qquad \text{per } 0 < |x| < \delta.$$

Il lemma 6.7.2 applicato a F e la relazione precedente ci dicono che

$$B(0,(1-\varepsilon)r) \subseteq F(B(0,r)) \subseteq B(0,(1+\varepsilon)r) \qquad \forall r \in]0,\delta].$$

Da qui si ricava

$$(1-\varepsilon)^N \leq \frac{m_N(F(B(0,r)))}{m_N(B(0,r))} \leq (1+\varepsilon)^N,$$

da cui, come osservato, la tesi quando A è bigettiva.

2^o caso: A **non è bigettiva**. In particolare A non è surgettiva: quindi l'immagine di A ha misura N-dimensionale nulla. Sia $\varepsilon > 0$: esiste $\eta > 0$ tale che, posto

$$E_\eta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A(B(0,1))) < \eta\},$$

si ha $m_N(E_\eta) < \varepsilon$. Inoltre, essendo $A = T'(0)$, esiste $\delta > 0$ per cui

$$|x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |T(x) - Ax| \leq \eta|x|.$$

Se $r < \delta$ si ha

$$T(B(0,r)) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A(B(0,r))) < \eta r\};$$

denotando quest'ultimo insieme con E, si vede immediatamente che $E = rE_\eta$, cosicché $m_N(E) < \varepsilon r^N$. Dunque

$$m_N(T(B(0,r))) < \varepsilon r^N = \varepsilon \frac{m_N(B(0,r))}{m_N(B(0,1))} \qquad \forall r \in]0, \delta[,$$

da cui

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_N(T(B(0,r)))}{m_N(B(0,r))} = 0 = |\det A|.$$

La tesi è provata anche quando A non è bigettiva. $\square$

Il lemma seguente fornisce condizioni affinché gli insiemi di misura nulla vengano trasformati in insiemi di misura nulla.

Lemma 6.7.4 *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ con $m_N(E) = 0$. Se $T : E \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione tale che*

$$\limsup_{y \to x,\, y \in E} \frac{|T(y) - T(x)|}{|y - x|} < +\infty \qquad \forall x \in E,$$

allora $T(E)$ è misurabile con $m_N(T(E)) = 0$.

Dimostrazione Per ogni $n, p \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_{np} = \{x \in E : |T(y) - T(x)| < n|y - x| \ \forall y \in E \cap B(x, 1/p)\};$$

ovviamente $m_N(E_{np}) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo ricoprire E_{np} con una famiglia al più numerabile di palle $B_i = B(x_i, r_i)$ con $r_i < 1/p$ e $x_i \in E_{np}$, tali che $\sum_i m_N(B_i) < \varepsilon$: questo può essere fatto scegliendo un aperto $W \supset E_{np}$ con $m_N(W) < \varepsilon/2$, decomponendolo in cubi semiaperti disgiunti di diametro sufficientemente piccolo, e prendendo per ogni cubo C che interseca E_{np} una palla B centrata in un punto di $C \cap E_{np}$ e raggio pari al diametro di C.
Se allora $x \in E_{np} \cap B_i$, si ha $|x - x_i| < 1/p$, da cui

$$|T(x) - T(x_i)| < n|x_i - x| < nr_i;$$

quindi $T(E_{np} \cap B_i) \subseteq B(T(x_i), nr_i)$ e pertanto

$$T(E_{np}) \subseteq \bigcup_i B(T(x_i), nr_i).$$

Ne segue

$$m_N^*(T(E_{np}) \leq n^N \sum_i m_N(B_i), n^N\varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε si conclude che $m_N^*(T(E_{np})) = 0$ per ogni $n, p \in \mathbb{N}^*$. Infine, essendo $E = \bigcup_{n,p\in\mathbb{N}^+} E_{np}$, si ricava che $m_N^*(T(E)) = 0$. $\square$

Come ovvia conseguenza del lemma precedente si ottiene il

Corollario 6.7.5 *Se V è un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $T : V \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione differenziabile, allora T trasforma sottoinsiemi di V di misura nulla in insiemi di misura nulla.* $\square$

Enunciamo finalmente il teorema del cambiamento di variabili.

Teorema 6.7.6 *Sia V un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$, sia $T : V \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua, e sia $Y \subseteq V$ un insieme misurabile tale che:*

(i) *T sia differenziabile in ogni punto di Y;*

(ii) *$T|_Y$ sia iniettiva;*

(iii) *$m_N(T(V \setminus Y)) = 0$.*

Allora per ogni funzione f misurabile e non negativa definita su $T(Y)$ si ha

$$\int_{T(Y)} f \, dm_N = \int_Y (f \circ T) \, |J_T| \, dm_N \, ,$$

ove $J_T(x)$ è il determinante della matrice Jacobiana di T nel punto $x \in Y$.

Dimostrazione Procederemo in tre passi.

1º passo: se $E \subseteq V$ è misurabile, allora $T(E)$ è misurabile.

Sappiamo dal lemma 6.7.4 che se $E_0 \subset V$ è misurabile con $m_N(E_0) = 0$, allora $m_N(T(E_0 \cap Y)) = 0$, mentre per l'ipotesi (iii) si ha $m_N(T(E_0 \setminus Y)) = 0$: ne segue $m_N(T(E_0)) = 0$. Inoltre, se E_1 è un boreliano intersezione numerabile di aperti, allora E_1 è unione numerabile di compatti; poiché T è continua, anche $T(E_1)$ è unione numerabile di compatti e quindi $T(E_1)$ è misurabile.

Dato che ogni insieme E misurabile è unione di un boreliano intersezione numerabile di aperti e di un insieme di misura nulla, anche $T(E)$ è misurabile. Ciò prova il primo passo.

2º passo: se E è misurabile, allora $m_N(T(E \cap Y)) = \int_Y \chi_E |J_T| \, dm_N$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo l'aperto $V_n = \{x \in V : |T(x)| < n\}$ e l'insieme $Y_n = Y \cap V_n$, e definiamo

$$\mu_n(E) = m_N(T(E \cap Y_n)), \qquad E \in \mathcal{M}_N \, .$$

Dal primo passo segue che μ_n è ben definita, mentre dall'iniettività di T su Y otteniamo che μ_n è una misura. Inoltre μ_n è finita (perché è la misura di Lebesgue di insiemi contenuti nella palla di centro l'origine e raggio n) e, per il corollario 6.7.5, μ_n è assolutamente continua rispetto a m_N. Quindi, per il teorema di Radon-Nikodým, che verrà dimostrato più avanti nel corso, esiste una funzione $h_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$, non negativa e nulla fuori di Y_n, tale che

$$\mu_n(E) = \int_E h_n dm_N \qquad \forall E \in \mathcal{M}_N\,.$$

Dimostriamo che $h_n(x) = |J_T(x)|$ q.o. in Y_n. Sia $x \in Y_n$ e sia $\rho > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq V_n$ per $r \in]0,\rho[$; poiché $V_n \setminus Y_n \subseteq V \setminus Y$, per l'ipotesi (iii) si ha $\mu_n(E) = m_N(T(E \cap V_n))$, da cui per $r \in]0,\rho[$ possiamo scrivere

$$\frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = \frac{m_N(T(B(x,r) \cap V_n))}{m_N(B(x,r))} = \frac{m_N(T(B(x,r)))}{m_N(B(x,r))},$$

da cui, per il lemma 6.7.3,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = |J_T(x)|.$$

D'altronde, se $x \in Y_n$ è punto di Lebesgue per h_n si ha

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B(x,r))} \int_{B(x,r)} h_n dm_N = h_n(x),$$

cosicché le funzioni h e $|J_T|$ coincidono q.o. in Y_n. Si conclude allora che

$$m_N(T(E \cap Y_n)) = \mu_n(E) = \int_{Y_n} |J_T| dm_N \qquad \forall E \in \mathcal{M}_N\,.$$

Utilizzando il teorema di B. Levi, per $n \to \infty$ otteniamo la tesi del secondo passo.

3$^{\mathbf{o}}$ passo: se E è misurabile, allora $\int_{T(Y)} \chi_E dm_N = \int_Y (\chi_E \circ T)|J_T|\, dm_N$.

Sia A un boreliano di $\mathbb{R}^N$ e sia $E = \{x \in V : T(x) \in A\}$, cosicché $\chi_E = \chi_A \circ T$. Per l'esercizio 3.1.16, χ_E è misurabile, quindi anche $\chi_E|J_T|$ lo è; inoltre si ha $T(E \cap Y) = A \cap T(Y)$, da cui, per il secondo passo,

$$\int_{T(Y)} \chi_A dm_N = m_N(A \cap T(Y)) = m_N(T(E \cap Y)) = \int_Y (\chi_A \circ T)|J_T|\, dm_N\,.$$

Sia ora G un insieme misurabile di misura nulla. Allora esiste un boreliano $A \supseteq G$ di misura nulla, e dunque $(\chi_A \circ T)|J_T| = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Ne segue, essendo $0 \le \chi_G \le \chi_A$,

$$\int_{T(Y)} \chi_G\, dm_N = 0 = \int_Y (\chi_N \circ T)|J_T|\, dm_N\,.$$

Dato che ogni insieme misurabile E è unione (disgiunta) di un boreliano A e di un insieme di misura nulla G, sommando le relazioni relative ad A e a G si ottiene la tesi del terzo passo.

La dimostrazione del teorema 6.7.6 si conclude ora facilmente: per additività la tesi del terzo passo vale per ogni funzione semplice, e infine utilizzando il teorema di B. Levi essa si estende ad ogni funzione misurabile non negativa. □

Osservazioni 6.7.7 **(1)** Ovviamente il teorema di cambiamento di variabili vale anche per funzioni che cambiano segno, purché siano sommabili o almeno integrabili.

(2) Dalla dimostrazione segue in particolare che la funzione $(f \circ T)|J_T|$ è misurabile; in generale tuttavia $f \circ T$ non lo è (esercizio 6.7.4).

(3) Il teorema 6.7.6 vale anche per $N = 1$, ma in questo caso il risultato che si ottiene è meno generale di quello del teorema 6.6.1.

Esercizi 6.7

1. *(Coordinate polari in $\mathbb{R}^N$)* Sia $T : [0, \infty[\times[0, \pi]^{N-2} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^N$ la trasformazione definita da $x = T(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)$, ove

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\vartheta_1 \\ x_2 &= r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ x_3 &= r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x_{N-2} &= r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\cos\vartheta_{N-2} \\ x_{N-1} &= r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\cos\varphi \\ x_N &= r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\sin\varphi \end{cases}$$

   Si provi che

$$|J_T(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)| = r^{N-1}(\sin\vartheta_1)^{N-2}\ldots\sin\vartheta_{N-2}$$

   e che il teorema 6.7.6 è applicabile.

2. Posto $\omega_N = m_N(B(0,1))$ (ove $B(0,1)$ è la palla aperta di centro l'origine e raggio 1), si provi che

$$\omega_N = \frac{2\pi}{N}\,\omega_{N-2} \qquad \forall N > 2,$$

   e si deduca che, in accordo con l'osservazione 2.6.2,

$$\omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n!} & \text{se } N = 2n \\ \frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!} & \text{se } N = 2n-1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^+,$$

   ove $k!!$ è il prodotto di tutti i naturali non superiori a k che hanno la stessa parità di k.

3. Sia $f : [0, R] \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Si provi che

$$\int_{B(0,r)} f(|x|)\,dm_N = N\omega_N \int_0^r f(\rho)\rho^{N-1}dm(\rho) \qquad \forall r \in [0, R].$$

4. Sia C_ξ l'insieme di Cantor di parametro $\xi > \frac{1}{3}$ e sia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la collezione di intervalli aperti rimossi durante la costruzione di C_ξ; siano poi g_n funzioni continue nulle su W_n^c e tali che $0 < g_n < 2^{-n}$ in W_n. Posto $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$, definiamo

$$T(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad t \in [0,1].$$

Si provi che:

(i) T verifica le ipotesi del teorema 6.7.6 con $N = 1$ e $Y = V =]0,1[$;

(ii) T è derivabile in $[0,1]$, $T'(x) = 0$ per ogni $x \in C_\xi$ e $m(T(C_\xi)) = 0$;

se V è un sottoinsieme non misurabile di C_ξ e $A = T(V)$, allora χ_A è una funzione misurabile ma $\chi_A \circ T$ non lo è.

6.8 Appendice: dimostrazione del teorema di Brouwer

Riportiamo per comodità l'enunciato del teorema.

Teorema (di Brouwer) *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme non vuoto, convesso e compatto; sia $F : K \to K$ una funzione continua. Allora F ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione Facciamo vari passi.

1º passo. Cominciamo col mostrare che, se la tesi vale quando $K = \overline{B(0,R)}$, con $R > 0$, allora vale anche nel caso generale. Infatti, essendo K un convesso compatto, esisterà $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0,R)}$; detta P_K la proiezione sul convesso K (che sarà definita nel capitolo 8), l'applicazione composta $F \circ P_K$ è continua da $\overline{B(0,R)}$ in K, e quindi da $\overline{B(0,R)}$ in sé. Quindi c'è un punto $\overline{x} \in \overline{B(0,R)}$ tale che $\overline{x} = F \circ P_K(\overline{x})$; dato che F è a valori in K, si ha $\overline{x} \in K$, e di conseguenza $P_K(\overline{x}) = \overline{x}$. Ciò prova che $\overline{x} = F(\overline{x})$, ossia $\overline{x}$ è punto fisso di F.

2º passo. Ora proviamo che se la tesi vale quando K è la palla unitaria chiusa, allora vale anche quando $K = \overline{B(0,R)}$, $R > 0$. A questo scopo basta porre

$$G(x) = \frac{1}{R} F(Rx) \qquad \forall x \in \overline{B(0,1)},$$

ed osservare che, per ipotesi, G ha un punto fisso $\overline{x} \in \overline{B(0,1)}$; di conseguenza $\overline{y} = R\overline{x}$ appartiene a $\overline{B(0,R)}$ ed è punto fisso di F.

3º passo. D'ora in poi, dunque, supporremo che $K = \overline{B(0,1)}$. In questo terzo passo facciamo vedere che, supposta vera la tesi quando F è di classe C^∞, essa è vera anche per F continua. Infatti, consideriamo per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ la proiezione P_m sulla palla $\overline{B(0, 1 - \frac{1}{m})}$; la funzione composta $P_m \circ F$ manda K in tale palla. Per la densità di $C^\infty(K)$ in $C^0(K)$, esiste una funzione $\phi_m \in C^\infty(K)$ tale che $\|\phi_m - P_m \circ F\|_\infty \leq \frac{1}{m}$. Da questa stima segue che ϕ_m è a valori in K: quindi, per ipotesi, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ esiste un punto fisso $x_m \in K$ per l'applicazione ϕ_m. La successione $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ è limitata, e

dunque vi è una sottosuccessione $\{x_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ convergente ad un punto $\overline{x} \in K$.
Proviamo che $\overline{x}$ è punto fisso per F. Poiché $|x_{m_n} - P_{m_n}(x_{m_n})|_N \leq \frac{1}{m_n}$, si ha $P_{m_n}(x_{m_n}) \to \overline{x}$ per $n \to \infty$; essendo F continua, si deduce che $F(P_{m_n}(x_{m_n})) \to F(\overline{x})$ e $F(x_{m_n}) \to F(\overline{x})$ per $n \to \infty$. Dato che $P_m(x)$ converge a x per ogni $x \in K$, si deduce che $P_{m_n}(F(x_{m_n})) \to F(\overline{x})$ per $n \to \infty$. Utilizzando la relazione $\|\phi_m - P_m \circ F\|_\infty \leq \frac{1}{m}$, si ricava anche $\phi_{m_n}(x_{m_n}) \to F(\overline{x})$ per $n \to \infty$. Di conseguenza, passando al limite nell'equazione $x_{m_n} = \phi_{m_n}(x_{m_n})$ si ottiene $\overline{x} = F(\overline{x})$.
4^{o} **passo.** Dimostriamo finalmente la tesi nel caso a cui ci siamo ridotti, ossia $F : K \to K$ di classe C^∞, con $K = \overline{B(0,1)}$. Supponiamo per assurdo che risulti $F(x) \neq x$ per ogni $x \in K$. Consideriamo l'equazione

$$|x + a(x - F(x))|_N^2 = 1, \qquad a \in \mathbb{R},\ x \in K,$$

ovvero

$$a^2|x - F(x)|_N^2 + 2a\ (x, x - F(x))_N - (1 - |x|_N^2) = 0.$$

Fissato $x \in K$, il discriminante di questa equazione di 2^{o} grado è

$$\Delta(x) = (x, x - F(x))_N^2 + (1 - |x|_N^2)|x - F(x)|_N^2.$$

Ovviamente, $\Delta(x) \geq 0$; proviamo che $\Delta(x) > 0$ per ogni $x \in K$. Ciò è evidente quando $|x|_N < 1$; se invece $|x|_N = 1$, non può essere $(x, x - F(x))_N = 1 - (x, F(x))_N = 0$, in quanto si ha sempre

$$(x, F(x))_N \leq |x|_N \cdot |F(x)|_N = |F(x)|_N \leq 1,$$

e vale l'uguaglianza $(x, F(x))_N = 1$ se e solo se $F(x) = x$, il che è vietato dal nostro ragionamento per assurdo.
Possiamo considerare allora la maggiore delle due radici dell'equazione, che denotiamo con $a(x)$:

$$a(x) = \frac{-(x, x - F(x))_N + \sqrt{\Delta(x)}}{|x - F(x)|_N^2}\ .$$

Osserviamo che per $|x|_N = 1$ le radici dell'equazione sono

$$0, \qquad -2\,\frac{1 - (x, F(x))_N}{|x - F(x)|_N^2} < 0,$$

cosicché se $|x|_N = 1$ si ha $a(x) = 0$.
Definiamo

$$f(t, x) = x + t\,a(x)(x - F(x)), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in K.$$

Questa funzione è di classe C^∞ (perché $\Delta(x) > 0$ in K) e verifica

$$f(0, x) = x, \quad |f(1, x)|_N = 1 \quad \forall x \in K; \qquad f_t(t, x) = 0 \text{ per } |x|_N = 1 :$$

infatti la prima uguaglianza è banale, la seconda segue dal fatto che $a(x)$ è radice dell'equazione $|x + a(x - F(x))|_N^2 = 1$, e la terza si ottiene notando che $f_t(t, x) =$

$a(x)(x - F(x))$ e ricordando che $a(x) = 0$ per $|x|_N = 1$.
Poniamo adesso, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$D_0(t,x) = \det\left(\left\{\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(t,x)\right\}_{i,j=1,\ldots,N}\right), \qquad I(t) = \int_K D_0(t,x)\,dx.$$

Dato che $D_0(0,x) = \det(I) = 1$ per ogni $x \in K$, è chiaro che $I(0) = m_N(K)$; verifichiamo che si ha inoltre $I(1) = 0$. Derivando la relazione $|f(1,x)|_N^2 = 1$, valida per ogni $x \in K$, si ottiene il sistema

$$2\sum_{i=1}^{N} f^i(1,x)\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(1,x) = 0, \quad j = 1,\ldots,N, \qquad \forall x \in K;$$

dunque il sistema lineare omogeneo $N \times N$ con coefficienti $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(1,x)$ ha per soluzione il vettore di componenti $f^i(1,x)$, il quale è non nullo, essendo $|f(1,x)|_N = 1$ per ogni $x \in K$. Di conseguenza il determinante dei coefficienti, che è $D_0(1,x)$, deve essere nullo per ogni $x \in K$, e pertanto $I(1) = \int_K 0\,dx = 0$.
Vogliamo ora dimostrare che $I'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: da ciò seguirà ovviamente l'assurdo, essendo $I \in C^\infty$ e $I(1) - I(0) \neq 0$. A questo scopo è essenziale il seguente

Lemma 6.8.1 *Sia $g : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione di classe C^∞ nelle variabili $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$. Posto*

$$\Delta_j(x) = \det(D_j(x)), \qquad D_j(x) = \left(\left\{\frac{\partial g^i}{\partial x_j}(x)\right\}_{i=1,\ldots,N,\ j=0,\ldots,N,\ j\neq i}\right),$$

risulta

$$\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{\partial \Delta_j}{\partial x_j}(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Dimostrazione Si ha

$$\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{\partial \Delta_j}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j\sum_{i=1}^{N}\det(A_i(x)),$$

ove $A_i(x)$ è la matrice $N \times N$ che si ottiene da $D_j(x)$ rimpiazzandone la i-sima riga con

$$\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_0 x_j}(x), \ldots, \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_{j-1} x_j}(x), \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_{j+1} x_j}(x), \ldots, \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_N x_j}(x)\right).$$

Gli addendi di questa sommatoria sono $N(N+1)$, quindi sono in numero pari. Un generico termine del determinante relativo all'addendo di indici (j,i), con $0 \le j \le N$ e $1 \le i \le N$ fissati, ha la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_s x_j}(x) \cdot \prod_{1\le k\le N,\ k\neq i}\frac{\partial f^k}{\partial x_{r_k}}(x),$$

ove $s \in \{0,1,\ldots,N\} \setminus \{j\}$, e $r : \{1,\ldots,N\} \to \{0,1,\ldots,N\} \setminus \{j\}$ è una permutazione degli indici tale che $r_i = s$ (e, in particolare, $r_k \neq j, s$ per $k \neq i$); il segno di questo termine è $(-1)^j \varepsilon(r)$, ove $\varepsilon(r)$ è il segno della permutazione r. Lo stesso termine compare in un altro determinante: quello relativo all'addendo di indici (s,i), e che corrisponde alla permutazione $\rho : \{1,\ldots,N\} \to \{0,1,\ldots,N\} \setminus \{s\}$ tale che $\rho_i = j$ e $\rho_k = r_k$ per ogni $k \in \{1,\ldots,N\} \setminus \{i\}$; il suo segno è, stavolta, $(-1)^s \varepsilon(\rho)$.
Adesso osserviamo che $(-1)^j \varepsilon(r)$ è il segno della permutazione $r' \in S_{N+1}$ che si ottiene ponendo $r'_0 = j$ e $r'_k = r_k$ per ogni $k \in \{1,\ldots,N\}$; analogamente, $(-1)^s \varepsilon(\rho)$ è il segno della permutazione $\rho' \in S_{N+1}$ tale che $\rho'_0 = s$ e $\rho'_k = \rho_k$ per ogni $k \in \{1,\ldots,N\}$. Dato che ρ' si ottiene da r' scambiando r'_0 con r'_i, i segni di ρ' e r' sono opposti: dunque $(-1)^j \varepsilon(r) = -(-1)^s \varepsilon(\rho)$ e pertanto i due termini corrispondenti si cancellano fra loro. Ciò accade per ogni coppia di termini ed in definitiva l'intera somma è nulla. □

Torniamo alla dimostrazione del teorema di Brouwer. Applichiamo il lemma 6.8.1 alla funzione $f(t, x_1, \ldots, x_N)$: ponendo

$$D_j(t,x) = \det\left(\left\{\frac{\partial f^i}{\partial x_k}(t,x)\right\}_{i=1,\ldots,N,\ k=0,1,\ldots,N,\ k\neq j}\right), \qquad j = 1,\ldots,N,$$

si ha

$$I'(t) = \int_K \frac{\partial D_0}{\partial t}(t,x)dx = -\sum_{j=1}^N (-1)^j \int_K \frac{\partial D_j}{\partial x_j}(t,x)dx;$$

applicando le formule di Gauss-Green, si deduce

$$I'(t) = -\sum_{j=1}^N (-1)^j \int_{\partial K} D_j(t,x)\nu_j(x)d\sigma,$$

ove $\nu(x)$ è il versore normale esterno a ∂K e σ è la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale su ∂K. Ma poiché per $j = 1,\ldots,N$ i D_j sono determinanti di matrici tutte contenenti il vettore colonna $f_t(t,x)$, il quale è nullo per $|x|_N = 1$, tutti i D_j sono nulli su ∂K. Pertanto $I'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e ciò implica l'assurdo. Il teorema di Brouwer è così dimostrato. □

Esercizi 6.8

1. Verificare che il teorema di Brouwer è falso per la palla unitaria chiusa di ℓ^2.
[**Traccia:** se B è la palla unitaria chiusa di ℓ^2, si consideri l'applicazione $f(x) = \left(\sqrt{1-\|x\|_2^2}, x_1, x_2, \ldots\right)$, $x \in B$.]

2. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua tale che esista $R > 0$ per cui si abbia

$$f(x) \cdot x \geq 0 \qquad \forall x \in B(0,R).$$

Si provi che esiste $\overline{x} \in \overline{B(0,R)}$ tale che $f(\overline{x}) = 0$.
[**Traccia:** ragionare per assurdo, applicando il teorema di Brouwer alla funzione $F : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ definita da $F(x) = -R\frac{f(x)}{|f(x)|_N}$.]

Capitolo 7

Spazi di Banach

7.1 Norme

Abbiamo già incontrato vari esempi di spazi vettoriali dotati di norme; alcuni sono completi rispetto alla distanza indotta dalla norma, altri no. Vogliamo ora ricapitolare alcuni fatti già noti ed ampiamente usati, e descrivere in modo più organico questi spazi. Cominciamo con la definizione di norma.

Definizione 7.1.1 *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Una* norma *su X è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ dotata delle seguenti proprietà:*

(i) $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (oppure per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$);*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *per ogni $x, y \in X$.*

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è detta spazio normato *ed è uno spazio metrico con la distanza indotta $d(x, y) = \|x - y\|$; se tale spazio metrico è completo, $(X, \|\cdot\|)$ è detto* spazio di Banach.

Notiamo che da (iii) segue

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X;$$

quindi la norma è una funzione continua da X in $[0, +\infty[$.
Abbiamo già incontrato i seguenti spazi di Banach:

(1) $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$, con $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i|^2}$, oppure $\|x\| = \sum_{i=1}^N |x^i|$, oppure $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq N} |x^i|$;

(2) $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, con $\|f\|_1 = \int_X |f|\, d\mu$;

(3) $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, con $\|f\|_\infty = \text{supess}_X |f|$;

(4) $C^k[a, b]$ $(k \in \mathbb{N})$, con $\|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{h=0}^k \max_{[a,b]} |f^{(h)}|$;

(5) $AC[a,b]$, con $\|f\|_{AC[a,b]} = \max_{[a,b]} |f| + \int_a^b |f'(t)|\,dt$;

(6) $BV[a,b]$, con $\|f\|_{BV[a,b]} = \sup_{[a,b]} |f| + T_a^b(f)$.

Il seguente lemma caratterizza gli spazi normati che sono anche spazi di Banach, ossia fornisce un criterio per stabilire se una data norma rende completo lo spazio X oppure no.

Lemma 7.1.2 *Sia X uno spazio normato. Allora X è uno spazio di Banach se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, per la quale risulti $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, esiste $y \in X$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge a y in X, ossia*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} x_n - y \right\| = 0.$$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Allora la successione delle somme parziali $\{\sum_{n=0}^{N} x_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in X, dato che

$$\left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| \le \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \qquad \forall N, M \in \mathbb{N} \text{ con } N > M;$$

poiché X è completo, tale successione convergerà ad un opportuno $y \in X$.
($\Longleftarrow$) Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy in X: allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ (e non è restrittivo supporre $n_{k+1} > n_k$) tale che

$$\|y_m - y_{n_k}\| < 2^{-k} \qquad \forall m \ge n_k\ .$$

Poniamo

$$\begin{cases} x_0 = y_{n_0} \\ x_{k+1} = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\,, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

allora $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| = \|y_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \le \|y_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Quindi, per ipotesi, esiste $y \in X$ tale che

$$y_{n_m} = \sum_{k=0}^{m} x_k \to y \quad \text{in } X;$$

ma dato che $\{y_n\}$ è di Cauchy, l'intera successione $\{y_n\}$ converge a y. Dunque X è completo. $\square$

Ricordiamo che due norme $\|\cdot\|, |\cdot|$ su uno spazio vettoriale X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$c_1|x| \le \|x\| \le c_2|x| \qquad \forall x \in X;$$

ciò accade se e solo se entrambe le norme inducono su X la stessa topologia (esercizio 7.1.1). In generale, uno spazio può essere di Banach rispetto a due norme diverse e non confrontabili; se però lo spazio vettoriale ha dimensione finita, questo non può accadere, come mostra la proposizione che segue.

Proposizione 7.1.3 *In uno spazio vettoriale finito-dimensionale X tutte le norme sono fra loro equivalenti.*

Dimostrazione Supponiamo che lo spazio vettoriale X sia reale, e sia $\dim X = n$. Scelta una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di X, ogni $z \in X$ si scrive in modo unico come $z = \sum_{i=1}^n z^i e_i$, con $\{z^i\} \in \mathbb{R}^n$. Quindi possiamo considerare su X la norma

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z^i| \qquad \forall z \in X$$

e su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$|\{z^i\}| = \sum_{i=1}^n |z^i| \qquad \forall \{z^i\} \in \mathbb{R}^n;$$

vi è una ovvia isometria bigettiva $j : (X, \| \cdot \|_1) \to (\mathbb{R}^n, | \cdot |)$, data da $j(z) = \{z^i\}$ per ogni $z \in X$.
Sia ora $\| \cdot \|$ una norma qualunque su X. Per subadditività si trova subito

$$\|z\| = \left\| \sum_{i=1}^n z^i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^n |z^i| \|e_i\| \le M \|z\|_1 \qquad \forall z \in X,$$

ove $M = \max_{1 \le i \le n} \|e_i\|$.
D'altra parte, consideriamo la funzione

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad f(z) = \|z\| \quad \forall z \in X;$$

essa è continua, quindi $f \circ j^{-1}$ è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ e positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pertanto $f \circ j^{-1}$ ha minimo $m > 0$ sul compatto $\Gamma = \{\{z^i\} \in \mathbb{R}^n : |\{z^i\}| = 1\}$. Per omogeneità si ricava allora, posto $z = j^{-1}(\{z^i\})$,

$$\|z\| = f \circ j^{-1}(\{z^i\}) \ge m|\{z^i\}| = m|j(z)| \qquad \forall \{z^i\} \in \mathbb{R}^n,$$

ossia

$$\|z\| \ge m\|z\|_1 \qquad \forall z \in X.$$

Ne segue che la generica norma $\| \cdot \|$ è equivalente a $\| \cdot \|_1$. Il discorso è esattamente lo stesso se lo spazio X è complesso. $\square$

Esercizi 7.1

1. Dimostrare che due norme su uno spazio vettoriale X sono equivalenti se e solo se esse inducono su X la stessa topologia.

2. Si provi che in $BV[a,b]$ le tre norme

$$\|f\|_{BV} = \sup_{[a,b]} |f| + T_a^b(f), \ \|f\|_1 = \|f\|_\infty + T_a^b(f), \ \|f\|_2 = |f(a)| + T_a^b(f)$$

sono fra loro equivalenti.

3. Si provi che $C^0[a,b]$ è uno spazio normato con $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$. È completo?

4. Provare che in $C^0[a,b]$ le due norme $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_1$ non sono equivalenti.

5. Poniamo

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\},$$
$$c_0 = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è infinitesima}\},$$
$$c_{00} = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è definitivamente nulla}\}.$$

Provare che $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ è una norma in questi tre spazi; mostrare poi che i primi due sono spazi di Banach, ed il terzo no.

6. Fissato $\alpha \in]0,1[$, si consideri l'insieme delle funzioni α-hölderiane su $[a,b]$, cioè

$$C^\alpha[a,b] = \left\{ f \in C^0[a,b] : [f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

(i) Si verifichi che $C^\alpha[a,b]$ è un sottospazio denso in $C^0[a,b]$.

(ii) Si dimostri che
$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$
è una norma in $C^\alpha[a,b]$ che rende tale spazio uno spazio di Banach.

(iii) Posto $g_r(x) = |x-r|^\alpha$, si mostri che $g_r \in C^\alpha[a,b]$.

(iv) Si provi che
$$[g_r - g_s]_\alpha \geq 2 \qquad \forall r,s \in [a,b],$$
e se ne deduca che $C^\alpha[a,b]$ non è separabile (uno spazio topologico X si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile D denso in X).

7.2 Prodotti scalari

Una particolare categoria di spazi normati è costituita da quegli spazi in cui la norma è generata da un prodotto scalare. Questa circostanza rende tali spazi particolarmente ricchi di proprietà geometriche simili a quelle di $\mathbb{R}^N$ o di $\mathbb{C}^N$.

Definizione 7.2.1 *Sia H uno spazio vettoriale complesso. Un* prodotto scalare *è una applicazione $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:*

(i) *(x,x) è reale non negativo e $(x,x) = 0$ se e solo se $x = 0$;*

(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ *per ogni* $x, y \in H$;

(iii) $x \mapsto (x,y)$ *è lineare per ogni fissato* $y \in H$.

Da (ii) e (iii) segue che $y \mapsto (x,y)$ è antilineare, ossia

$$(x, \lambda y + \mu w) = \overline{\lambda}(x,y) + \overline{\mu}(x,w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x, y, w \in H.$$

Lo spazio H, munito di un prodotto scalare, si dice *spazio con prodotto scalare* o *spazio pre-hilbertiano*. Nel caso in cui H sia uno spazio vettoriale reale, la definizione è perfettamente analoga: spariscono i complessi coniugati ed il prodotto scalare risulta lineare nei suoi due argomenti.

Per mostrare che ogni prodotto scalare genera una norma, è fondamentale la seguente proprietà:

Proposizione 7.2.2 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Sia* H *uno spazio con prodotto scalare* $(\cdot,\cdot)$. *Allora*

$$|(x,y)| \leq (x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} \qquad \forall x, y \in H.$$

Dimostrazione Siano $x, y \in H$. Se $x = 0$ la tesi è banale perché i due membri della disuguaglianza sono nulli. Sia allora $x \neq 0$ cosicché $(x,x) > 0$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda x + y, \lambda x + y) = |\lambda|^2(x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}(y,x) + (y,y) = \\ &= |\lambda|^2(x,x) + 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda(x,y)) + (y,y), \end{aligned}$$

e scegliendo

$$\lambda = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$$

si ricava

$$0 \leq -\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y),$$

che è la tesi. $\square$

Corollario 7.2.3 *Sia* H *uno spazio con prodotto scalare* $(\cdot,\cdot)$. *Allora*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

è una norma su H, *che è detta* indotta *dal prodotto scalare.*

Dimostrazione Le prime due proprietà della definizione 7.1.1 sono evidenti. Verifichiamo la subadditività: per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Uno spazio con prodotto scalare è dunque anche uno spazio normato.

Definizione 7.2.4 *Uno spazio con prodotto scalare si dice* spazio di Hilbert *se è completo rispetto alla norma indotta.*

Osservazione 7.2.5 Il prodotto scalare è continuo rispetto alla norma indotta: infatti per ogni $x, x_0, y, y_0 \in H$ si ha la stima

$$\begin{aligned} |(x,y)-(x_0,y_0)| &= |(x-x_0, y-y_0)+(x-x_0,y_0)+(x_0,y-y_0)| \leq \\ &\leq \|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\|, \end{aligned}$$

e quindi $(x,y) \to (x_0,y_0)$ per $\|x-x_0\| \to 0$ e $\|y-y_0\| \to 0$.

Vediamo qualche esempio.

Esempi 7.2.6 **(1)** $\mathbb{C}^N$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ col prodotto scalare usuale

$$(x,y) = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i} \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^N,$$

che induce la norma euclidea

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i|^2}\ ;$$

la restrizione a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ di questo prodotto scalare rende $\mathbb{R}^N$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$ col prodotto scalare

$$(x,y) = \sum_{i=1}^N x^i y^i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

il quale induce la stessa norma.

(2) Lo spazio $C^0[a,b]$, con il prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\ dt \qquad \forall f, g \in C^0[a,b],$$

è uno spazio pre-hilbertiano, ma non di Hilbert: ad esempio, le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq x \leq \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}\left(x - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\right) & \text{se } \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq b \end{cases}$$

convergono nella norma indotta, che è

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\ ,$$

alla funzione discontinua $\chi_{[\frac{a+b}{2},b]}$, quindi formano una successione di Cauchy che non converge nello spazio $(C^0[a,b], \|\cdot\|)$.

(3) In un arbitrario spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ consideriamo lo spazio $\mathcal{L}^2(X)$ delle funzioni misurabili tali che $|f|^2$ è sommabile su X; indichiamo con $L^2(X)$ lo spazio quoziente rispetto alla consueta relazione di equivalenza che identifica le funzioni q.o. coincidenti. $L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare dell'esempio precedente. La dimostrazione della completezza di questo spazio rispetto alla norma indotta ricalca quella della completezza di $L^1(X)$ (teorema 4.5.2), e per essa si rimanda all'esercizio 7.2.1.

(4) Prendendo tutte le funzioni complesse f tali che Ref e Imf sono misurabili, e definendo l'integrale di f come

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \mathrm{Re}\, f\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}\, f\,d\mu,$$

possiamo considerare, sullo spazio $L^2(X, \mathbb{C})$ delle funzioni di quadrato sommabile a valori complessi, il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_X f\overline{g}\,d\mu \qquad \forall f, g \in L^2(X, \mathbb{C});$$

esso induce la stessa norma di prima, la quale risulta ancora completa.

Tramite il prodotto scalare si può dare la nozione di ortogonalità.

Definizione 7.2.7 *Sia H uno spazio con prodotto scalare. Due elementi $x, y \in H$ sono fra loro* ortogonali, *e scriviamo $x \perp y$, se risulta $(x, y) = 0$.*

Proposizione 7.2.8 (teorema di Pitagora) *Sia H uno spazio con prodotto scalare, e siano $x, y \in H$ con $x \perp y$. Allora se H è reale*

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

mentre se H è complesso

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dimostrazione Supponiamo H complesso. Allora

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

$$\|x \pm iy\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(x, iy) + \|y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Im}(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Il caso H reale è compreso nel precedente. □

Dato un qualunque spazio normato, come si fa a riconoscere se la norma è indotta da un prodotto scalare? La risposta è nella seguente

Proposizione 7.2.9 *Sia X uno spazio normato. La norma di X è hilbertiana, ossia è indotta da un prodotto scalare, se e solo se vale l'* identità del parallelogrammo*:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in H.$$

In tal caso, il prodotto scalare è dato da

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

se H è reale, e da

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + i\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)\right]$$

se H è complesso.

Dimostrazione **($\Longrightarrow$)** Si tratta di un'ovvia verifica.

($\Longleftarrow$) Si tratta di verificare che le espressioni sopra scritte soddisfano le richieste della definizione 7.2.1: la cosa è facile ma noiosa e per essa rimandiamo all'esercizio 7.2.2.
□

Esercizi 7.2

1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Si dimostri che $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert.
   [**Traccia:** si ripeta, con le dovute modifiche, la dimostrazione del teorema 4.5.2.]

2. Dimostrare che se nello spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è vera l'identità del parallelogrammo, allora la norma $\|\cdot\|$ è indotta da uno dei prodotti scalari introdotti nella proposizione 7.2.9.
   [**Traccia:** se X è reale, si provi dapprima che dall'ipotesi segue $(2x, y) + (2x', y) = 2(x + x', y)$, da cui, se $x' = 0$, $(2x, y) = 2(x, y)$. Se ne deduca, per induzione, che $(nx, y) = n(x, y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poi che $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$; si usi, poi, la continuità della norma. L'estensione al caso X complesso è facile.]

3. Si definiscano

$$\ell^1 = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|,$$

$$\ell^2 = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

   Si provi che ℓ^1 e ℓ^2 sono spazi di Banach, e che il secondo è uno spazio di Hilbert mentre il primo no. Si provi inoltre che questi due spazi sono separabili (v. esercizio 7.1.6).

4. Si dimostri che $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ non è uno spazio di Hilbert.

5. Si provi che $\{f \in AC[a, b] : f' \in L^2(a, b)\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g)_{AC} = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]dm.$$

6. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ sono due successioni tali che $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ e $(x_n, y_n) \to 1$, si provi che $\|x_n - y_n\| \to 0$.

7. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Si provi che:

   (i) se $x, y \neq 0$, allora $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ se e solo se esiste $\alpha > 0$ tale che $x = \alpha y$;

   (ii) si ha $x \perp y$ se e solo se $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, ed anche se e solo se $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

8. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Si provi che per ogni $x, y, z, w \in H$ vale la disuguaglianza

$$\|x - y\| \cdot \|z - w\| \leq \|x - z\| \cdot \|y - w\| + \|x - w\| \cdot \|y - z\|.$$

   [**Traccia:** Si osservi anzitutto che si può supporre $w = 0$. Se a primo membro c'è $\mathrm{Re}(x - y, z)$, la disuguaglianza è facile. Altrimenti, fissato $u \in H$, si scelga $z = e^{-i\vartheta}u$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$ tale che $(x - y, z) = \|x - y\| \cdot \|u\| = \|x - y\| \cdot \|z\|$...]

9. Sia $f \in L^1(a, b)$. Si provi che $f \in L^2(a, b)$ se e solo se esiste una funzione $g \in AC[a, b]$ tale che

$$\left[\int_x^y f(t)dt\right]^2 \leq [g(x) - g(y)](x - y) \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

   [**Traccia:** per l'implicazione ($\Longleftarrow$), provare preliminarmente che le funzioni costanti a tratti sono dense in $L^2(a, b)$, ed utilizzare poi questo fatto e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.]

7.3 Operatori lineari e continui

Siano X, Y spazi normati. Le più importanti fra le applicazioni da X in Y sono quelle che "rispettano" la struttura lineare degli insiemi di partenza e di arrivo, ossia sono le applicazioni lineari. Ad esse è dedicato questo paragrafo.

Definizione 7.3.1 *Un'applicazione $F : X \to Y$ è detta* operatore lineare *se si ha $F(\alpha x + \beta x') = \alpha F(x) + \beta F(x')$ per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oppure per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).*
Per gli operatori lineari si usa la scrittura Fx in luogo di $F(x)$.

Definizione 7.3.2 *Un operatore lineare $F : X \to Y$ si dice* limitato *se esiste $M \geq 0$ tale che $\|Fx\|_Y \leq M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$.*

Dunque, se $F : X \to Y$ è un operatore lineare e limitato, risulta

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty;$$

si noti che, a causa dell'omogeneità,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|u\|_X=1} \|Fu\|_Y = \sup_{\|v\|_X\leq 1} \|Fv\|_Y \ ,$$

ed in particolare un operatore lineare è limitato se e solo se esso è una funzione limitata (in norma) sulla palla unitaria di X, che è l'insieme

$$B = \{u \in X : \|u\|_X \leq 1\}.$$

L'insieme degli operatori lineari limitati da X in Y ha un'ovvia struttura di spazio vettoriale e si indica con $\mathcal{L}(X,Y)$; se $X = Y$ si scrive $\mathcal{L}(X)$ anziché $\mathcal{L}(X,X)$.

Per gli operatori lineari fra spazi normati la condizione di limitatezza equivale alla continuità. Si ha infatti:

Proposizione 7.3.3 *Siano X, Y spazi normati e sia $F : X \to Y$ un operatore lineare. Sono fatti equivalenti:*

(i) *F è limitato;*

(ii) *esiste $x_0 \in X$ tale che F è continuo nel punto x_0;*

(iii) *F è* lipschitziano*, cioè esiste $K \geq 0$ tale che*

$$\|Fx - Fx'\|_Y \leq K\|x - x'\|_X \qquad \forall x, x' \in X.$$

Dimostrazione **(i) $\Longrightarrow$ (iii)** Per ipotesi esiste $M \geq 0$ tale che

$$\|Fx\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad \forall x \in X;$$

grazie alla linearità si deduce

$$\|Fx - Fx'\|_Y = \|F(x - x')\|_Y \leq M\|x - x'\|_X \qquad \forall x, x' \in X.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Evidente.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x - x_0\|_X \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Fx - Fx_0\|_Y \leq \varepsilon.$$

Sia $z \in X \setminus \{0\}$ (si noti che se $X = \{0\}$, allora per linearità deve essere $F = 0$ e quindi la tesi è ovvia). Posto $w = \delta z/\|z\|_X$, si ha

$$\frac{\delta}{\|z\|_X}\ Fz = Fw = F(w + x_0) - Fx_0\,,$$

e poiché $\|(w + x_0) - x_0\|_X = \|w\|_X = \delta$, si ha $\|Fw\|_Y \leq \varepsilon$. Pertanto

$$\|Fz\|_Y = \frac{\|z\|_X}{\delta}\ \|Fw\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\ \|z\|_X \quad \forall z \in X \setminus \{0\}.$$

Dato che per $z = 0$ la stima precedente è ovvia, si conclude che F è limitato. $\square$

Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X,Y)$ diventa uno spazio normato con la norma

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$$

(le verifiche sono immediate).

Teorema 7.3.4 *Siano X, Y spazi normati. Se Y è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Sia $\{F_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$; quindi

$$\|F_n x - F_m x\|_Y < \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X, \quad \forall n, m \geq \nu.$$

In particolare, per ogni fissato $x \in X$ la successione $\{F_n x\}$ è di Cauchy in Y; poiché Y è completo, essa ha limite, per ogni fissato $x \in X$, nella norma di Y. Chiamiamo $F(x)$ tale limite: è immediato verificare che l'applicazione F così definita è lineare da X in Y. Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \|Fx\|_Y &= \lim_{n\to\infty} \|F_n x\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\|F_n - F_\nu\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X + \|F_\nu x\|_Y \right] \leq \\ &\leq \left[\varepsilon + \|F_\nu\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \right] \|x\|_X, \end{aligned}$$

cosicché F è un operatore limitato. Infine, se $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$ si ha

$$\|F_n x - Fx\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|F_n x - F_m x\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

da cui $\|F_n - F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$ e dunque $F_n \to F$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. $\square$

Vale anche il viceversa di questo teorema, salvo casi "patologici": si veda l'esercizio 7.3.9.

Definizione 7.3.5 *Il* duale *di uno spazio normato X è lo spazio $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ o lo spazio $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, a seconda che X sia reale o complesso; esso si denota con X^*. Gli elementi del duale X^* di X si dicono* funzionali *lineari e limitati su X (ovvero lineari e continui, per la proposizione 7.3.3).*

Osserviamo che, essendo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ completi, X^* è uno spazio di Banach per ogni spazio normato X.
Vediamo qualche esempio.

Esempi 7.3.6 (1) Se $X = \mathbb{R}^N$, il duale $(\mathbb{R}^N)^*$ è isomorfo ed isometrico a $\mathbb{R}^N$. Infatti ogni funzionale lineare F su $\mathbb{R}^N$ è completamente caratterizzato dai valori $Fe_1, \ldots, Fe_N$ assunti nei vettori della base canonica $e_1, \ldots, e_N$; posto allora $a = (Fe_1, \ldots, Fe_N)$, l'elemento $a \in \mathbb{R}^N$ così definito è tale che $Fx = \sum_{i=1}^N x^i a^i = (x,a)_{\mathbb{R}^N}$, e si ha anche $\|F\|_{(\mathbb{R}^N)^*} = \|a\|_{\mathbb{R}^N}$ (poiché per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta $|Fx| = |(x,a)_{\mathbb{R}^N}| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^N} \|a\|_{\mathbb{R}^N}$ e per $x = a$ vale l'uguaglianza).

(2) Se $X = \mathbb{C}^N$, il duale $(\mathbb{C}^N)^*$ è isomorfo ed isometrico a $\mathbb{C}^N$(stesso discorso, solo che stavolta i numeri $a^i = Fe_i$ sono complessi anziché reali).

(3) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Per ogni fissata $f \in L^1(X)$, il funzionale

$$Fg = \int_X fg \, d\mu, \qquad g \in L^\infty(X),$$

è ovviamente lineare; inoltre risulta

$$|Fg| \le \int_X |fg| \, d\mu \le \|f\|_1 \|g\|_\infty \qquad \forall g \in L^\infty(X),$$

quindi F è continuo, cioè è un elemento di $(L^\infty(X))^*$, e si ha $\|F\| \le \|f\|_1$. Proviamo che vale l'uguaglianza: ciò è evidente quando $f = 0$; altrimenti, se scegliamo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{se } f(x) \neq 0, \end{cases}$$

otteniamo $\|g\|_\infty = 1$ e quindi

$$|Fg| = \left| \int_X fg \, d\mu \right| = \int_X |f| \, d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Si ha dunque l'immersione isometrica $i : L^1(X) \to (L^\infty(X))^*$, definita da $i(f) = F$; come vedremo, questa immersione *non è* surgettiva.

(4) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito. Per ogni fissata $f \in L^\infty(X)$, consideriamo ancora il funzionale F dell'esempio precedente, o più precisamente

$$Fg = \int_X fg \, d\mu, \qquad g \in L^1(X).$$

Il calcolo fatto sopra mostra che $F \in (L^1(X))^*$ e che $\|F\| \le \|f\|_\infty$. Per provare l'uguaglianza, supposto che sia $f \neq 0$ (altrimenti è tutto ovvio) e dato $\varepsilon > 0$, si sfrutti la σ-finitezza di X per scegliere un insieme $A \in \mathcal{F}$ con $0 < \mu(A) < \infty$ tale che

$$|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall x \in A;$$

allora, scelta $g = \frac{f}{|f|}\chi_A$, risulta

$$|Fg| = \left| \int_X fg \, d\mu \right| = \int_A |f| \, d\mu > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(A) = (\|f\|_\infty - \varepsilon)\|g\|_1,$$

cosicché

$$\|F\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

e dunque $\|F\| = \|f\|_\infty$. Quindi si ha l'immersione isometrica $i : L^\infty(X) \to (L^1(X))^*$, definita da $i(f) = F$; vedremo nel seguito che tale isometria è surgettiva e che dunque, se la misura μ è σ-finita, il duale di $L^1(X)$ è isomorfo a $L^\infty(X)$. Se manca la σ-finitezza, questo risultato è in generale falso (esercizi 7.3.7 e 7.3.8).

Esercizi 7.3

1. Provare che se X è uno spazio normato finito-dimensionale, allora X è completo ed ogni funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ è continuo.

2. Siano X, Y, Z spazi normati; provare che se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, allora $B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$ e
$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

3. Sia $T : C^0[0,1] \to C^0[0,1]$ definito da
$$Tf(x) = \frac{x}{1+x^2} f(x), \quad x \in [0,1], \qquad \forall f \in C^0[0,1].$$
   (i) Si calcoli la norma di T.
   (ii) Si determini l'immagine $R(T) \subseteq C^0[0,1]$.
   (iii) Si verifichi che T è iniettivo.
   (iv) Si provi che $T^{-1} : R(T) \to C^0[0,1]$ non è limitato.

4. Posto
$$T : C^0[0,1] \to C^0[0,1], \qquad Tf(x) = \int_0^x (x-s) f(s) ds, \quad x \in [0,1],$$
si provi che T è continuo, se ne calcoli la norma e se ne determini l'immagine $R(T)$.

5. Si consideri l'operatore F definito per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ da
$$Fg(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x g(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
   (i) Si provi che $F \in \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))$ con norma uguale a 1.
   (ii) Si determini il *nucleo* di F, ossia l'insieme $\ker F = \{g \in L^\infty(\mathbb{R}) : Fg = 0\}$.
   (iii) Si caratterizzi $R(F)$.
   (iv) Per quali $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $Fg \in C^0(\mathbb{R})$?

6. Si definisca
$$Af = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, t\, e^{-|t|}\, dt.$$
Si provi che il funzionale A è limitato su $L^2(\mathbb{R})$, su $L^1(\mathbb{R})$ e su $L^\infty(\mathbb{R})$, e se ne calcoli la norma in tutti e tre i casi.

7. Siano $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0,1] : E$, oppure E^c, è numerabile$\}$, $\nu =$ misura "cardinalità". Si provi che:
   (i) per ogni $f \in L^1(X)$ la funzione $x \to xf(x)$ appartiene a $L^1(X)$;

(ii) il funzionale F, definito da $Ff = \int_0^1 x\, f(x)\, d\nu$ per ogni $f \in L^1(X)$, è un elemento di $(L^1(X))^*$;

(iii) non esiste alcuna $g \in L^\infty(X)$ per cui si abbia

$$Ff = \int_0^1 fg\, d\nu \qquad \forall f \in L^1(X).$$

8. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ lo spazio misurato dell'esempio 2.1.3 (8). Si provi che se $f \in L^\infty(X)$ e $\|f\|_\infty > 0$, allora il funzionale

$$Fg = \int_X fg\, d\mu, \qquad g \in L^1(X),$$

appartiene a $(L^1(X))^*$ ma $\|F\|_{(L^1(X))^*} < \|f\|_\infty$.

9. Siano X, Y spazi normati, e si supponga che $X^* \neq \{0\}$. Si provi che se $\mathcal{L}(X, Y)$ è completo, allora Y è completo.
[**Traccia:** se $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy in Y, si fissi $G \in X^* \setminus \{0\}$ e si definisca $F_n x = Gx \cdot y_n$. Osserviamo che l'ipotesi $X^* \neq \{0\}$ può essere sostituita dalla condizione più naturale $X \neq \{0\}$; ciò seguirà dal teorema di Hahn-Banach (teorema 10.1.3).]

10. Siano X, Y spazi di Banach. Si verifichi che $X \times Y$ è uno spazio di Banach con la norma
$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y,$$
e si provi che $(X \times Y)^*$ è isomorfo a $X^* \times Y^*$.

11. Si definisca
$$Fx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!} \qquad \forall x = \{x_n\} \in c_0$$
(lo spazio c_0 è definito nell'esercizio 7.1.5). Si provi che $F \in c_0^*$, se ne calcoli la norma e si verifichi che $\|F\|_{c_0^*}$ non è un massimo.

12. Sia $a = \{a_n\} \in \ell^\infty$. Poniamo
$$A : \ell^1 \to \ell^1, \quad (Ax)_n = a_n x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
(lo spazio ℓ^1 è definito nell'esercizio 7.2.3). Si provi che:

(i) $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = \|a\|_{\ell^\infty}$;

(ii) A è iniettivo se e solo se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) A è surgettivo e A^{-1} è continuo se e solo se $\inf_n |a_n| > 0$.

13. Sia $T : L^1(\mathbb{R}^2) \to L^1(\mathbb{R})$ definito da
$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^2).$$
Si provi che T è ben definito ed appartiene a $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^2), L^1(\mathbb{R}))$, e se ne calcoli la norma.

14. Sia X uno spazio di Banach, sia $F \in X^* \setminus \{0\}$. Posto $M = \{x \in X : Fx = 1\}$, si provi che
$$\mathrm{dist}(0, M) = \frac{1}{\|F\|_{X^*}}.$$

15. Sia X uno spazio normato e sia $A : X \to X$ un operatore lineare tale che $\{Ax_n\}$ sia una successione limitata in X per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ infinitesima in norma. Si provi che A è continuo.

16. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(Ax, x) = 0$ per ogni $x \in H$. Si provi che se H è complesso allora $A = 0$, mentre se H è reale ciò non è detto in generale.

17. Siano X, Y spazi di Banach, sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di operatori tali che
$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \text{in } Y \qquad \forall x \in E,$$
ove E è un sottoinsieme denso in X. Provare che se esiste $M > 0$ tale che $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora
$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \text{in } Y \qquad \forall x \in X,$$
mentre la cosa è in generale falsa senza l'ipotesi $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M$.

18. Sia X uno spazio di Banach, sia $A \in \mathcal{L}(X)$.

    (i) Provare che la serie
    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{ove} \quad A^0 = I, \quad A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A \ (n \text{ volte}),$$
    converge in $\mathcal{L}(X)$, e che quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'operatore
    $$T(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \qquad x \in X,$$
    è lineare e continuo su X con
    $$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

    (ii) Verificare la *legge di gruppo*
    $$T(0) = I, \qquad T(t+s) = T(t) \circ T(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

    (iii) Dimostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta
    $$\lim_{h\to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = A \circ T(t) \quad \text{in } \mathcal{L}(X).$$
    (L'operatore $T(t)$ si chiama *esponenziale* dell'operatore A e si indica con e^{tA}.)

19. Sia X uno spazio di Banach, sia $F \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|F\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si provi che $I - F$ è invertibile con inversa continua, e che

$$(I-F)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n, \qquad \|(I-F)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|F\|_{\mathcal{L}(X)}} \,,$$

ove $F^n = F \circ F \circ \cdots \circ F$ (n volte).

20. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che l'insieme $E = \{F \in \mathcal{L}(X) : F^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ è aperto in $\mathcal{L}(X)$.
[**Traccia:** se $F \in E$, si scriva $G = F \circ (I + F^{-1} \circ (G - F))$ e si osservi che esiste $\delta > 0$ tale che se $\|G - F\|_{\mathcal{L}(X)} < \delta$, allora $\|F^{-1} \circ (G - F)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$; quindi si può applicare l'esercizio precedente.]

21. Si provi che c_0^* è isomorfo ed isometrico a ℓ^1 (esercizi 7.1.5 e 7.2.3).

22. Si provi che $(\ell^1)^*$ è isomorfo ed isometrico a ℓ^∞.

23. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il funzionale T_n definito da

$$T_n f = \int_0^n f(t) \arctan nt \, dt, \quad f \in L^1(0, \infty).$$

(i) Si provi che $T_n \in (L^1(0,\infty))^*$ e se ne calcoli la norma.

(ii) Si dimostri che esiste $T \in (L^1(0,\infty))^*$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} T_n f = Tf \qquad \forall f \in L^1(0, \infty).$$

(iii) Si dica se T_n converge a T in $(L^1(0,\infty))^*$ per $n \to \infty$.

24. Sia $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ l'operatore lineare definito da

$$(Tx)_n = x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'operatore T^k è continuo e surgettivo, e se ne calcoli la norma.

(ii) Si descriva esplicitamente il sottospazio

$$\ker T^k = \{x \in \ell^\infty : T^k x = 0\}.$$

(iii) Si determini la chiusura di $\bigcup_{k=1}^\infty \ker T^k$ in ℓ^∞.

(iv) Si consideri la restrizione di T a ℓ^1, si verifichi che tale restrizione manda ℓ^1 in ℓ^1 e si risponda nuovamente ai tre quesiti precedenti.

Capitolo 8

Spazi di Hilbert

8.1 Proiezioni su convessi chiusi

Abbiamo già visto nel paragrafo 7.2 alcuni aspetti della geometria degli spazi dotati di prodotto scalare. Se lo spazio è anche completo rispetto alla norma indotta, le analogie fra le sue proprietà e quelle caratteristiche di $\mathbb{R}^N$, o di $\mathbb{C}^n$, sono ancora più strette ed interessanti.
Sia dunque H uno spazio di Hilbert. Per fissare le idee, supporremo H complesso; le modifiche da fare agli enunciati nel caso di H reale sono evidenti. In questo paragrafo consideriamo i sottoinsiemi convessi e chiusi di H, i quali possiedono speciali proprietà. Notiamo che in questa classe rientrano in particolare i sottospazi chiusi di H.

Proposizione 8.1.1 *Sia K un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di uno spazio di Hilbert H. Allora per ogni $y \in H$ esiste uno ed un solo $x_0 \in K$ tale che*

$$\|y - x_0\| = \min_{x \in K} \|y - x\|.$$

Tale elemento si chiama proiezione *di y sul convesso K e si indica con $P_K(y)$.*

Dimostrazione Sia $\lambda = \inf_{x \in K} \|y - x\|$: ovviamente $\lambda \geq 0$. Se $\lambda = 0$, allora $y \in \overline{K} = K$, quindi si ha la tesi con $x_0 = y$ (e tale x_0 è unico). Sia dunque $\lambda > 0$: in tal caso possiamo costruire una successione $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $\lambda \leq \|y - x_n\| < \lambda + \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Applichiamo l'identità del parallelogrammo (proposizione 7.2.9) ai vettori $\frac{x_n - y}{2}, \frac{x_m - y}{2}$: dato che $\frac{x_n + x_m}{2} \in K$, si trova

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 &= -\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - y \right\|^2 + 2\left\| \frac{x_n - y}{2} \right\|^2 + 2\left\| \frac{x_m - y}{2} \right\|^2 \leq \\ &\leq -\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\|x_n - y\|^2 + \|x_m - y\|^2 \right], \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $n, m \to \infty$. Perciò $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in H, la quale dunque converge in H ad un elemento $x_0 \in K$ (in quanto H è completo e K è chiuso). Se ne deduce

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \|y - x_n\| = \|y - x_0\|,$$

cosicché λ è un minimo.
Proviamo l'unicità del punto di minimo. Se $\overline{x}$ è un altro punto di minimo in K, applicando l'identità del parallelogrammo ai vettori $\frac{x_0-y}{2}, \frac{\overline{x}-y}{2}$ si trova, essendo $\frac{x_0+\overline{x}}{2} \in K$ e $\|x_0 - y\| = \|\overline{x} - y\| = \lambda$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_0-\overline{x}}{2}\right\|^2 &= -\left\|\frac{x_0+\overline{x}}{2} - y\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_0-y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\overline{x}-y}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq -\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\lambda^2 + \lambda^2\right],\end{aligned}$$

cioè $\overline{x} = x_0$. $\square$

Osservazioni 8.1.2 (1) Se il convesso K *non* è un sottospazio, l'operatore di proiezione P_K *non* è lineare: ad esempio, se $0 \notin K$ si ha $P_K(0) \neq 0$.

(2) Se $x_0 \in K$, allora ovviamente $P_K(x_0) = x_0$; ciò mostra che l'immagine di P_K è esattamente uguale al convesso K.

La proprietà di minimalità della proiezione su un convesso si traduce nella seguente caratterizzazione:

Proposizione 8.1.3 *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso e non vuoto e siano $y, x_0 \in H$. Risulta $x_0 = P_K(y)$ se e solo se x_0 verifica la seguente* disequazione variazionale*:*

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq 0 \qquad \forall x \in K. \end{cases}$$

Dimostrazione Osserviamo preliminarmente che per ogni $x \in H$ si ha

$$\|y - x\|^2 = \|(y - x_0) - (x - x_0)\|^2 = \|y - x_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) + \|x - x_0\|^2,$$

da cui

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) - \|x - x_0\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Ciò premesso, supponiamo che x_0 verifichi la disequazione variazionale; allora da questa e dalla relazione precedente si ottiene

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 0 \qquad \forall x \in K,$$

e dato che $x_0 \in K$ si deduce che $x_0 = P_K(y)$.

Supponiamo viceversa che $x_0 = P_K(y)$; allora per definizione $x_0 \in K$ e

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 0 \qquad \forall x \in K,$$

cosicché, tenendo conto della relazione dimostrata all'inizio, si ricava

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq \|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K.$$

Ora, fissato $x \in K$, poniamo $v = (1-t)x_0 + tx$, con $t \in]0,1]$. Poiché K è convesso, si ha $v \in K$, e sostituendo v al posto di x si ottiene

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, t(x - x_0)) \leq t^2 \|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K,\ \forall t \in]0,1].$$

Quindi, dividendo per t,

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq t\|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K,\ \forall t \in]0,1],$$

e finalmente al limite per $t \to 0^+$ si ottiene che x_0 verifica la disequazione variazionale. □

Corollario 8.1.4 *Sia K un convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert H. Allora la proiezione P_K è un operatore lipschitziano; più precisamente si ha*

$$\|P_K(y) - P_K(z)\| \leq \|y - z\| \qquad \forall y, z \in H.$$

Dimostrazione Poniamo $u = P_K(y), v = P_K(z)$. Per la proposizione 8.1.3 si ha

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathrm{Re}\,(y - u, x - u) \leq 0 \quad \forall x \in K, \end{cases} \qquad \begin{cases} v \in K \\ \mathrm{Re}\,(z - v, x - v) \leq 0 \quad \forall x \in K. \end{cases}$$

Sostituiamo $x = v$ nella prima disequazione e $x = u$ nella seconda: si ottiene

$$\mathrm{Re}\,(y - u, v - u) \leq 0, \qquad \mathrm{Re}\,(v - z, v - u) \leq 0.$$

Sommando le due relazioni abbiamo

$$\mathrm{Re}\,(y - u + v - z, v - u) = \mathrm{Re}\,(y - z, v - u) + \|v - u\|^2 \leq 0,$$

da cui

$$\|v - u\|^2 \leq \mathrm{Re}\,(z - y, v - u) \leq \|z - y\| \cdot \|v - u\|.$$

Se $\|v - u\| = 0$, la tesi è ovvia; altrimenti, semplificando, si trova

$$\|v - u\| \leq \|z - y\|$$

che è la tesi. □

Dunque l'operatore non lineare P_K è lipschitziano su H, con costante di Lipschitz non superiore a 1 (in effetti la costante è esattamente 1 se K contiene almeno due punti distinti, in quanto $P_K(y) = y$ per ogni $y \in K$). Nel caso particolare in cui K è un sottospazio chiuso, vedremo che la proiezione P_K risulta lineare, ed avrà lo stesso significato geometrico di "proiezione ortogonale" che conosciamo nel caso di $\mathbb{R}^N$. Per illustrare questi fatti, premettiamo la seguente

Definizione 8.1.5 *Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio di Hilbert H. L'* ortogonale *di S è l'insieme*

$$S^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0\ \forall y \in S\}.$$

Notiamo che, a causa della linearità e della continuità del prodotto scalare, $S^\perp$ è un sottospazio chiuso di H, comunque sia fatto l'insieme S. Inoltre si ha

$$S \cap S^\perp = \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0 \notin S \\ \{0\} & \text{se } 0 \in S \,: \end{cases}$$

infatti se $x \in S \cap S^\perp$ allora $(x, x) = 0$ e quindi $x = 0$.
La linearità della proiezione su un sottospazio chiuso è conseguenza del seguente risultato:

Teorema 8.1.6 (delle proiezioni) *Sia H uno spazio di Hilbert, sia M un sottospazio chiuso di H. Allora esiste un'unica coppia di operatori $P, Q : H \to H$ tali che:*

(i) *$R(P) = M$ e $R(Q) = M^\perp$;*

(ii) *$x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$;*

(iii) *$x = Px$ per ogni $x \in M$, $x = Qx$ per ogni $x \in M^\perp$;*

(iv) *P e Q sono operatori lineari e continui;*

(v) *se $M \neq \{0\}$ allora $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, e se $M \neq H$ allora $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$.*

Gli operatori P, Q si chiamano proiezioni ortogonali *su M e su $M^\perp$ rispettivamente.*

Ricordiamo che $R(P), R(Q)$ sono le immagini degli operatori P, Q.

Dimostrazione **(i)** Poniamo

$$P(x) = P_M(x), \quad Q(x) = x - P_M(x) \qquad \forall x \in H \,:$$

questa definizione è lecita dato che M è un convesso chiuso non vuoto. Poiché $P_M(x) \in M$ per ogni $x \in H$ e $P_M(x) = x$ per ogni $x \in M$, si ha $R(P) = M$; inoltre per la proposizione 8.1.3 risulta per ogni $x \in H$

$$\operatorname{Re}(x - P(x), z - P(x)) \le 0 \qquad \forall z \in M.$$

Poiché M è un sottospazio, possiamo scegliere $z = P(x) \pm v$, con $v \in M$, ottenendo

$$\operatorname{Re}(x - P(x), \pm v) \le 0 \qquad \forall v \in M,\ \forall x \in H,$$

e dunque

$$\operatorname{Re}(x - P(x), v) = 0 \qquad \forall v \in M,\ \forall x \in H.$$

Sostituendo poi in questa relazione iv al posto di v, troviamo anche

$$\operatorname{Im}(x - P(x), v) = \operatorname{Re}(x - P(x), iv) = 0 \qquad \forall v \in M, \quad \forall x \in H;$$

ne segue

$$(x - P(x), v) = 0 \qquad \forall v \in M, \quad \forall x \in H,$$

ossia $Q(x) = x - P(x) \in M^\perp$ per ogni $x \in H$; in particolare se $x \in M^\perp$ questa relazione implica $(P(x), v) = 0$ per ogni $v \in M$, da cui $P(x) \in M \cap M^\perp$ ossia $P(x) = 0$. Ciò prova che $Q(x) = x$ per ogni $x \in M^\perp$ e pertanto $R(Q) = M^\perp$. Ciò prova (i).

(ii) Evidente per definizione di P e Q.

(iii) Se $x \in M$, allora $x = P_M(x) = P(x)$, mentre se $x \in M^\perp$ si ha, come si è visto, $Q(x) = x$.

(iv) Se $x, y \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha da (ii)

$$\alpha x = \alpha P(x) + \alpha Q(x), \qquad \beta y = \beta P(y) + \beta Q(y),$$

$$\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

da cui, sommando,

$$\alpha P(x) + \alpha Q(x) + \beta P(y) + \beta Q(y) = \alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

cioè

$$\alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = -\alpha Q(x) - \beta Q(y) + Q(\alpha x + \beta y).$$

Ricordando (i), in questa relazione il primo membro appartiene a M ed il secondo membro appartiene a $M^\perp$; essa perciò definisce un elemento di $M \cap M^\perp = \{0\}$. Dunque entrambi i membri sono nulli e questo prova la linearità di P e Q (in particolare, quindi, le proiezioni su sottospazi chiusi sono lineari). Inoltre, poiché $Px \perp Qx$ per ogni $x \in H$, dal teorema di Pitagora (proposizione 7.2.8) segue

$$\|Px\|^2 + \|Qx\|^2 = \|x\|^2 \qquad \forall x \in H,$$

il che mostra che $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ con norme non superiori a 1.

(v) Sappiamo che $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} \le 1$ e $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} \le 1$. Se $M \neq \{0\}$, essendo $Px = x$ per $x \in M$, si ottiene $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. Se $M \neq H$, per $x \in M^\perp$ si ha $Px = 0$ e quindi $Qx = x$: pertanto $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. Ciò prova (v) e conclude la dimostrazione. □

Esercizi 8.1

1. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $u \in H$ con $\|u\| = 1$. Si verifichi che la palla aperta $B(u, 1) = \{x \in H : \|x - u\| < 1\}$ è un convesso non chiuso, privo di elementi di norma minima.

2. Si verifichi che, posto $K = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1\}$, si ha $\min_{f \in K} \|f\|_2 = 1$.

3. Poniamo $K = \{f \in C^0[0,1] : \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1\}$. Si provi che K è un convesso chiuso negli spazi $(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^0[0,1], \|\cdot\|_2)$, privo in entrambi i casi di elementi di norma minima.

4. Poniamo

$$\mathrm{Lip}[a,b] = \left\{ f \in C^0[a,b] : [f]_1 = \sup_{x \neq x'} \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|} < \infty \right\},$$

e sia $K = \{f \in \mathrm{Lip}[0,1] : \|f\|_\infty \leq 4,\ [f]_1 \leq 8,\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1\}$. Si provi che K è un convesso chiuso e non vuoto di $L^2(0,1)$, e che $\min_{f \in K} \|f\|_2 > 1$.

5. Poniamo

$$K_2 = \{f \in L^2(a,b) : \|f\|_2 \leq 1\}, \quad K_\infty = \{f \in L^\infty(a,b) : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Dimostrare che K_2 e K_∞ sono convessi chiusi di $L^2(a,b)$ e determinare esplicitamente le proiezioni P_{K_2} e P_{K_∞}.

6. Poniamo

$$K = \{f \in L^2(a,b) : f \geq 0 \text{ q.o. in } [a,b]\}, \qquad K_0 = K \cap C^0[a,b].$$

(i) Si verifichi che K e K_0 sono sottoinsiemi convessi di $L^2(a,b)$.

(ii) Si provi che K è chiuso in $L^2(a,b)$ e che $K \cap L^\infty(a,b)$ è chiuso in $L^\infty(a,b)$, mentre K_0 è chiuso in $L^\infty(a,b)$ ma non in $L^2(a,b)$.

(iii) Si determini esplicitamente la proiezione P_K.

7. Determinare $M^\perp$ nei casi seguenti:

(i) $M = \{f \in L^2(a,b) : f = \text{costante q.o.}\}$,

(ii) $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ è dispari}\}$,

(iii) $M = \overline{[\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}]} \subseteq L^2(a,b)$

(ove $\overline{[\{f_i\}_{i \in I}]}$ indica il sottospazio chiuso generato dalla famiglia $\{f_i\}_{i \in I}$, cioè la chiusura dell'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi della famiglia).

8. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un'altra σ-algebra.

(i) Si provi che $L^2(X, \mathcal{G}, \mu)$ è un sottospazio chiuso di $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

(ii) Si caratterizzi esplicitamente tale sottospazio nei due casi seguenti:

(a) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$;

(b) $X = [0,1]$, $\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1]\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$.

9. Si provi che le funzioni $1, \cos nx, \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}^+$) sono a due a due ortogonali in $L^2(-\pi, \pi)$.

10. Determinare:

(i) $\min\{\int_{-\pi}^{\pi} |x - a - b \sin x - c \sin^2 x|^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(ii) $\min\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(iii) la proiezione ortogonale del vettore $1 + \sin x + \cos x + \sin^3 x$ sul sottospazio $[\{1, \sin x, \sin 3x\}]$ di $L^2(-\pi, \pi)$.

11. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $S \subseteq H, S \neq \emptyset$. Provare che $S^{\perp\perp} = \overline{[S]}$.

12. Sia $H = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$, e sia $S = \{x \in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0\}$. Provare che S è un sottospazio chiuso di H con $S^{\perp\perp} \neq \overline{[S]}$.
[**Traccia:** si verifichi per induzione che $z \in S^{\perp}$ se e solo se $z_n = \frac{1}{n} z_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e se ne deduca che $S^{\perp} = \{0\}$.]

13. Sia M un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H. Si dimostri che

$$\min_{x \in M} \|x - y\| = \max\{|(z, y)| : z \in M^{\perp}, \|z\| = 1\}.$$

14. Siano $P_1, \ldots, P_n$ proiezioni ortogonali sui sottospazi chiusi $M_1, \ldots, M_n$ di uno spazio di Hilbert H. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $P_i \circ P_j = 0$ se $i \neq j$;

(ii) $M_1, \ldots, M_n$ sono a due a due ortogonali;

(iii) l'operatore $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ è una proiezione ortogonale.

Descrivere in tal caso l'immagine $R(P)$.

15. Siano P_1, P_2 proiezioni ortogonali sui sottospazi chiusi M_1, M_2 di uno spazio di Hilbert H. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $M_1 \subseteq M_2$;

(ii) $P = P_2 - P_1$ è una proiezione ortogonale.

Descrivere in tal caso l'immagine $R(P)$.

16. Sia $B = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} < 1\}$, e consideriamo l'insieme delle funzioni di $L^2(B)$ di tipo *radiale*:

$$R = \{f \in L^2(B) : f(x) = \varphi(|x|_2)\}.$$

(i) Provare che R è un sottospazio chiuso di $L^2(B)$.

(ii) Descrivere il sottospazio $R^{\perp}$.

(iii) Determinare esplicitamente la proiezione ortogonale P_R.

17. Sia H uno spazio di Hilbert, e siano M_1, M_2 due sottospazi chiusi di H con $M_1 \cap M_2 = \{0\}$; poniamo $M_1 + M_2 = \{x + y : x \in M_1, y \in M_2\}$.

(i) Provare che se M_1 e M_2 sono ortogonali, allora $M_1 + M_2$ è un sottospazio chiuso.

(ii) Dimostrare che se H ha dimensione finita allora $M_1 + M_2$ è chiuso.

(iii) Verificare che

$$M_1 = \{x \in \ell^2 : x_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$M_2 = \left\{x \in \ell^2 : x_{2n} = \frac{x_{2n+1}}{2n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

sono sottospazi chiusi di ℓ^2 tali che $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, mentre $M_1 + M_2$ non è un sottospazio chiuso di ℓ^2.

[**Traccia:** per (iii) si mostri che $c_{00} \subset M_1 + M_2 \subset \ell^2$.]

8.2 Il duale di uno spazio di Hilbert

Un'altra somiglianza fra gli spazi di Hilbert e gli spazi euclidei $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ è il fatto che l'insieme dei funzionali lineari e continui su uno spazio di Hilbert H è uno spazio isomorfo ed isometrico ad H stesso. Vale infatti il seguente fondamentale risultato:

Teorema 8.2.1 (di Riesz-Fréchèt) *Sia H uno spazio di Hilbert. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $z \in H$ tale che*

$$Fx = (x, z)_H \qquad \forall x \in H,$$

ed inoltre si ha

$$\|F\|_{H^*} = \|z\|_H.$$

Dimostrazione Sia $F \in H^*$: se $F = 0$, allora scelto $z = 0$ si ha ovviamente la tesi. Supponiamo dunque $F \neq 0$; allora il sottospazio

$$M = \ker F = \{x \in H : Fx = 0\}$$

è chiuso e non coincide con H, cosicché il suo sottospazio ortogonale $M^\perp$ contiene propriamente $\{0\}$. Scegliamo allora un arbitrario elemento $w \in M^\perp \setminus \{0\}$: per ogni $x \in H$ si ha

$$F\left(x - \frac{Fx}{Fw}\, w\right) = 0$$

cioè

$$x - \frac{Fx}{Fw}\, w \in M.$$

Dunque, essendo $w \in M^\perp$,

$$(x - \frac{Fx}{Fw}\, w, w)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

da cui

$$Fx = \frac{Fw}{\|w\|_H^2}(x, w)_H \qquad \forall x \in H;$$

in definitiva, scelto

$$z = \frac{\overline{Fw}}{\|w\|_H^2}\, w\,,$$

risulta

$$Fx = (x, z)_H \qquad \forall x \in H.$$

Da questa relazione segue subito $\|F\|_{H^*} \le \|z\|_H$, mentre dalla definizione di z otteniamo

$$\|z\|_H = \frac{|Fw|}{\|w\|_H} \le \|F\|_{H^*}.$$

Ciò prova che il vettore z ha i requisiti richiesti. Resta da verificare l'unicità di z: se $z' \in H$ è un altro vettore tale che

$$Fx = (x, z')_H \qquad \forall x \in H,$$

allora avremo

$$(x, z - z')_H = Fx - Fx = 0 \qquad \forall x \in H,$$

e scelto $x = z - z'$ otteniamo subito $z = z'$. $\square$

Osservazione 8.2.2 Vi è dunque una isometria bigettiva $j : H \to H^*$, definita da $z \mapsto j_z$, ove j_z è il funzionale definito da

$$j_z(x) = (x, z)_H \qquad \forall x \in H,$$

che rende ogni spazio di Hilbert isomorfo al suo duale. Si noti che j è un operatore *antilineare*, in quanto per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $x, z, z' \in H$ si ha

$$j_{\alpha z + \beta z'}(x) = (x, \alpha z + \beta z')_H = \overline{\alpha}\,(x, z)_H + \overline{\beta}\,(x, z')_H = \overline{\alpha}\, j_z(x) + \overline{\beta}\, j_{z'}(x).$$

Il teorema di Riesz-Fréchèt ha un'importante applicazione, che riguarda un fondamentale risultato di decomposizione e "classificazione" delle misure in termini delle nozioni di assoluta continuità e mutua singolarità introdotte nel paragrafo **??**: il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodým. Si tratta in effetti di due enunciati distinti, che però dimostreremo simultaneamente, cosicché il secondo figurerà come un facile corollario del primo. L'ingrediente basilare sarà il teorema 8.2.1.

Teorema 8.2.3 (di decomposizione di Lebesgue) *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un fissato spazio misurato σ-finito; sia λ un'altra misura definita su $\mathcal{F}$, anch'essa σ-finita. Allora esiste un'unica coppia di misure σ-finite λ_a, λ_s definite su $\mathcal{F}$, tali che*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s\,, \qquad \lambda_a \ll \mu\,, \qquad \lambda_s \perp \mu\,.$$

La coppia (λ_a, λ_s) è chiamata decomposizione di Lebesgue *di λ relativa a μ.*

Dimostrazione Proviamo anzitutto l'unicità della decomposizione. Supponiamo che (λ'_a, λ'_s) sia un'altra decomposizione di λ con $\lambda'_a \ll \mu$ e $\lambda'_s \perp \mu$; dobbiamo provare che $\lambda_a(E) = \lambda'_a(E)$ e $\lambda_s(E) = \lambda'_s(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, e a questo scopo, ricordando la proposizione 2.1.5, è sufficiente provare che tali relazioni valgono per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\lambda(E) < \infty$. Poiché, per ipotesi, $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$, si ha

$$\lambda_a(E) - \lambda'_a(E) = \lambda'_s(E) - \lambda_s(E) \qquad \forall E \in \mathcal{F} \text{ con } \lambda(E) < \infty.$$

Consideriamo gli insiemi B, A_s, A'_s dove sono concentrate rispettivamente le misure $\mu, \lambda_s, \lambda'_s$: a causa della mutua singolarità, deve essere $B \cap (A_s \cup A'_s) = \emptyset$. Di conseguenza per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\lambda(E) < \infty$ risulta:

$$\mu(E) = \mu(E \cap B), \qquad \mu(E \setminus B) = 0;$$

$$\lambda_s(E \cap B) = \lambda'_s(E \cap B) = 0, \qquad \lambda_a(E \cap B) = \lambda'_a(E \cap B).$$
$$\lambda_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E \setminus B) = 0, \qquad \lambda_s(E \setminus B) = \lambda'_s(E \setminus B);$$

Ne segue, usando l'additività delle misure,

$$\lambda_a(E) = \lambda_a(E \cap B) + \lambda_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E \cap B) + \lambda'_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E),$$

e similmente si ottiene $\lambda_s(E) = \lambda'_s(E)$. Ciò prova l'unicità della decomposizione.

Passiamo alla dimostrazione dell'esistenza, supponendo dapprima che λ sia finita. Osserviamo anzitutto che esiste una funzione $w \in L^1(X, \mu)$ tale che $0 < w(x) < 1$ per ogni $x \in X$. Infatti, usando la σ-finitezza di X, se $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ con gli X_n disgiunti e tali che $\mu(X_n) < \infty$, basta porre

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x), \qquad \text{ove} \quad w_n(x) = \frac{2^{-n-1}}{1 + \mu(X_n)} \chi_{X_n}(x).$$

L'utilità di w sta nel fatto che la misura $E \mapsto \int_E w \, d\mu$ ha esattamente gli stessi insiemi di misura nulla che ha μ, ma è finita anziché σ-finita come μ.
Definiamo una misura ausiliaria ν nel modo seguente:

$$\nu(E) = \lambda(E) + \int_E w \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F};$$

ν è una misura finita su $\mathcal{F}$.
Il modo in cui è definita ν suggerisce che gli integrali rispetto alla misura ν si rappresentino come somma di due opportuni integrali rispetto a λ e μ; in effetti si dimostra la seguente relazione, fondamentale per noi, che vale per ogni funzione $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa:

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\lambda + \int_X f w \, d\mu.$$

Infatti, per definizione di ν la relazione vale per tutte le funzioni semplici $\mathcal{F}$-misurabili; il passaggio alle arbitrarie funzioni $\mathcal{F}$-misurabili e non negative si ottiene in virtù dell'osservazione 3.1.8 e del teorema di B. Levi.

Sia ora $f \in L^2(X,\nu)$; poiché $\lambda \le \nu$ si ha, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 7.2.2),

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\lambda\right| &\le \int_X |f|\,d\nu = (|f|,1)_{L^2(X,\nu)} \le \\ &\le \|f\|_{L^2(X,\nu)}\|1\|_{L^2(X,\nu)} = \|f\|_{L^2(X,\nu)}\sqrt{\nu(X)}.\end{aligned}$$

Dunque il funzionale lineare $Tf = \int_X f\,d\lambda$ è continuo su $L^2(X,\nu)$, cioè è un elemento di $(L^2(X,\nu))^*$. Per il teorema di Riesz-Fréchèt (caso di uno spazio di Hilbert reale), esiste un'unica $g \in L^2(X,\nu)$ tale che

$$\int_X f\,d\lambda = Tf = (f,g)_{L^2(X,\nu)} = \int_X fg\,d\nu \qquad \forall f \in L^2(X,\nu).$$

Proviamo che si ha $0 \le g(x) \le 1$ ν-q.o. in X. Scegliendo $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{F}$ tale che $\nu(E) > 0$ (scelta lecita perché f è limitata e quindi sta in $L^2(X,\nu)$ essendo ν finita), troviamo

$$\lambda(E) = T\chi_E = \int_E g\,d\nu$$

da cui, dividendo per $\nu(E)$,

$$0 \le \frac{1}{\nu(E)}\int_E g\,d\nu = \frac{\lambda(E)}{\nu(E)} \le 1.$$

Se, per assurdo, fosse $\nu(\{x \in X : g(x) > 1\}) > 0$, dalla relazione

$$\{x \in X : g(x) > 1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+}\left\{x \in X : g(x) > 1 + \frac{1}{k}\right\}$$

segue che esisterebbe $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $\nu(\{x \in X : g(x) > 1 + 1/k\}) > 0$; prendendo come E questo insieme, otterremmo

$$1 + \frac{1}{k} \le \frac{1}{\nu(E)}\int_E g\,d\nu \le 1,$$

il che è assurdo. Similmente si prova la disuguaglianza $g \ge 0$. Modificando eventualmente g su un insieme di misura ν nulla, possiamo supporre che sia

$$0 \le g(x) \le 1 \qquad \forall x \in X.$$

Osserviamo adesso che dalla definizione dell'operatore T, nonché dalla formula di rappresentazione degli integrali rispetto a ν precedentemente dimostrata, si ricava

$$\int_X f\,d\lambda = Tf = \int_X fg\,d\nu = \int_X fg\,d\lambda + \int_X fgw\,d\mu \quad \forall f \in L^2(X,\nu),\ f \ge 0,$$

da cui

$$\int_X (1-g)f\,d\lambda = \int_X fgw\,d\mu \qquad \forall f \in L^2(X,\nu),\ f \ge 0.$$

Poniamo $A = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\}$ e $B = \{x \in X : g(x) = 1\}$, e definiamo finalmente

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A), \qquad \lambda_s(E) = \lambda(E \cap B) \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Scegliendo $f = \chi_B$ nella relazione precedente, si ottiene

$$0 = \int_B (1-g)\, d\lambda = \int_B w\, d\mu,$$

da cui, per la proprietà di w già osservata, $\mu(B) = 0$. Dato che λ_s è concentrata su B, ne segue che $\lambda_s \perp \mu$.
Scegliendo invece nella relazione precedente $f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_E$, con $E \in \mathcal{F}$, otteniamo

$$\int_E (1 - g^{n+1})\, d\lambda = \int_E g(1 + g + \cdots + g^n) w\, d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

per $n \to \infty$, in virtù del teorema di B. Levi l'uguaglianza precedente diventa

$$\lambda(E \cap A) = \int_E \frac{gw}{1-g}\, d\mu.$$

Dunque, posto $h = \frac{gw}{1-g}$, la funzione h è non negativa ed appartiene a $L^1(X, \mu)$ (come si vede scegliendo $E = X$ e ricordando che λ è una misura finita); di conseguenza si trova

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) = \int_E h\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

In virtù della proposizione 4.4.9, si conclude che $\lambda_a \ll \mu$. La tesi è dimostrata nel caso in cui la misura λ sia finita.
Supponiamo adesso che λ sia σ-finita. In questo caso esiste una successione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ con queste proprietà: gli X_n sono disgiunti, $\lambda(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\lambda_n(E) = \lambda(E \cap X_n) \qquad \forall E \in \mathcal{F}:$$

le misure λ_n sono finite. Per quanto già dimostrato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\lambda_n = \lambda_{an} + \lambda_{sn}$, ove $\lambda_{an} \ll \mu$ e $\lambda_{sn} \perp \mu$; inoltre esiste una funzione $h_n \in L^1(X_n, \mu)$ non negativa, tale che

$$\lambda_{an}(E) = \int_E h_n\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F},\ E \subseteq X_n\,.$$

Utilizzando ancora una volta il teorema di B. Levi è facile allora riconoscere che, posto

$$\lambda_a = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{an}\,, \qquad \lambda_s = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{sn}\,,$$

le funzioni λ_a e λ_s sono misure σ-finite tali che

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \lambda_a \ll \mu, \qquad \lambda_s \perp \mu,$$

e in particolare. posto $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$, la funzione h è misurabile, non negativa e si ha

$$\lambda_a(E) = \int_X h\,d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

La tesi è completamente dimostrata. $\square$

Corollario 8.2.4 (teorema di Radon-Nikodým) *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito; sia λ un'altra misura definita su $\mathcal{F}$, anch'essa σ-finita. Allora si ha $\lambda \ll \mu$ se e solo se esiste una funzione $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa h tale che*

$$\lambda(E) = \int_E h\,d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Dimostrazione **($\Longleftarrow$)** È la proposizione 4.4.9.

($\Longrightarrow$) Poiché $\lambda \ll \mu$, per il teorema 8.2.3 la decomposizione di Lebesgue di λ rispetto a μ è necessariamente data, per unicità, da $\lambda = \lambda + 0$. Dalla dimostrazione del teorema 8.2.3 segue che esiste una funzione non negativa e misurabile h per cui si ha

$$\lambda(E) = \int_E h\,d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

il che prova la tesi. Osserviamo che nel caso in cui λ è finita la funzione h risulta μ-sommabile su X. $\square$

Esercizi 8.2

1. Sia H uno spazio di Hilbert, sia M un sottospazio di H; sia inoltre F un funzionale lineare e continuo su M. Provare che esiste un unico funzionale $\overline{F}$ lineare e continuo su H, tale che

$$\overline{F}|_M = F, \qquad \|\overline{F}\|_{H^*} = \|F\|_{M^*}.$$

2. Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $F : H \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare non continuo. Si provi che $\ker F$ è denso in H.
[**Traccia:** sia $\{y_n\}$ tale che $\|y_n\| \to 0$ e $Fy_n = 1$; se $z \in (\ker F)^\perp$, si provi che $\frac{z}{Fz} - y_n \in \ker F$ e se ne deduca che $z = 0$.]

3. Sia H uno spazio di Hilbert. Fissato $T \in \mathcal{L}(H)$, si verifichi che la relazione

$$(Sx, y)_H = (x, Ty)_H \quad \forall x, y \in H$$

definisce univocamente un operatore $S : H \to H$ lineare e limitato, e che risulta $\|S\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. L'operatore S si dice *aggiunto* di T e si denota con T^*.

4. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore *autoaggiunto*, ossia tale che

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H;$$

supponiamo inoltre che esista $c > 0$ per cui risulti $\|Tx\| \geq c\|x\|$ per ogni $x \in H$. Provare che T è bigettivo e T^{-1} è continuo.

5. Sia H uno spazio di Hilbert. Si provi che un operatore $P \in \mathcal{L}(H)$ è una proiezione ortogonale se e solo se si ha $P^2 = P$ e P è autoaggiunto (secondo la definizione fornita nell'esercizio precedente).

6. Sia H uno spazio di Hilbert. Se $A \in \mathcal{L}(H)$, detto A^* l'aggiunto di A introdotto nell'esercizio 8.2.3, si provi che:

   (i) $\|A \circ A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A^* \circ A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H)}$;

   (ii) Se A è autoaggiunto, allora $\|A^n\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^n_{\mathcal{L}(H)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

7. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore autoaggiunto e *positivo*, ossia tale che $(Ax, x) \geq 0$ per ogni $x \in H$. Si provi che
$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)} \qquad \forall x, y \in H,$$
e che se A è *strettamente positivo*, ossia $(Ax, x) > 0$ per ogni $x \in H \setminus \{0\}$, allora $(x, y)_1 = (Ax, y)$ definisce un prodotto scalare in H.

8.3 Sistemi ortonormali

In $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$, come sappiamo, ogni elemento x si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una fissata base. Vediamo se è possibile trovare una proprietà analoga negli spazi di Hilbert.

Definizione 8.3.1 *Una famiglia* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *di elementi di uno spazio di Hilbert* H *si chiama* sistema ortonormale *se si ha*
$$(e_\alpha, e_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & se \quad \alpha = \beta \\ 0 & se \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in A.$$

Vediamo qualche esempio.

Esempi 8.3.2 (1) Fissato $e \in H$ con $\|e\| = 1$, l'insieme $\{e\}$ costituisce un sistema ortonormale in H.

(2) $\{e_1, \dots, e_N\}$ è un sistema ortonormale in $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$.

(3) In ℓ^2 un sistema ortonormale è dato dalla famiglia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ove e_n è l'elemento con tutte le componenti nulle tranne la n-sima che vale 1.

(4) Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ e se f è pari e g è dispari, con $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, allora $\{f, g\}$ è un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

(5) Il *sistema trigonometrico*
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\ ;\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$
è un sistema ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ (esercizio 8.1.9).

(6) In $L^2(a, b)$ esistono altri sistemi ortonormali: vedere ad esempio gli esercizi 8.3.10 e 8.3.12.

Osservazione 8.3.3 Se H è separabile, allora ogni sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è costituito al più da un'infinità numerabile di elementi. Infatti si ha

$$\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2} \qquad \forall \alpha \neq \beta,$$

e dunque le palle $B(e_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}})$ son tutte disgiunte. Sia D un insieme numerabile denso in H: poiché ogni palla $B(e_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}})$ non può contenere elementi di D diversi da e_α, si conclude che A è al più numerabile.

Esempio 8.3.4 Costruiamo uno spazio di Hilbert non separabile. Sia

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \text{ è numerabile}\},$$

e poniamo

$$H = \left\{ f \in E : \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty \right\} :$$

la definizione ha senso perché la somma è fatta al più su un'infinità numerabile di punti, la serie è a termini positivi e l'ordine degli addendi è irrilevante. L'insieme H è dotato del prodotto scalare

$$(f, g) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)},$$

il quale ha senso perché tale somma costituisce una serie assolutamente convergente. Lo spazio H è di Hilbert, come è facile verificare; esso non è separabile perché possiede il sistema ortonormale $\{\chi_{\{x\}}\}_{x\in\mathbb{R}}$, il quale è più che numerabile. Si noti che H coincide con $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \nu)$, ove ν è la misura "cardinalità" e

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A, \text{ oppure } A^c, \text{ è numerabile}\}.$$

Veniamo alla proprietà fondamentale dei sistemi ortonormali, ossia la disuguaglianza di Bessel. Premettiamo un po' di terminologia.

Definizione 8.3.5 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in H. Se $x \in H$, i numeri $(x, e_\alpha)_H$ si chiamano* coefficienti di Fourier *di x relativi al sistema $\{e_\alpha\}$. La serie $\sum_{\alpha\in A}(x, e_\alpha)_H\, e_\alpha$ (la quale, come si vedrà nell'osservazione 8.3.7(1), contiene al più un'infinità numerabile di termini) si chiama* serie di Fourier *di x relativa al sistema $\{e_\alpha\}$.*

A priori non sappiamo dire se la serie di Fourier di un elemento $x \in H$ converga, né, tantomeno, se essa converga proprio a x come sarebbe lecito aspettarsi.

Proposizione 8.3.6 (disuguaglianza di Bessel) *Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert H. Allora*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} |(x, e_{\alpha_i})_H|^2 : N \in \mathbb{N}^+, \alpha_1, \dots \alpha_N \in A \right\} \leq \|x\|_H^2 \qquad \forall x \in H.$$

Dimostrazione Per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e per ogni N-pla di indici distinti $\alpha_1, \dots \alpha_N$ si ha, grazie all'ortonormalità di $\{e_\alpha\}$,

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|_H^2 = \\
&= \|x\|_H^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(x, \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})_H \, e_{\alpha_i} \right)_H + \left\| \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})_H \, e_{\alpha_i} \right\|_H^2 = \\
&= \|x\|_H^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{N} \overline{(x, e_{\alpha_i})_H} \, (x, e_{\alpha_i})_H + \sum_{i,j=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})_H \, \overline{(x, e_{\alpha_j})_H} \, \delta_{ij} = \\
&= \|x\|_H^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} |(x, e_{\alpha_i})_H|^2 + \sum_{i=1}^{N} |(x, e_{\alpha_i})_H|^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} |(x, e_{\alpha_i})_H|^2 .
\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. □

Osservazioni 8.3.7 (1) Se lo spazio H non è separabile, dato un qualunque sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è facile verificare che per ogni $x \in H$ l'insieme degli indici $\alpha \in A$ tali che $(x, e_\alpha)_H \neq 0$ è al più numerabile: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $\{\alpha \in A : |(x, e_\alpha)_H| > 1/k\}$ è finito in virtù della disuguaglianza di Bessel.

(2) Dalla disuguaglianza di Bessel e da (1) segue che la serie di Fourier di un generico $x \in H$, relativa a un qualunque sistema ortonormale, converge in H; infatti con un conto del tutto analogo a quello svolto nella dimostrazione precedente si verifica che, detti α_n gli indici tali che $(x, e_{\alpha_n})_H \neq 0$ e posto $w_N = \sum_{n=0}^{N} (x, e_{\alpha_n})_H \, e_{\alpha_n}$, si ha

$$\|w_N - w_M\|_H^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |(x, e_{\alpha_n})_H|^2 \qquad \forall N, M \in \mathbb{N} \text{ con } N > M,$$

e dunque $\{w_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, essendo una successione di Cauchy, converge in H. Non è detto che la somma della serie di Fourier di x sia proprio x: basta pensare al caso banale di un sistema ortonormale costituito da un solo elemento.

Definizione 8.3.8 *Un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ in uno spazio di Hilbert H si dice* completo *se $\overline{[\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}]} = H$, ossia se le combinazioni lineari finite di elementi di $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sono dense in H.*

In altre parole, un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è completo se e solo se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$: ciò è facile conseguenza del teorema delle proiezioni (teorema 8.1.6). Vediamo alcuni esempi di sistemi ortonormali completi.

Esempi 8.3.9 (1) Il sistema $\{e_1, \dots, e_N\}$ è completo in $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$.

(2) Il sistema $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è completo in ℓ^2.

(3) Il sistema trigonometrico è completo in $L^2(\pi, \pi)$ (esercizio 8.3.3).

(4) I *polinomi di Legendre*, definiti da

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N},$$

costituiscono un sistema ortonormale in $L^2(-1,1)$ (esercizio 8.3.10); esso è anche completo. Ciò segue dalla densità dei polinomi in $C^0[-1,1]$ (esercizio 4.6.10) e dalla densità di $C^0[-1,1]$ in $L^2(-1,1)$ (proposizione 4.6.3 ed osservazione 4.6.4).

(5) I *polinomi di Hermite*, definiti da

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\, e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+,$$

formano un sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$ (esercizio 8.3.11).

Proposizione 8.3.10 *Ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$ ha un sistema ortonormale completo.*

Dimostrazione Faremo uso del *lemma di Zorn.* Ricordiamo che un *ordinamento parziale* $\leq$ su un insieme P è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva, e si dice che $(P, \leq)$ è un insieme *parzialmente ordinato.* Un sottoinsieme Q di P si dice *totalmente ordinato* se per ogni $a, b \in Q$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$. Un elemento $c \in P$ è un *maggiorante* per Q se si ha $q \leq c$ per ogni $q \in Q$, e un elemento $m \in P$ è *massimale* se non esiste alcun $x \in P$, diverso da m, tale che $m \leq x$ (ossia, se $x \in P$ e $m \leq x$ implica $x = m$). Ciò posto, vale questo risultato che non dimostriamo:

Lemma 8.3.11 (di Zorn) *Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Se ogni sottoinsieme totalmente ordinato Q di P ha un maggiorante in P, allora in P esiste un elemento massimale.* □

Prendiamo ora

$$P = \{B \subset H : B \text{ è un sistema ortonormale in } H\} :$$

chiaramente P è un insieme non vuoto che è parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione $\subseteq$. Verifichiamo le ipotesi del lemma di Zorn. Se Q è un sottoinsieme totalmente ordinato di P, verifichiamo che l'insieme $B_0 = \bigcup_{B\in Q} B$ è un elemento di P che è maggiorante per Q: per cominciare, ogni $e \in B_0$ ha norma unitaria, in quanto è membro di un certo sistema ortonormale $B \in Q$. Poi, se $e, e' \in B_0$ ed $e \neq e'$, allora sarà $e \in B$ ed $e' \in B'$ per certi $B, B' \in Q$; dato che Q è totalmente ordinato, sarà ad esempio $B \subseteq B'$. Ma allora avremo $e, e' \in B'$ e quindi, per l'ortonormalità del sistema B', risulterà $(e, e')_H = 0$. Ciò prova che B_0 è un sistema ortonormale in H; dunque B_0 è un elemento di P. D'altronde è chiaro per definizione di B_0 che $B \subseteq B_0$ per ogni $B \in Q$, cosicché B_0 è un maggiorante di Q.
Per il lemma di Zorn, deduciamo che in P esiste un elemento massimale $\overline{B}$; proviamo che il sistema ortonormale $\overline{B}$ è completo. Se così non fosse, esisterebbe $x \in \overline{B}^{\perp} \setminus \{0\}$, e quindi $\overline{B} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ sarebbe un sistema ortonormale, cioè un elemento di P, che contiene strettamente $\overline{B}$, contraddicendo la massimalità di $\overline{B}$. □

La proposizione che segue caratterizza i sistemi ortonormali completi.

Proposizione 8.3.12 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in H. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) $\{e_\alpha\}$ *è completo;*

(ii) $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$*;*

(iii) *vale l'*uguaglianza di Bessel

$$\|x\|_H^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)_H|^2 \qquad \forall x \in H;$$

(iv) *vale l'*identità di Parseval

$$(x, y)_H = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)_H \, \overline{(y, e_\alpha)_H} \qquad \forall x, y \in H;$$

(v) *per ogni $x \in H$ la serie di Fourier di x, cioè $\sum_{\alpha\in A}(x, e_\alpha)_H \, e_\alpha$, converge in H ed ha somma x.*

Ricordiamo che in virtù dell'osservazione 8.3.7 le serie che compaiono nell'enunciato contengono al più un'infinità numerabile di termini.

Dimostrazione **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)** Lo sappiamo già, come osservato subito dopo la definizione 8.3.8.

(ii) $\Longleftrightarrow$ **(v)** Se vale (v) e $x \perp \{e_\alpha\}$, allora

$$x = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)_H \, e_\alpha = \sum_{\alpha\in A} 0 \cdot e_\alpha = 0.$$

Viceversa, supponiamo che valga (ii). Dall'osservazione 8.3.7 segue che la serie di Fourier di x converge in H ad un certo elemento w; si tratta di verificare che $w = x$. Ma per ogni fissato $\beta \in A$ si ha, in virtù della continuità del prodotto scalare,

$$(w, e_\beta)_H = \left(\sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)_H \, e_\alpha, e_\beta \right)_H = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)_H \, (e_\alpha, e_\beta)_H = (x, e_\beta)_H,$$

da cui, per l'arbitrarietà di β, otteniamo $w - x \in \{e_\alpha\}^\perp$; per (ii), ciò significa $w - x = 0$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ **(v)** Questa doppia implicazione è immediata conseguenza della seguente uguaglianza che già conosciamo: per ogni $x \in H$, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$ si ha

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_{\alpha_n})_H \, e_{\alpha_n} \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x, e_{\alpha_n})_H|^2.$$

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) Se vale (iv), allora basta scegliere $y = x$ per ottenere (iii). Viceversa, se vale (iii), possiamo scrivere

$$\|x+y\|_H^2 = \|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y)_H$$

ed anche

$$\begin{aligned} \|x+y\|_H^2 &= \sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)_H + (y,e_\alpha)_H|^2 = \\ &= \sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)_H|^2 + \sum_{\alpha\in A} |(y,e_\alpha)_H|^2 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)_H \overline{(y,e_\alpha)_H}, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{Re}\,(x,y)_H = \mathrm{Re} \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)_H \overline{(y,e_\alpha)_H}.$$

In modo analogo, considerando $x + iy$ in luogo di $x + y$, si ricava

$$\mathrm{Im}\,(x,y)_H = \mathrm{Im} \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)_H \overline{(y,e_\alpha)_H}.$$

Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Esercizi 8.3

1. (*Proprietà di miglior approssimazione*) Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert H; fissati $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$, sia $M = [\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_N}\}]$. Si provi che

$$P_M x = \sum_{n=1}^N (x, e_{\alpha_n})_H \, e_{\alpha_n}\,.$$

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$P_n(t) = k_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n, \qquad t \in [-\pi,\pi],$$

ove k_n è una costante scelta in modo che $\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t)dt = 1$. Si provi che:

(i) P_n è un polinomio trigonometrico di grado n, ossia è combinazione lineare delle $2n+1$ funzioni $1, \cos kx, \sin kx$, $1 \le k \le n$, ed è strettamente positivo in $]-\pi,\pi[$;

(ii) risulta

$$k_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt} \le \frac{n+1}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\delta\le|t|\le\pi} P_n(t) = 0 \qquad \forall \delta \in]0,\pi[;$$

(iii) se f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione

$$f_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)P_n(s)ds, \qquad t \in [-\pi, \pi],$$

è un polinomio trigonometrico di grado al più n;

(iv) si ha $f_n \to f$ uniformemente in $[-\pi, \pi]$ per $n \to \infty$.

3. Si provi che il sistema trigonometrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ ;\ n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

o, equivalentemente, il sistema

$$\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}};\ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

è ortonormale completo in $L^2(-\pi, \pi)$.
[**Traccia:** si provi che i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio $C_0^0[-\pi, \pi]$, e quindi anche in $L^2(-\pi, \pi)$, facendo uso dell'esercizio precedente.]

4. Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Si verifichi che la serie di Fourier di f (relativa al sistema trigonometrico) si può scrivere nei due modi equivalenti

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

ove

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \; ds, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \; ds \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Si verifichi inoltre che $a_0 = 2\gamma_0$, $a_n = \gamma_n + \gamma_{-n}$, $b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

5. Posto

$$P = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f \text{ è pari}\}, \quad D = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f \text{ è dispari}\},$$

si provi che P e D sono sottospazi chiusi di $L^2(-\pi, \pi)$ tali che $P = D^\perp$.

6. Provare che i sistemi

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \qquad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

sono entrambi ortonormali e completi in $L^2(0, \pi)$.
[**Traccia:** per la completezza si prolunghi una $f \in L^2(0, \pi)$, ortogonale a tutti gli elementi di uno dei due sistemi, in modo pari oppure dispari su $]-\pi, \pi[$. . . .]

7. Si scriva la serie di Fourier (relativa al sistema trigonometrico) di

$$f(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2}\right)^2, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

si provi che tale serie converge uniformemente e se ne deduca che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

8. Fissata $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la si prolunghi a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. Posto, per ogni $g \in L^2(-\pi, \pi)$,

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

si provi che $f \star g$ è continua e che la sua serie di Fourier, relativa al sistema $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

9. Sia $f \in AC[-\pi, \pi]$ tale che $f(-\pi) = f(\pi)$, e per ogni $k \in \mathbb{Z}$ poniamo $\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds$. Si provi che:

   (i) $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ se e solo se $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|\gamma_k|^2 < \infty$;

   (ii) in tal caso la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt}$ converge assolutamente ed uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$;

   (iii) tale serie è inoltre derivabile termine a termine, e la serie delle derivate converge a f' in $L^2(-\pi, \pi)$.

10. Si verifichi che il sistema dei polinomi di Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N},$$

è ortonormale in $L^2(-1, 1)$.

11. Si provi che il sistema dei polinomi di Hermite

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n\sqrt{\pi}}}\ e^{x^2}\ \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+,$$

è ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$.
[**Traccia:** si osservi che $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$, e si utilizzi la densità dei polinomi nello spazio $C^0[a, b]$ per ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$.]

12. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\psi_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $\psi_n(x) = (-1)^{[2^n x]}$, ove $[a]$ denota la parte intera di a. Dimostrare che:

(i) $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$;

(ii) il sistema non è completo perché la funzione $g = 1 - 2\chi_{[1/4,3/4]}$ è ortogonale a tutte le ψ_n;

(iii) risulta
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \psi_n(t)f(t)\ dt = 0 \qquad \forall f \in L^1(0,1).$$

13. Siano $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due sistemi ortonormali completi in $L^2(a,b)$ e $L^2(c,d)$ rispettivamente. Provare che il sistema $\{f_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, ove
$$f_{nm}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_m(y), \qquad (x,y) \in]a,b[\times]c,d[,$$
è ortonormale completo in $L^2(]a,b[\times]c,d[)$.

14. Sia V il sottospazio di ℓ^2 generato dagli elementi $x = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ e $y = \{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$; determinare un sistema ortonormale in V.

15. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormale completo in H. Per ogni $h \in \mathbb{N}^+$ poniamo
$$M_h = \left\{ x \in H : \ \exists c > 0 : \ |(x, e_n)_H| \le \frac{c}{n^h} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$
$$K_h = \left\{ x \in H : \ |(x, e_n)_H| \le \frac{1}{n^h} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(a) Verificare che:

(i) K_h è un convesso chiuso contenuto in M_h e $K_h \supset K_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}^+$;

(ii) M_h è un sottospazio denso in H e $M_h \supset M_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}^+$.

(b) Caratterizzare il convesso $K = \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h$ e provare che il sottospazio $M = \bigcap_{h=1}^{\infty} M_h$ è denso in H.

(c) Scrivere esplicitamente gli operatori P_{K_h}, $h \in \mathbb{N}^+$, e P_K.

16. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormale completo in H; si definisca
$$M = \left\{ x \in H : (x, e_{n+2})_H = \frac{1}{2}(x, e_n)_H \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(i) Si verifichi che M è un sottospazio finito-dimensionale di H.

(ii) Si trovi una base di M.

(iii) Si determini la proiezione ortogonale P_M.

17. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di H fra loro ortogonali, e tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sia convergente in H. Si dimostri che

per ogni permutazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie riordinata $\sum_{n=0}^{\infty} v_{\sigma(n)}$ è convergente e che si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ .$$

Cosa succede se si toglie l'ipotesi $(v_n, v_m)_H = 0$ per $n \neq m$?

18. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e siano $\{e_n\}, \{f_m\}$ sistemi ortonormali completi in H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, si provi che $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge se e solo se $\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$ converge (T^* è definito nell'esercizio 8.2.3), e che in tal caso le somme delle due serie coincidono con $\sum_{n,m=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2$.

19. Sia H uno spazio di Hilbert separabile, e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un *operatore di Hilbert-Schmidt*, ossia tale che esista un sistema ortonormale completo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in H per cui $\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 < \infty$. Dimostrare che:

    (i) l'operatore A^* (definito nell'esercizio 8.2.3) è di Hilbert-Schmidt;

    (ii) per ogni sistema ortonormale completo $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in H risulta

    $$\sum_{m=0}^{\infty} \|Af_m\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 < \infty;$$

    (iii) la famiglia degli operatori di Hilbert-Schmidt su H è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare

    $$(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} (Sh_j, Th_j)_H \ ,$$

    ove $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un arbitrario sistema ortonormale completo in H;

    (iv) il prodotto scalare sopra definito non dipende dalla scelta del sistema ortonormale, ossia per ogni coppia di sistemi ortonormali completi $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si ha

    $$\sum_{m=0}^{\infty} (Sf_m, Tf_m)_H = \sum_{k=0}^{\infty} (Sg_k, Tg_k)_H.$$

    [**Traccia:** per (ii) si osservi che $(A^*)^* = A$ e si utilizzi l'esercizio precedente; per (iv) si faccia uso di (ii) e dell'identità del parallelogrammo.]

20. **(i)** Fissato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si verifichi che

    $$\lim_{n\to\infty} \int_F \sin nx \ dx = \lim_{n\to\infty} \int_F \cos nx \ dx = 0$$

    per ogni sottoinsieme misurabile F di $[a, b]$.

    (ii) Sia $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di numeri naturali; posto

    $$E = \{x \in [a, b] : \exists \lim_{k\to\infty} \sin n_k x = \lambda(x)\},$$

    si provi che $\lambda(x) = 0$ q.o. in E.

(iii) Si deduca che
$$\lim_{k\to\infty}\int_E \sin^2 n_k x\; dx = 0.$$
(iv) Si concluda che risulta $m(E) = 0$.

8.4 Trasformata di Fourier

Vogliamo descrivere brevemente un operatore che è di fondamentale importanza in analisi ed in molti settori della matematica applicata: la trasformata di Fourier. Si tratta di uno strumento utilissimo, ad esempio, per trovare soluzioni esplicite di molte equazioni differenziali alle derivate parziali; interi capitoli dell'analisi numerica sono dedicati allo studio di algoritmi e procedure legati alla struttura di questo operatore e delle sue versioni "discrete". Noi ci limiteremo allo studio delle sue proprietà basilari, senza troppi approfondimenti.

Definizione 8.4.1 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. La* trasformata di Fourier *di f è la funzione $\widehat{f}$ così definita:*
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(x,\xi)}\, dm_N(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$
dove (x, ξ) è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. L'operatore $f \mapsto \widehat{f}$ si indica con $\mathcal{F}$.

La funzione $\widehat{f}$ è dunque a valori complessi, anche se f è reale; ma in questo contesto è naturale prendere anche f a valori complessi. Ricordiamo che l'integrale per funzioni complesse è stato introdotto nell'esempio 7.2.6 (4) ed è soggetto alle usuali regole di calcolo. Calcoliamo la trasformata di Fourier in qualche caso significativo.

Esempi 8.4.2 **(1)** Sia $N = 1$ e $f = \chi_{[-1,1]}$: allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\, dx = \left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{i}{\xi}\left(e^{-i\xi} - e^{i\xi}\right) = 2\,\frac{\sin\xi}{\xi}.$$
Si osservi che $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$: quindi l'operatore $\mathcal{F}$ non preserva la sommabilità delle funzioni.

(2) Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-a|x|^2}$, con $a > 0$ fissato: si ha
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} e^{-i(x,\xi)}\, dm_N(x) = \prod_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_j^2 - ix_j\xi_j}\, dx_j \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$
quindi ci si riduce a
$$\widehat{f}(\xi) = [g(\xi)]^N,$$
ove
$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Per calcolare $g(\xi)$ osserviamo che, utilizzando il teorema 4.3.4 ed integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2-ix\xi}\,dx = \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\ e^{-ax^2}\ e^{-ix\xi}\,dx = \\ &= \frac{i}{2a}\left[e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\xi}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix\xi}\,dx = -\frac{\xi}{2a}g(\xi). \end{aligned}$$

L'equazione differenziale $g'(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\ g(\xi)$ ha le soluzioni $g(\xi) = ke^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, con $k \in \mathbb{R}$; d'altra parte per l'esercizio 5.3.2 si ha

$$k = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,$$

cosicché

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix\xi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ed in definitiva

$$\widehat{f}(\xi) = [g(\xi)]^N = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Proposizione 8.4.3 *La trasformata di Fourier è un operatore lineare e continuo da $L^1(\mathbb{R}^N)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, con norma uguale a 1. Inoltre per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ la funzione $\widehat{f}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$ e verifica*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Dimostrazione Dalla definizione segue subito

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

e dunque $F \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ con $\|F\| \le 1$. D'altra parte scegliendo $f(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ si ha, ricordando l'esempio 8.4.2 (2),

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)^N = (2\pi)^{\frac{N}{2}} = \|\widehat{f}\|_\infty\ ,$$

e dunque $\|\mathcal{F}\| = 1$.
Proviamo l'uniforme continuità. Se $h \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)| &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[e^{-i(x,h)} - 1]e^{-i(x,\xi)}\,dm_N(x)\right| = \\ &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \left|\mathcal{F}([e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot))(\xi)\right| = \|\mathcal{F}([e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \\ &\le \|[e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\ , \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $|h| \to 0$, in virtù del teorema di convergenza dominata (teorema 4.3.4).
Proviamo infine che $\widehat{f}(\xi)$ tende a 0 per $|\xi| \to \infty$. Osservando che

$$e^{-i\pi\frac{(\xi,\xi)}{|\xi|^2}} = -1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

posto $v_\xi = -\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ ed effettuando il cambiamento di variabile $x - v_\xi = y$, possiamo scrivere

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2},\xi)}\, dm_N(x) = -\int_{\mathbb{R}^N} \tau_{v_\xi} f(y) e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y),$$

ove $\tau_{v_\xi} f(y) = f(y + v_\xi)$; ne segue

$$|2\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(y) - \tau_{v_\xi} f(y)] e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y) \right| \le \|f - \tau_{v_\xi} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,.$$

Se ora $|\xi| \to \infty$, si ha $|v_\xi| \to 0$ e dunque, ricordando l'esercizio 4.6.3 (che è relativo a $L^1(\mathbb{R})$ ma vale anche, con analoga dimostrazione, in $L^1(\mathbb{R}^N)$), si conclude che $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$. Ciò prova la tesi. $\square$

Osservazione 8.4.4 La trasformata di Fourier regolarizza le funzioni: se f è solo sommabile, come abbiamo visto $\widehat{f}$ è continua; analogamente, se $x \mapsto |x| f(x)$ è sommabile, utilizzando come in precedenza il teorema 4.3.4 si deduce che $\widehat{f}$ è di classe C^1 e

$$D_j \widehat{f}(\xi) = [\mathcal{F}(-ix_j f(x))](\xi).$$

La trasformata di Fourier ha anche l'importante proprietà di tramutare il prodotto di convoluzione (v. esercizio 5.4.4) in un prodotto ordinario:

Proposizione 8.4.5 *Per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$(x, y) \mapsto f(x - y) g(y) e^{-i(x,\xi)}$$

è sommabile su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; quindi, applicando il teorema di Fubini (teorema 5.4.4) otteniamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f \star g(x) e^{-i(x,\xi)}\, dm_N(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) e^{-i(x,\xi)} dm_N(y) \right] dm_N(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) e^{-i(x,\xi)} dm_N(x) \right] dm_N(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u) g(y) e^{-i(u+y,\xi)} dm_N(u) \right] dm_N(y) = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(u) e^{-i(u,\xi)} dm_N(u) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(y) e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y) \right) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \quad \square
\end{aligned}$$

Osservazione 8.4.6 Lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$, munito del prodotto di convoluzione, è un'*algebra*, ossia è chiuso rispetto al prodotto, ed è *priva di unità*, cioè non esiste alcuna funzione $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che risulti $h \star f = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Infatti se tale funzione h esistesse, avremmo per la proposizione precedente $\widehat{f} = \widehat{h}\widehat{f}$; dunque, scegliendo f in modo che $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ dedurremmo $\widehat{h} \equiv 1$ in $\mathbb{R}^N$. Ma ciò è in contraddizione con la proposizione 8.4.3, perchè $\widehat{h}(\xi)$ non sarebbe infinitesima per $|\xi| \to \infty$.

Introduciamo adesso uno spazio di funzioni regolari, lo *spazio di Schwartz*, sul quale, come vedremo fra poco, la trasformata di Fourier è bigettiva ed è un isomorfismo.

Definizione 8.4.7 *Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è definito da*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : x \mapsto x^\alpha D^\beta \varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N\}.$$

Ricordiamo che $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}$ e che $D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_N^{\beta_N}$; inoltre si definisce $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_N$ per $\beta \in \mathbb{N}^N$.
È immediato verificare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio di $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Si noti poi che $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che l'inclusione è propria in quanto la funzione $f(x) = e^{-|x|^2}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e non ha supporto compatto; da questa inclusione segue in particolare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è denso in tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, \infty[$.
Nello spazio di Schwartz la trasformata di Fourier mostra la sua caratteristica più importante, che è quella di scambiare fra loro le operazioni di derivazione e di moltiplicazione per monomi: di qui scaturisce l'utilità di questo operatore per la risoluzione di equazioni differenziali.

Proposizione 8.4.8 *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x))(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione La prima proprietà si ottiene integrando per parti $|\alpha|$ volte nell'integrale che definisce $\widehat{D^\alpha \varphi}$; ciò è possibile perché

$$\lim_{|x| \to \infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

La seconda proprietà si ottiene per induzione a partire dal risultato dell'osservazione 8.4.4. $\square$

Proposizione 8.4.9 *La trasformata di Fourier manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in sé.*

Dimostrazione Basta osservare che se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ si ha, per la proposizione precedente,

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta \varphi(x))(\xi) = (-1)^{|\beta|} i^{|\beta| - |\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha (x^\beta \varphi(x)))(\xi),$$

da cui, per la proposizione 8.4.3,

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| \leq \|D^\alpha(x^\beta \varphi(x))\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

La trasformata di Fourier non avrebbe l'importanza applicativa che ha se non ci fosse un modo per ricostruire la funzione originaria a partire dalla sua trasformata. Ciò è possibile nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

Teorema 8.4.10 (formula di inversione) *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora si ha*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = (2\pi)^{-N}\, \widehat{\widehat{\varphi}}\,(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

in particolare $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è bigettiva.

Dimostrazione Non possiamo procedere nel modo più naturale, che è quello di sostituire la definizione di $\widehat{\varphi}(\xi)$ nell'integrale candidato a fornire la formula di inversione, in quanto per un fissato $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$(y,\xi) \mapsto \varphi(y) e^{-i(y,\xi)} e^{i(x,\xi)}$$

non è sommabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (salvo che quando $\varphi \equiv 0$), cosicché non possiamo applicare il teorema di Fubini. Otterremo il risultato con un procedimento di approssimazione. Premettiamo il

Lemma 8.4.11 *Per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(u)\varphi(x+u)\, dm_N(u) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione La funzione

$$(y,\xi) \mapsto \varphi(y)\psi(\xi) e^{-i(y,\xi)} e^{i(x,\xi)}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$; dunque per il teorema 5.4.4 si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) e^{-i(y,\xi)} dm_N(y) \right] e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) e^{-i(y-x,\xi)}\, dm_N(\xi) \right] dm_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(y-x)\varphi(y)\, dm_N(y),
\end{aligned}$$

e la tesi del lemma segue tramite il cambiamento di variabile $u = y - x$. $\square$

Dimostriamo la formula di inversione per una fissata $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Scegliamo $f(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$; osserviamo che si ha

$$f(0) = 1, \quad \widehat{f}(u) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}|u|^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(u)\, dm_N(u) = (2\pi)^N.$$

Adesso, fissato $\varepsilon > 0$, applichiamo il lemma precedente alla funzione $\psi(\xi) = f(\varepsilon\xi)$: ricordando l'esempio 8.4.2 (2), si ha

$$\widehat{\psi}(u) = \varepsilon^{-N}\widehat{f}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-N}(2\pi)^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}},$$

cosicché dal lemma 8.4.11 ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) &= \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\varphi(x+u)\,dm_N(u) = \left[y = \frac{u}{\varepsilon}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(y)\varphi(x+\varepsilon y)\,dm_N(y).\end{aligned}$$

Per $\varepsilon \to 0$ dal teorema di Lebesgue (teorema 4.3.4) segue la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) = (2\pi)^N\varphi(x),$$

che è la tesi del teorema. $\square$

Osservazione 8.4.12 Dal lemma 8.4.11 segue in particolare, scelto $x = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(u)\varphi(u)\,dm_N(u) \qquad \forall\psi,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Enunciamo adesso il più importante risultato della teoria della trasformata di Fourier: esso esprime il fatto che l'operatore $\mathcal{F}$ è un isomorfismo dello spazio normato $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, munito della norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, in sé, e che di conseguenza esso si può estendere in modo unico, per densità, ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé.

Teorema 8.4.13 (di Plancherel) *Per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vale la* formula di Parseval

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^N)}\ ;$$

in particolare

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione Applicando l'osservazione precedente si ha

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\,\widehat{\overline{\widehat{g}}}\,(u)\,dm_N(u).$$

D'altra parte risulta

$$\overline{\widehat{g}}(\xi) = \overline{\widehat{g}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^N} g(x)e^{-i(x,\xi)}\,dm_N(x)} = \int_{\mathbb{R}^N}\overline{g(x)}e^{i(x,\xi)}\,dm_N(x) = \widehat{\overline{g}}(-\xi),$$

ed anche, posto $y = -x$,

$$\overline{\widehat{g}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N}\overline{g(x)}e^{i(x,\xi)}\,dm_N(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\overline{g(-y)}e^{-i(y,\xi)}\,dm_N(y) = \widehat{\overline{g(-\cdot)}}(\xi);$$

quindi, per la formula di inversione,

$$\widehat{\widehat{\overline{\widehat{g}}}}\,(u) = \overline{\widehat{\widehat{g(-\cdot)}}}(u) = (2\pi)^N\overline{g(-\cdot)}(-u) = (2\pi)^N\overline{g(u)}.$$

Pertanto

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N\int_{\mathbb{R}^N} f(u)\overline{g(u)}\,dm_N(u) = (2\pi)^N(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,. \quad \square$$

Corollario 8.4.14 *La trasformata di Fourier si estende in modo unico ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé, che denotiamo con lo stesso simbolismo. In particolare si ha*

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall f,g\in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$$f(x) = (2\pi)^{-N}\,\widehat{\widehat{f}}\,(-x) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N \qquad \forall f\in L^2(\mathbb{R}^N);$$

inoltre, posto per $R>0$ e per ogni $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\varphi_R(\xi) = \int_{\{|x|\le R\}} f(x)e^{-i(x,\xi)}\,dm_N(x), \qquad \xi\in\mathbb{R}^N,$$

$$\psi_R(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\{|\xi|\le R\}} \widehat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi), \qquad x\in\mathbb{R}^N,$$

risulta

$$\lim_{R\to\infty}\|\varphi_R-\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \qquad \lim_{R\to\infty}\|\psi_R-f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Dunque la formula esplicita della trasformata di Fourier si estende a tutte le funzioni di $L^2(\mathbb{R}^N)$ non in modo automatico, ma soltanto in un senso opportuno: $\widehat{f}$ è limite in $L^2(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni φ_R il cui valore è una approssimazione della formula della trasformata di Fourier.

Dimostrazione Se $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, e $\{\varphi_n\}$ è una successione contenuta in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ che converge a f in $L^2(\mathbb{R}^N)$, poniamo $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty}\widehat{\varphi_n}$; questo limite esiste in $L^2(\mathbb{R}^N)$ grazie al teorema di Plancherel. È immediato verificare che la definizione non dipende dalla successione approssimante, ma solo dalla f. È allora facile verificare che l'operatore $\mathcal{F}$, definito da $F(f)=\widehat{f}$, è un isomorfismo verificante la prima uguaglianza dell'enunciato. La seconda proprietà dell'enunciato si ottiene passando ad una sottosuccessione di $\{\varphi_n\}$ che converga q.o. a f.
Proviamo l'ultima parte della tesi. Posto $\chi_R = \chi_{\{|x|\le R\}}$ per ogni $R>0$, osservato che $\chi_R f\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^2(\mathbb{R}^N)$ si vede subito che

$$\varphi_R = \widehat{(\chi_R f)}, \qquad \lim_{R\to\infty}\|\chi_R f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty}\|\varphi_R-\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Similmente, si ha

$$\psi_R(x) = (2\pi)^{-N}\widehat{(\chi_R \widehat{f})}(-x), \qquad \lim_{R\to\infty} \|\chi_R \widehat{f} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty} \|(2\pi)^N \psi_R(-\cdot) - \widehat{\widehat{f}}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

e infine, invertendo il segno della variabile di integrazione ed applicando poi la formula di inversione,

$$\lim_{R\to\infty} \|\psi_R - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0. \quad \square$$

Concludiamo il paragrafo mostrando come applicare la trasformata di Fourier per risolvere un'equazione alle derivate parziali. Consideriamo l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \,]0,\infty[\,,$$

dove Δ è l'*operatore di Laplace*, definito da

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N D_i^2 u, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Procederemo formalmente, cercando di ricavare in forma esplicita una funzione "candidata" al ruolo di soluzione: a posteriori, poi, potremo verificare rigorosamente che essa risolve davvero l'equazione.
Applichiamo la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione del calore: coinvolgendo solo le variabili x_i ma non la t, essa commuta con la derivazione rispetto a t e quindi, ricordando la proposizione 8.4.8, troviamo l'equazione

$$0 = \widehat{\Delta u} - \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = -|\xi|^2 \widehat{u} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}, \qquad (\xi,t) \in \mathbb{R}^N \times \,]0,\infty[\,.$$

Risolviamo questa equazione differenziale ordinaria nella variabile t: le soluzioni sono della forma

$$\widehat{u}(\xi,t) = c(\xi) e^{-|\xi|^2 t},$$

con $c(\xi)$ funzione arbitraria. Dato che la trasformata di Fourier è un isomorfismo, possiamo porre $c(\xi) = \widehat{\gamma}(\xi)$, con γ funzione altrettanto arbitraria, mentre dall'esempio 8.4.2 (2), con $a = \frac{1}{4t}$, segue che

$$e^{-|\xi|^2 t} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}} \right)(\xi);$$

quindi possiamo scrivere

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\gamma}(\xi)\, \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}} \right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\gamma \star \frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}} \right)(\xi),$$

ovvero
$$u(x,t) = \gamma \star \frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \gamma(y)\, dm_N(y).$$
Non è troppo difficile verificare che questa funzione risolve il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\\ u(\cdot,0) = \gamma & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$
nel senso che essa è soluzione dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$ ed inoltre verifica
$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \gamma(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$
purché la funzione γ sia continua in $\mathbb{R}^N$ e soddisfi la condizione
$$x \mapsto e^{-\alpha|x|}\gamma(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{per qualche } \alpha > 0$$
(ad esempio è ovviamente sufficiente che γ sia continua e limitata su $\mathbb{R}^N$).
Il "nucleo" dell'integrale di convoluzione che definisce la soluzione u, ossia la funzione
$$K(x,t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\,,$$
si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore, o anche *nucleo del calore*.

Esercizi 8.4

1. Per $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ponga $m_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Si provi che
$$\widehat{m_\lambda f} = |\lambda|^{-N} m_{1/\lambda}\widehat{f}.$$

2. Per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ponga
$$\tau_v f(x) = f(x+v), \qquad e_v f(x) = e^{i(v,x)} f(x).$$
Si provi che
$$\widehat{\tau_v f} = e_v \widehat{f}, \qquad \tau_v \widehat{f} = \widehat{(e_{-v} f)}.$$

3. Sia A una matrice reale $N \times N$ unitaria, ossia tale che $|\det A| = 1$. Provare che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ha
$$\widehat{f \circ A} = \widehat{f} \circ A.$$

4. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ una funzione reale strettamente positiva. Provare che
$$|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

5. Sia $N = 1$ e sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; si provi che se f è pari allora

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos x\xi \, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

mentre se f è dispari allora

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_0^\infty f(x) \sin x\xi \, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

6. Provare che l'applicazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è iniettiva.
[**Traccia:** sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{f} = 0$; si consideri la convoluzione $f \star \varphi_\varepsilon$, ove φ_ε è una mollificatrice (esercizio 5.4.5), si verifichi che $f \star \varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e si osservi che $\widehat{f \star \varphi_\varepsilon} = 0$.]

7. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}, \quad g(x) = \frac{1}{\lambda^2 + x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove λ è una costante positiva.

8. Calcolare esplicitamente la funzione $f_n = \chi_{[-n,n]} \star \chi_{[-1,1]}$; trovare poi la funzione φ tale che $f_n = \widehat{\varphi}$.

9. Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \max\{1 - |x|, 0\}, \\
f_2(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot f_1(x), \\
f_3(x) &= \cos \tfrac{x}{2} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x), \\
f_4(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot e^{-|x|}, \\
f_5(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot \max\{1 - |x|, \tfrac{1}{2}\} \cdot \chi_{[-1,1]}(x).
\end{aligned}$$

10. Dimostrare che $\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}$ per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

11. Sia μ una misura finita su $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$. Si definisca la seguente funzione $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \, d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(i) Si provi che $\widehat{\mu}$ è una funzione continua e limitata.

(ii) Se inoltre μ è concentrata su un insieme limitato, si mostri che $\widehat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Si scriva esplicitamente $\widehat{\mu}$ nei casi seguenti:

$$\text{(a) } \mu = f\,dm, \ f \in L^1(\mathbb{R}); \quad \text{(b) } \mu = \delta_0\,; \quad \text{(c) } \mu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\delta_n\,.$$

Capitolo 9

Spazi L^p

9.1 La norma di L^p

Descriviamo in questo capitolo una nuova famiglia di spazi di Banach, assai importanti per la ricchezza delle proprietà di cui godono: gli spazi L^p. Fra tutti gli spazi di Banach, la struttura di questi spazi è quella che più si avvicina a quella hilbertiana. Di questa famiglia conosciamo già alcuni membri, e cioè L^∞ (paragrafo 3.3), L^1 (paragrafo 4.5) e L^2 (esempio 7.2.6 (3)).
Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $1 \leq p < \infty$. Poniamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\};$$

si vede facilmente che $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale. Infatti se $f \in \mathcal{L}^p(X)$ allora ovviamente $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X)$; poi, se $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ allora anche $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$, in quanto tale funzione è misurabile ed inoltre, per la convessità in $[0, \infty[$ della funzione $t \mapsto t^p$, si ha

$$|f(x) + g(x)|^p \leq [|f(x)| + |g(x)|]^p \leq 2^{p-1}[|f(x)|^p + |g(x)|^p],$$

da cui, integrando su X,

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \left[\int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu \right] < \infty.$$

Indicata con $\simeq$ l'abituale relazione d'equivalenza che identifica le funzioni q.o. coincidenti, diamo la seguente

Definizione 9.1.1 *Lo spazio quoziente $\mathcal{L}^p(X)/\simeq$ si indica con $L^p(X)$.*

È chiaro che $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale. Definiamo

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}};$$

dimostreremo che $\|\cdot\|_p$ è una norma che rende $L^p(X)$ uno spazio di Banach. Si osservi che le prime due proprietà caratteristiche della norma sono immediate, e che l'unica

verifica non banale è quella della subadditività.
A questo scopo proveremo dapprima un'altra fondamentale disuguaglianza. Per $p \in [1, \infty]$ indichiamo con q l'*esponente coniugato* di p, cioè il numero definito dalla relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

dunque

$$q = \begin{cases} 1 & \text{se } p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

È chiaro che q è l'esponente coniugato di p se e solo se p è l'esponente coniugato di q. Si noti anche che 2 è il coniugato di se stesso.

Proposizione 9.1.2 (disuguaglianza di Hölder) *Sia $p \in [1, \infty]$ e sia q l'esponente coniugato di p. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, allora $fg \in L^1(X)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \,.$$

Dimostrazione La disuguaglianza è banale se $p = 1$ (oppure, simmetricamente, se $p = \infty$): in tal caso infatti la tesi segue integrando la disuguaglianza

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty \qquad \text{q.o. in } X.$$

Supponiamo dunque $p \in]1, \infty[$ e, di conseguenza, $q = \frac{p}{p-1} \in]1, \infty[$. Si osservi anche che se $p = q = 2$ la disuguaglianza di Hölder si riduce a quella di Cauchy-Schwarz (proposizione 7.2.2). Si noti poi che se $\|f\|_p = 0$ oppure $\|g\|_q = 0$ allora si ha $fg = 0$ q.o. in X, cosicché la tesi è evidente; supporremo pertanto $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ non nulle.
Proviamo la disuguaglianza. In virtù della convessità di $t \mapsto e^t$, per ogni $a, b > 0$ vale la relazione (*disuguaglianza di Young*)

$$ab = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p}\, e^{\log a^p} + \frac{1}{q}\, e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$

d'altronde questa disuguaglianza è ovviamente vera anche per $a = 0$ oppure $b = 0$. Perciò

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q} \qquad \text{q.o. in } X,$$

da cui, integrando su X,

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\, \|f\|_p^p + \frac{1}{q}\, \|g\|_q^q \,.$$

Ora, se $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ la tesi è provata perché otteniamo $\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; altrimenti, posto

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}, \qquad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}\ ,$$

risulta $\|F\|_p = \|G\|_q = 1$ e dunque, per quanto già dimostrato,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|FG\|_1 \le 1,$$

che è la tesi. $\square$

Osservazione 9.1.3 Si noti che la dimostrazione precedente dice qualcosa di più: la relazione $|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ q.o. in X vale anche, ovviamente, nei punti in cui $|f(x)|$ oppure $|g(x)|$ valgono $+\infty$, e pertanto, integrando su X, si ottiene che la disuguaglianza vale per ogni coppia di funzioni misurabili f, g (eventualmente nella forma $+\infty \le +\infty$). In particolare, se p e q sono esponenti coniugati e se fg non appartiene a L^1, si deduce che o $f \notin L^p$, o $g \notin L^q$.

Corollario 9.1.4 (disuguaglianza di Minkowski) *Se $p \in [1, \infty]$ e $f, g \in L^p(X)$, allora*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dimostrazione I casi $p = 1$ e $p = \infty$ (ed anche quello in cui $p = 2$) sono già noti. Se $1 < p < \infty$ si ha

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} \, d\mu \le \int_X [|f| + |g|]|f+g|^{p-1} \, d\mu.$$

Osservando che $|f + g|^{p-1} \in L^q(X)$ (in quanto $(p - 1)q = p$) ed applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p) \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left[\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right]^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi, semplificando, se $\|f + g\|_p > 0$; d'altronde quando $\|f + g\|_p = 0$ la tesi stessa è banale. $\square$

La funzione $f \mapsto \|f\|_p$ è dunque una norma sullo spazio $L^p(X)$.

Proposizione 9.1.5 *$L^p(X)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Utilizzando il lemma 7.1.2, sarà sufficiente mostrare che per ogni successione $\{f_n\} \subseteq L^p$, tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_p < \infty$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è convergente nella norma $\| \cdot \|_p$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|, \qquad x \in X;$$

allora $\{g_n\} \subseteq L^p$ e

$$\|g_n\|_p \le \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \le M < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e per il teorema di B. Levi

$$\int_X g^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p \, d\mu \le M^p,$$

cioè $g \in L^p$. Ne segue che g è q.o. finita, ossia la serie $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ è assolutamente convergente per q.o. $x \in X$, e dunque la sua somma $f(x)$ è definita q.o. in X; per di più, tale funzione f individua un elemento di L^p in quanto

$$\int_X |f|^p \, d\mu \le \int_X g^p \, d\mu \le M^p.$$

Inoltre, posto

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \qquad x \in X,$$

si ha $s_n \to f$ q.o. per $n \to \infty$ e $|s_n| \le g$ q.o. per ogni n; dunque $|s_n - f|^p \le (2g)^p$ q.o. per ogni n. Per il teorema di convergenza dominata, si ottiene $s_n \to f$ in L^p, ossia la serie $\sum_{n=0}^\infty f_n$ è convergente nella norma $\|\cdot\|_p$. □

Osservazione 9.1.6 La proposizione precedente si può dimostrare anche ripetendo le argomentazioni usate per provare la completezza di L^1 (teorema 4.5.2). In tal modo si ottiene qualcosa di più, cioè il fatto che se $f_n \to f$ in L^p, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$, e $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$ q.o. in X, con $g \in L^p$.

Osservazione 9.1.7 In analogia con l'esempio 7.2.6 (4), si può considerare anche lo spazio $L^p(X, \mathbb{C})$ delle funzioni $f : X \to \mathbb{C}$ tali che $|f|^p$ è sommabile su X. Ciò accade se e solo se $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ appartengono a $L^p(X)$. La norma su tale spazio è ancora $\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$.

Esempio 9.1.8 Sia $K : [0,t] \times [0,t] \to \mathbb{C}$ una funzione continua e simmetrica, ossia tale che $K(x,y) = K(y,x)$. Per ogni $f \in L^p(0,T)$ consideriamo l'*operatore integrale*

$$[Af](x) = \int_0^T K(x,y) f(y) \, dy, \qquad x \in [0,T].$$

Mostriamo che $A \in \mathcal{L}(L^p(0,T))$, con

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T))} \le \sup_{0 \le x \le T} \int_0^T |K(\xi, \eta)| \, d\eta.$$

Infatti, indicata con M tale quantità, la tesi è banale per $p = \infty$. Per $p = 1$ basta usare il teorema di Tonelli:

$$\|Af\|_1 \le \int_0^T \int_0^T |K(x,y)||f(y)| \, dy dx = \int_0^T \int_0^T |K(x,y)| \, dx \, |f(y)| \, dy \le M \|f\|_1 \, .$$

Se $1 < p < \infty$, si ha, detto q l'esponente coniugato di p,

$$\begin{aligned}
\|Af\|_p^p &\le \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy\right]^p dx = \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}|f(y)|\,dy\right]^p dx \le \\
&\le \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|\,dy\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^T |K(x,y)|\,|f(y)|^p dydx \le \\
&\le M^{\frac{p}{q}} \int_0^T \int_0^T |K(x,y)|\,|f(y)|^p\,dydx = M^{\frac{p}{q}} \int_0^T \int_0^T |K(x,y)|\,dx\,|f(y)|^p\,dy = \\
&= M^{\frac{p}{q}} \int_0^T \int_0^T |K(y,x)|\,dx\,|f(y)|^p\,dy \le M^{\frac{p}{q}+1} \int_0^T |f(y)|^p dy = M^p \|f\|_p^p .
\end{aligned}$$

Ciò prova che la norma dell'operatore A non supera M.

Esercizi 9.1

1. Siano $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che la disuguaglianza di Hölder diventa un'uguaglianza se e solo se esistono $\alpha, \beta \ge 0$, non entrambi nulli, tali che

$$\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q \qquad \text{q.o. in } X.$$

2. Siano $f, g \in L^1(X)$: si provi che $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ se e solo se $fg \ge 0$ q.o. in X.

3. Sia $p \in]1, \infty[$. Dimostrare che la disuguaglianza di Minkowski diventa un'uguaglianza se e solo se esistono $\gamma, \delta \ge 0$, non entrambi nulli, tali che

$$\gamma f(x) = \delta g(x) \qquad \text{q.o. in } X.$$

4. Si provi che se $\mu(X) < \infty$ si ha $L^p(X) \subset L^r(X)$ per $p > r$, mentre ciò è falso se $\mu(X) = \infty$.

5. Posto per $1 \le p < \infty$ (v. anche gli esercizi 7.2.3 e 7.1.5)

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

si verifichi che ℓ^p coincide con $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, ove ν è la misura "cardinalità"; si provi poi che $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$ per $1 < p < r < \infty$, e che le corrispondenti inclusioni sono continue con norme uguali a 1.

6. Sia $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, $1 < p < \infty$. Si provi che se $a \ne 0$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda} < \|a\|_{\ell^p}^p \qquad \forall \lambda \in]0, p[\,.$$

7. Si verifichi che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + |\log x|)}\,, \qquad x > 0,$$

appartiene a $L^2(0,\infty)$ ma non sta in alcun $L^p(0,\infty)$ con $p \neq 2$. Fissato $p \in [1,\infty]$, si trovi poi, analogamente, una funzione g che stia in $L^p(0,\infty)$ ma non in $L^r(0,\infty)$ per $r \neq p$.

8. Sia $X = \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(0,1)$; si verifichi che $L^\infty(0,1)$ è contenuto propriamente in X. Si provi che, similmente, si ha l'inclusione propria $L^p(0,1) \subset \bigcap_{1 \le r < p} L^r(0,1)$.

9. Sia $f \in L^p(a,b)$, con $p > 1$. Si provi che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione hölderiana in $[a,b]$ di esponente $1 - \frac{1}{p}$, ossia esiste $K \ge 0$ tale che

$$|F(x) - F(y)| \le K|x-y|^{1-\frac{1}{p}} \qquad \forall x, y \in [a,b],$$

e che risulta addirittura

$$\lim_{r \to 0^+} \sup_{0 < |x-y| \le r} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} = 0.$$

10. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$. Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si provi che se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha

$$\lim_{x \to 0} |x|^{-\frac{1}{q}} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} |x|^{-\frac{1}{q}} F(x) = 0.$$

11. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f è misurabile su X, si provi che

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty\,.$$

12. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f è misurabile e tale che $0 < \int_X |f|^n d\mu < \infty$ definitivamente, si provi che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\,d\mu}{\int_X |f|^n\,d\mu} = \|f\|_\infty\,.$$

13. Sia $f \in L^p \cap L^r$, con $p < r$; si provi che $f \in L^s$ per ogni $s \in]p, r[$, e che si ha

    (i) $\|f\|_s \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$, ove $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$;

    (ii) $\|f\|_s \le \varepsilon \|f\|_r + \varepsilon^{-\eta} \|f\|_p \quad \forall \varepsilon > 0$, ove $\eta = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}$.

14. Sia μ una misura σ-finita e sia $f \in L^p$; si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme misurabile A_ε, di misura finita, tale che

$$\int_{A_\varepsilon} |f|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

15. Sia $\mu(X) < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione limitata in L^r, ove $1 < r \le \infty$. Se $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X e se $1 \le p < r$, si provi che $f_n \to f$ in L^p. Si verifichi che il risultato è falso se $p = r$ oppure se $\mu(X) = \infty$.
[**Traccia:** usare il teorema di Severini-Egorov.]

16. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni sommabili su X, tali che

    (a) $f_n \to 0$ in misura;

    (b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty$.

    Si provi che risulta
$$\lim_{n\to\infty} \int_X \sqrt{|f_n g|}\, d\mu = 0 \qquad \forall g \in L^1(X).$$

17. Sia $\{f_n\}$ una successione limitata in L^p, con $p > 1$. Se $f_n(x) \to f(x)$ q.o., si provi che $f \in L^p$ e che
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g\, d\mu = \int_X f g\, d\mu \qquad \forall g \in L^q,$$
ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si provi anche che l'enunciato è falso per $p = 1$.
[**Traccia:** dopo avere ridotto il problema al caso $\mu(X) < \infty$, usare il teorema di Severini-Egorov.]

18. Sia $\mu(X) = \infty$, e sia f una funzione misurabile, illimitata sul complementare di ogni insieme di misura finita. È possibile che f appartenga a L^p ?

19. Trovare una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, illimitata sul complementare di ogni compatto. Trovarne un'altra che, in più, sia di classe C^∞ su $\mathbb{R}$.

20. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. e $|f_n(x)| \le g(x)$ q.o., con $g \in L^p$, $1 \le p < \infty$; si provi che $f_n \to f$ in L^p.

21. Se $f_n \to f$ in L^p, e $\lambda \in]0, p]$, si provi che $|f_n|^\lambda \to |f|^\lambda$ in $L^{\frac{p}{\lambda}}$.

22. Dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, e f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$, allora $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

23. Si considerino le convoluzioni definite nell'esercizio 5.4.5. Nelle notazioni ivi introdotte, si provi che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, allora $f_\varepsilon \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

24. Si provi che $\mathcal{S}$ è denso in $L^p(X)$ per $1 \le p \le \infty$, e che $\mathcal{S}_0$ è denso in $L^p(X)$ per $1 \le p < \infty$.

25. Si provi che $C_0(\mathbb{R})$ e $C_0^\infty(\mathbb{R})$ sono densi in $L^p(\mathbb{R})$ per $1 \le p < \infty$.

26. Si provi che le funzioni costanti a tratti sono dense in $L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$.

27. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$; provare che

$$\lim_{\lambda \to 1} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x) - f(x)|^p \, dx = 0, \qquad \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

[**Traccia:** utilizzare la densità di $C_0(\mathbb{R})$.]

28. Si provi che $L^p(\mathbb{R})$ è separabile per $1 \le p < \infty$.

29. Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$. Si provi che la convoluzione $f \star g$ (v. esercizio 5.4.4) appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ e che $\|f \star g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$. Si provi inoltre che se $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \star g$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

30. Sia μ la misura su $]0,\infty[$ definita da

$$\mu(E) = \int_E \frac{dt}{t} \quad \forall E \in \mathcal{M}, \ E \subseteq]0,\infty[,$$

e si consideri la *convoluzione moltiplicativa*

$$(f * g)(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda t) g(t) \, d\mu(t), \quad f, g \in L^1(\mu).$$

(i) Si verifichi che $f * g = g * f$ per ogni $f, g \in L^1(\mu)$.
(ii) Si provi che se $f \in L^1(\mu)$ e $g \in L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, allora $f * g \in L^p(\mu)$ e

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

31. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'operatore

$$(T_h f)(x) = f(x+h) - f(x-h), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si provi che $T_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ per ogni $p \in [1,\infty]$, con

$$\|T_h\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} = 2.$$

(ii) Si dimostri che se $p \in [1,\infty[$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ si ha

$$T_h f \to 0 \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}) \qquad \text{per } h \to 0,$$

e che ciò è falso per $p = \infty$.

32. Fissata una successione $a \in \ell^1$, sia K l'operatore definito da:

$$(Kx)_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x_k \,, \qquad x \in \ell^p.$$

(i) Si provi che $K \in \mathcal{L}(\ell^p)$ per ogni $p \in [1, \infty]$, e che

$$\|K\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq \|a\|_{\ell^1} .$$

(ii) Per $p = 1$ si calcoli la norma $\|K\|_{\mathcal{L}(\ell^1)}$.

[**Traccia:** Si provi che, detto $\tau_m : \ell^p \to \ell^p$ l'operatore definito da

$$(\tau_m x)_k = \begin{cases} x_{m-k} & \text{se } k \geq m \\ 0 & \text{se } 0 \leq k < m, \end{cases}$$

risulta

$$Kx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \tau_m x \qquad \forall x \in \ell^p,$$

ove la serie converge nel senso di ℓ^p...]

33. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia T l'operatore definito da $Tf(x) = \varphi(x)f(x)$. Determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché:

(a) T sia continuo da $L^p(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$;

(b) T sia continuo ed iniettivo;

(c) T sia continuo con inverso continuo.

34. Per $p \in]0, 1[$ si definisca $L^p(X)$ come nella definizione 9.1.1. Si provi che:

(i) $\| \cdot \|_p$ non è subadditiva;

(ii) la funzione

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p \, d\mu, \qquad f, g \in L^p(X),$$

è una distanza su $L^p(X)$ ed inoltre lo spazio $(L^p(X), d)$ è completo.

35. (*Disuguaglianza di Jensen*) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) = 1$; sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $a < f(x) < b$ per ogni $x \in X$ (ove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), e sia $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si provi che

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu$$

[**Traccia:** si verifichi anzitutto che $\varphi \circ f$ è misurabile. Poi, posto $t = \int_X f \, d\mu$ e $\beta = \sup_{s \in]a,t[} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$, si provi che

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) \geq \beta(f(x) - t) \qquad \forall x \in X \ldots]$$

36. (*Disuguaglianza di Hardy*) Sia $1 < p < \infty$. Posto $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ per ogni $f \in L^p(0,\infty)$, si provi che $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$, e che $\frac{p}{p-1}$ è la migliore costante possibile.
[**Traccia:** supponendo dapprima $f \ge 0$ e $f \in C_0(]0,\infty[)$, si integri per parti $\int_0^\infty F(t)^p\,dt$, e si osservi che $xF'(x) = f(x) - F(x)$. . . . Poi si passi al caso generale. Per l'ultima affermazione si considerino le funzioni $x \mapsto x^{-\frac{1}{p}}\chi_{]0,n[}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.]

37. Si provi la disuguaglianza
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k|\right]^p \le \left(\frac{2p}{p-1}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p \qquad \forall x \in \ell^p,\ \forall p \in [1,\infty[.$$
Traccia: si applichi la disuguaglianza di Hardy alla funzione f che vale x_n sull'intervallo $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.]

38. Sia T l'operatore così definito:
$$Tf(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (i) Si provi che per ogni $p \in [1,\infty]$ si ha $T \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la norma;
   (ii) Si dimostri che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha:
      (a) la funzione Tf è uniformemente continua su $\mathbb{R}$;
      (b) la funzione Tf è assolutamente continua in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
      (c) la funzione Tf è infinitesima per $x \to \pm\infty$.

39. Fissato $\vartheta \in [0,1]$ si consideri l'insieme X_ϑ costituito dalle funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili che verificano la seguente proprietà:
$$\exists C > 0 : \int_E |f|\,dm_N \le C m_N(E)^\vartheta \quad \forall E \in \mathcal{M}_N \text{ con } m_N(E) \le 1.$$
   (i) Verificare che se $\vartheta \ge \alpha$ si ha $X_\vartheta \subseteq X_\alpha$.
   (ii) Provare che $L^p(\mathbb{R}^N) \subset X_{1-\frac{1}{p}}$ per ogni $p \in [1,\infty[$.
   (iii) Dimostrare che $L^\infty(\mathbb{R}^N) = X_1$.

9.2 Il duale di L^p

Questo paragrafo è dedicato alla caratterizzazione del duale dello spazio $L^p(X)$, $1 \le p < \infty$, nel caso in cui la misura μ sia σ-finita e che le funzioni siano a valori reali. Vale il seguente, importante risultato:

Teorema 9.2.1 (di Riesz-Fischer) *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito e sia $p \in [1, \infty[$. Per ogni $F \in (L^p(X))^*$ esiste un'unica funzione $f \in L^q(X)$, ove q è l'esponente coniugato di p, tale che*

$$Fg = \int_X gf \, d\mu \qquad \forall g \in L^p(X);$$

si ha inoltre

$$\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q \,.$$

Dimostrazione Proviamo anzitutto l'ultima affermazione, ossia che se F è il funzionale $g \mapsto \int_X gf \, d\mu$, con $f \in L^q$, allora la norma di F è uguale a $\|f\|_q$. Se $p = 1$, questo lo sappiamo già (esempio 7.3.6 (4)). Se $1 < p < \infty$, dalla disuguaglianza di Hölder segue subito $|Fg| \le \|g\|_p \|f\|_q$ e quindi $\|F\|_{(L^p)^*} \le \|f\|_q$; d'altra parte, scelta $g = |f|^{\frac{q}{p}} \mathrm{sgn} f$, si trova $Fg = \int_X |f|^q \, d\mu = \|g\|_p \|f\|_q$, da cui $\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$.

Proviamo ora l'unicità della funzione f: se due funzioni $f_1, f_2 \in L^q$ soddisfano entrambe la tesi, allora risulta

$$\int_X g(f_1 - f_2) \, d\mu = 0 \qquad \forall g \in L^p.$$

Dunque il funzionale F_0, definito da $F_0 g = \int_X g(f_1 - f_2) \, d\mu$ è identicamente nullo; ne segue, per quanto appena visto, $0 = \|F_0\|_{(L^p)^*} = \|f_1 - f_2\|_q$, cosicché $f_1 = f_2$.

Veniamo alla dimostrazione dell'esistenza di f. Proveremo dapprima il risultato per i funzionali *positivi*, cioè i funzionali F (lineari e continui) tali che

$$g \ge 0 \quad \text{q.o. in } X \qquad \Longrightarrow \qquad Fg \ge 0;$$

nel primo passo supporremo $\mu(X) < \infty$, e nel secondo passo tratteremo il caso generale in cui μ è σ-finita. Infine, il terzo passo consisterà in una proposizione in cui si mostrerà che ogni funzionale lineare e continuo si decompone nella differenza di due funzionali positivi, e da qui seguirà il teorema per qualunque elemento di $(L^p)^*$.

1º passo Sia dunque $\mu(X) < \infty$ e fissiamo un funzionale positivo $F \in (L^p)^*$. Se $F = 0$, la tesi è evidentemente soddisfatta prendendo $f = 0$; supponiamo quindi $\|F\|_{(L^p)^*} > 0$. Definiamo

$$\lambda(E) = F\chi_E \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

e verifichiamo che la funzione di insieme λ è una misura su $\mathcal{F}$. Intanto, essa è non negativa per la positività di F, ed è finitamente additiva sugli insiemi disgiunti grazie alla linearità di F. La numerabile additività di λ è conseguenza dalla continuità di F: infatti se $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$, con gli E_n elementi disgiunti di $\mathcal{F}$, allora posto $A_n = \bigcup_{k=0}^n E_k$ si ha $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=0}^\infty A_n = E$. Ne segue, in virtù della proposizione 2.1.5,

$$\|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p = (\mu(E \setminus A_n))^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

da cui, essendo F continuo, $F\chi_{A_n} \to F\chi_E$; osservato che $\chi_{A_n} = \sum_{k=0}^n \chi_{E_k}$, ricaviamo per $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^n \lambda(E_k) = \sum_{k=0}^n F\chi_{E_k} = F\chi_{A_n} \to F\chi_E = \lambda(E).$$

Ciò prova che $\lambda(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(E_n)$. Dato che, ovviamente, $\lambda(\emptyset) = F(0) = 0$, concludiamo che λ è una misura; essendo poi $\lambda(X) = F\chi_X \leq \|F\|_{(L^p)^*}\mu(X)^{\frac{1}{p}}$, la misura λ è finita. Notiamo infine che $\lambda \ll \mu$ poiché

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{F},\ \mu(E) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \chi_E = 0 \text{ q.o.} \quad \Longrightarrow \quad \|\chi_E\|_p = 0 \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad F\chi_E = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = 0. \end{aligned}$$

Possiamo allora applicare il teorema di Radon-Nikodým (corollario 8.2.4), ottenendo che esiste un'unica funzione $f \in L^1(X, \mu)$, q.o. non negativa, tale che

$$F\chi_E = \lambda(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Per la linearità di F, ed essendo $\mu(X) < \infty$, si deduce subito

$$F\varphi = \int_X \varphi f \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S};$$

dalla densità di $\mathcal{S}$ in $L^\infty(X, \mu)$ (esercizio 3.3.4, ovvero osservazione 3.1.8), otteniamo che per ogni $g \in L^\infty$ esiste $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to g$ in L^p e in L^∞. Dunque dalla relazione precedente scritta per le φ_n, per la continuità di F su L^p e per convergenza dominata si deduce

$$Fg = \int_X gf \, d\mu \qquad \forall g \in L^\infty.$$

Per concludere il 1$^{\text{o}}$ passo, dobbiamo verificare che $f \in L^q$ (e non solo $f \in L^1$), e che la relazione sopra scritta vale per ogni $g \in L^p$ (e non solo $g \in L^\infty$).
Se $p > 1$, definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |f(x)| > n, \end{cases} \qquad g_n(x) = \operatorname{sgn} f(x) \cdot |f_n(x)|^{\frac{q}{p}}.$$

Allora $f_n \in L^\infty$, $g_n \in L^\infty$; inoltre $\|g_n\|_p = (\|f_n\|_q)^{\frac{q}{p}}$, e

$$\|f_n\|_q^q = \int_X g_n f \, d\mu = Fg_n \leq \|F\|_{(L^p)^*}\|g_n\|_p = \|F\|_{(L^p)^*} \left(\|f_n\|_q\right)^{\frac{q}{p}},$$

da cui $\|f_n\|_q \leq \|F\|_{(L^p)^*}$. Dal teorema di B. Levi si deduce allora $\|f\|_q \leq \|F\|_{(L^p)^*}$.
Se invece $p = 1$ e $q = \infty$, consideriamo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $E_k = \{x \in X : |f(x)| > \|F\|_{(L^1)^*} + \frac{1}{k}\}$, e poniamo $g_k = \operatorname{sgn} f \cdot \chi_{E_k}$; allora $g_k \in L^1 \cap L^\infty$ e $\|g_k\|_1 = \mu(E_k)$. Quindi

$$\begin{aligned} \left(\|F\|_{(L^1)^*} + \frac{1}{k}\right)\mu(E_k) \quad &\leq \quad \int_{E_k} |f| \, d\mu = \int_X g_k f \, d\mu = Fg_k \leq \\ &\leq \quad \|F\|_{(L^1)^*}\|g_k\|_1 = \|F\|_{(L^1)^*}\mu(E_k), \end{aligned}$$

il che implica $\mu(E_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$: dunque $|f(x)| \leq \|F\|_{(L^1)^*}$ q.o. e pertanto $\|f\|_\infty \leq \|F\|_{(L^1)^*}$.
Sia ora $g \in L^p$. Poniamo

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |g(x)| > n, \end{cases}$$

ed osserviamo che $g_n \in L^\infty$, $g_n \to g$ in L^p (per convergenza dominata) e $g_n f \to gf$ in L^1 (per la disuguaglianza di Hölder). Quindi otteniamo

$$Fg = \lim_{n\to\infty} Fg_n = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n f \, d\mu = \int_X gf \, d\mu \quad \forall g \in L^p.$$

Ciò conclude la dimostrazione del 1° passo.

2° passo Supponiamo ora μ σ-finita e sia $F \in (L^p)^*$ un funzionale positivo. Come si è osservato nel corso della dimostrazione del teorema 8.2.3, dal fatto che μ è σ-finita segue che esiste una funzione $w \in L^1(\mu)$ tale che $0 < w(x) < 1$ per ogni $x \in X$. Definiamo

$$\nu(E) = \int_E w \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{F};$$

ν è una misura finita su $\mathcal{F}$. L'applicazione $g \mapsto gw^{\frac{1}{p}}$ è un'isometria di $L^p(\nu)$ in $L^p(\mu)$: infatti

$$\|gw^{\frac{1}{p}}\|^p_{L^p(\mu)} = \int_X |g|^p w \, d\mu = \int_X |g|^p \, d\nu = \|g\|^p_{L^p(\nu)}.$$

Di conseguenza, definendo $\overline{F}\psi = F(\psi w^{\frac{1}{p}})$ per ogni $\psi \in L^p(\nu)$, si ha che $\overline{F}$ appartiene a $(L^p(\nu))^*$ ed è un funzionale positivo. Dunque, per il 1° passo esiste $h \in L^q(\nu)$, q.o. non negativa, tale che

$$\overline{F}\psi = \int_X \psi h \, d\nu \qquad \forall \psi \in L^p(\nu).$$

Definiamo $f = hw^{\frac{1}{q}}$ (nel caso $q = \infty$, prenderemo $f = h$ e l'argomento che segue funziona ugualmente): per quanto sopra osservato, risulta $f \in L^q(\mu)$ e $\|f\|_{L^q(\mu)} = \|h\|_{L^q(\nu)}$; inoltre, per ogni $g \in L^p(\mu)$ si ha

$$Fg = \overline{F}(gw^{-\frac{1}{p}}) = \int_X gw^{-\frac{1}{p}} \, h \, d\nu = \int_X gw^{-\frac{1}{p}} \, fw^{-\frac{1}{q}} \, w \, d\mu = \int_X gf \, d\mu.$$

Ciò prova il 2° passo.

3° passo Dimostriamo la seguente

Proposizione 9.2.2 *Sia $Y = C^0(X)$ (ove X è uno spazio metrico compatto) oppure $Y = L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ (ove X è uno spazio misurato). Allora ogni elemento $F \in Y^*$ si può scrivere nella forma $F = G - H$ ove $G, H \in Y^*$ e G, H sono funzionali positivi.*

Dimostrazione Fissato $F \in Y^*$, definiamo il funzionale G ponendo per ogni $\varphi \in Y$

$$G\varphi = \begin{cases} \sup\{Fg : 0 \le g \le \varphi\} & \text{se } \varphi \ge 0 \\ G\varphi^+ - G\varphi^- & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\}$ (e le disuguaglianze sono da intendersi q.o. nel caso che sia $Y = L^p(X)$); definiamo poi il funzionale H in modo che valga la tesi:

$$H\varphi = G\varphi - F\varphi.$$

Si tratta ora di provare che G e H sono funzionali lineari, continui e positivi. Procederemo in varie tappe.

(1) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi \ge 0$, allora $G\varphi \ge 0$ e $H\varphi \ge 0$; quindi G e H sono funzionali positivi.

Infatti per definizione si ha $G\varphi \ge F(0) = 0$, e $G\varphi \ge F\varphi$.

(2) Se $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ e $\varphi_1, \varphi_2 \ge 0$, allora $G(\varphi_1 + \varphi_2) = G\varphi_1 + G\varphi_2$.

Infatti, se $0 \le g_1 \le \varphi_1$ e $0 \le g_2 \le \varphi_2$, allora $0 \le g_1 + g_2 \le \varphi_1 + \varphi_2$ e quindi $G(\varphi_1 + \varphi_2) \ge F(g_1 + g_2) = Fg_1 + Fg_2$; per l'arbitrarietà di g_1 e g_2 si deduce $G(\varphi_1 + \varphi_2) \ge G\varphi_1 + G\varphi_2$. D'altra parte, se $0 \le g \le \varphi_1 + \varphi_2$, ponendo

$$g_1(x) = \min\{g(x), \varphi_1(x)\}, \qquad g_2(x) = g(x) - g_1(x),$$

si ha $0 \le g_1 \le \varphi_1$ e $g_2 = g - g_1 = \max\{g - \varphi_1, 0\}$, da cui $0 \le g_2 \le \varphi_2$. Ne segue

$$G\varphi_1 + G\varphi_2 \ge Fg_1 + Fg_2 = F(g_1 + g_2) = Fg,$$

e pertanto, per l'arbitrarietà di g, $G\varphi_1 + G\varphi_2 \ge G(\varphi_1 + \varphi_2)$.

(3) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi = \psi - \gamma$, con $\psi, \gamma \ge 0$, allora $G\varphi = G\psi - G\gamma$; in altre parole, il valore di $G\varphi$ è indipendente dal modo in cui scriviamo φ come differenza di funzioni non negative.

Ricordiamo che per definizione $G\varphi = G\varphi^+ - G\varphi^-$, ove $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\}$; quindi se $\varphi = \psi - \gamma$ si ha $\varphi^+ + \gamma = \psi + \varphi^-$, e dunque dalla proprietà (2) si deduce $G\varphi^+ + G\gamma = G\psi + G\varphi^-$, da cui la tesi.

(4) $G(\varphi_1 + \varphi_2) = G\varphi_1 + G\varphi_2$ per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$.

Infatti $\varphi_1 + \varphi_2 = (\varphi_1^+ + \varphi_2^+) - (\varphi_1^- + \varphi_2^-)$, da cui la tesi per (3) e (2).

(5) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi \ge 0$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c > 0$.

Infatti, per definizione di G,

$$G(c\varphi) = \sup\{Fg : 0 \le g \le c\varphi\} = c \sup\left\{F\left(\frac{g}{c}\right) : 0 \le \frac{g}{c} \le \varphi\right\} = c\, G\varphi.$$

(6) Se $\varphi \in Y$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c > 0$.

Infatti, dalla definizione e da (5) si deduce

$$G(c\varphi) = G(c\varphi^+) - G(c\varphi^-) = c\, G\varphi^+ - c\, G\varphi^- = c\, G\varphi.$$

(7) Se $\varphi \in Y$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c \leq 0$.

Infatti, se $c = 0$ il risultato è ovvio; se $c < 0$ si ha da (3) e (5)

$$\begin{aligned} G(c\varphi) &= G(|c|\varphi^- - |c|\varphi^+) = G(|c|\varphi^-) - G(|c|\varphi^+) = \\ &= |c|G\varphi^- - |c|G\varphi^+ = c\, G\varphi^+ - c\, G\varphi^- = c\, G\varphi. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato la linearità di G, e dunque, per differenza, anche quella di H. Rimane da verificare che G e H sono elementi di Y^*: in effetti si ha per ogni $\varphi \in Y$

$$\begin{aligned} |G\varphi| &\leq G\varphi^+ + G\varphi^- = G(|\varphi|) = \sup\{Fg : 0 \leq g \leq |\varphi|\} \leq \\ &\leq \|F\|_{Y^*} \sup\{\|g\|_Y : 0 \leq g \leq |\varphi|\} = \|F\|_{Y^*}\|\varphi\|_Y. \end{aligned}$$

Ciò prova che G (e quindi anche H) è un operatore limitato. La proposizione è dimostrata. □

La dimostrazione del teorema di Riesz-Fischer si conclude subito: se $F \in (L^p)^*$, si scrive $F = G - H$ con G, H funzionali positivi di $(L^p)^*$, e per il 2$^{\text{O}}$ passo esistono due funzioni $\varphi, \psi \in L^q$, entrambe q.o. non negative, tali che

$$Gg = \int_X g\varphi\, d\mu, \quad Hg = \int_X g\psi\, d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Quindi, posto $f = \varphi - \psi$, si ha $f \in L^q$ e

$$Fg = \int_X gf\, d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Ciò prova il teorema. □

Osservazioni 9.2.3 (1) Se la misura μ non è σ-finita, il teorema di Riesz-Fischer non è vero per $p = 1$, come mostrano gli esercizi 7.3.7, 7.3.8 e 9.2.2; invece per $p \in]1, \infty[$ il teorema vale ancora (esercizio 9.2.5).

(2) Come si vedrà in seguito, per $p = \infty$ il teorema di Riesz-Fischer è falso, ossia l'inclusione $L^1 \subset (L^\infty)^*$, che vale in virtù dell'esempio 7.3.6 (3), è propria (vedere anche l'esercizio 9.2.4).

(3) Il teorema di Riesz-Fischer si estende al caso degli spazi L^p di funzioni complesse, nel senso che per ogni $F \in (L^p)^*$, $1 \leq p < \infty$, esiste un'unica $f \in L^q$ tale che

$$Fg = \int_X g\overline{f}\, d\mu \qquad \forall g \in L^p$$

(vedere l'esercizio 9.2.1).

Esercizi 9.2

1. Si deduca il caso complesso del teorema di Riesz-Fischer dal caso reale.

2. Siano $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0,1] : E$, oppure E^c, è numerabile$\}$, $\nu =$ misura "cardinalità". Si provi che la funzione $xf(x)$ appartiene a L^1 per ogni $f \in L^1$, e che, posto $Fg = \int_0^1 xg(x)d\nu$, si ha $F \in (L^1)^*$, ma non esiste alcuna $f \in L^\infty$ per cui si abbia $Fg = \int_0^1 fg\, d\nu$ per ogni $g \in L^1$.

3. Sia μ una misura σ-finita, e sia $p \in [1,\infty]$. Se f è una funzione misurabile tale che $fg \in L^1$ per ogni $g \in L^p$, si provi che $f \in L^q$, ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. Sia $X = \{a,b\}$, e poniamo $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$. Caratterizzare gli spazi $L^p(X,\mu)$ e i loro duali.

5. Si provi che se $1 < p < \infty$ il teorema di Riesz-Fischer vale anche per misure non σ-finite.
[**Traccia:** sia Σ la famiglia degli insiemi misurabili che sono σ-finiti, ossia sono unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita. Fissato $F \in (L^p)^*$, per ogni $E \in \Sigma$ si mostri che esiste un'unica funzione $f_E \in L^q$, nulla fuori di E, tale che $Fg = \int_X gf_E\, d\mu$ per ogni $g \in L^p$; si provi anche che se $E, E' \in \Sigma$ ed $E \subseteq E'$ si ha $f_E = f_{E'}$ q.o. in E. Posto poi $\lambda(E) = \int_X |f_E|^q\, d\mu$ per ogni $E \in \Sigma$, si provi che λ è una funzione crescente rispetto all'inclusione e limitata superiormente. Scelta una successione $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ tale che $\lambda(E_n) \to m = \sup_\Sigma \lambda(E)$, si provi che $H = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ è un elemento di Σ per cui $\lambda(H) = m$. Se ne deduca che, posto $f = f_H$, si ha $f = f_E$ q.o. in E per ogni $E \in \Sigma$, e che se $g \in L^q$, posto $N = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, risulta $N \in \Sigma$ e $Fg = \int_X gf_{N\cup H}\, d\mu = \int_X gf\, d\mu$. Si verifichi infine che $\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$.]

6. Sia $F \in (C^0[a,b])^*$ un funzionale positivo. Si provi che esiste un'unica funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, continua a sinistra, con $f(a) = 0$ e tale che
$$Fg = \int_a^b g\, d\mu_f \qquad \forall g \in C^0[a,b],$$
ove μ_f è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f.
[**Traccia:** per l'unicità, si ragioni per assurdo e si approssimi $\chi_{[a,t[}$ dal basso con funzioni continue. Per l'esistenza, per ogni $t \in]a,b]$ si definisca, per n sufficientemente grande,
$$h_{t,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \leq t - \frac{1}{n} \\ n(t-x) & \text{se } t - \frac{1}{n} \leq x \leq t \\ 0 & \text{se } t \leq x \leq b. \end{cases}$$
Si verifichi che esiste $f(t) = \lim_{n\to\infty} Fh_{t,n}$ per ogni $t \in]a,b]$; posto $f(t) = 0$ per ogni $t \leq a$ e $f(t) = F\chi_{[a,b]} = \|F\|$ per ogni $t > b$, si verifichi che f è crescente e che $f(a) = 0$. Posto poi, per $t \in]a,b]$ e n sufficientemente grande,
$$k_{t,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \leq t - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{t-x-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} & \text{se } t - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x \leq t - \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{se } t - \frac{1}{n^2} \leq x \leq b, \end{cases}$$

si provi che $\|h_{t,n} - k_{t,n}\|_\infty = \frac{1}{n}$ e che $Fh_{t,n} \le Fk_{t,n} + \frac{1}{n}\|F\| \le f(t - \frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n}\|F\|$; se ne deduca che f è continua a sinistra. Consideriamo ora la misura μ_f; fissiamo $g \in C^0[a,b]$ e, dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ per $|x - x'| < \delta$. Se $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ con $t_k - t_{k-1} < \frac{\delta}{2}$, si definiscano ψ costante a tratti e $\varphi_n \in C^0[a,b]$ (per $n > \frac{2}{\delta}$) nel modo seguente:

$$\psi = \sum_{k=1}^{m} g(t_k)\chi_{[t_{k-1},t_k[} + g(b)\chi_{\{b\}},$$

$$\varphi_n = g(t_1)h_{t_1,n} + \sum_{k=2}^{m} g(t_k)[h_{t_k,n} - h_{t_{k-1},n}] + g(b)[\chi_{[a,b]} - h_{b,n}];$$

si dimostri che $\|g - \psi\|_\infty \le \varepsilon$ e che $\|g - \varphi_n\|_\infty \le 2\varepsilon$, e se ne deduca che $|Fg - F\varphi_n| \le 2\varepsilon\|F\|$ e $|\int_a^b g\, d\mu_f - \int_a^b \psi\, d\mu_f| \le \varepsilon\|F\|$. Si provi d'altra parte che $F\varphi_n \to \int_a^b \psi\, d\mu_f \ldots$]

7. Si caratterizzi il duale di $C^0[a,b]$.
[**Traccia:** fare uso dell'esercizio precedente e della proposizione 9.2.2.]

Capitolo 10

Operatori lineari

10.1 Estensione di funzionali lineari

Questo capitolo è dedicato allo studio di alcuni fra i principali teoremi dell'analisi funzionale: si tratta di importanti risultati relativi alla struttura ed alle proprietà degli operatori lineari fra spazi normati o di Banach, che trovano assai frequente utilizzazione nei più svariati campi dell'analisi e della matematica applicata.
Il primo enunciato di cui ci occupiamo riguarda la possibilità di estendere a tutto lo spazio funzionali lineari definiti su sottospazi, senza alterarne la norma. Premettiamo la seguente

Definizione 10.1.1 *Sia X uno spazio normato, sia $p : X \to \mathbb{R}$. Il funzionale p è detto* positivamente omogeneo *(o, più semplicemente, benché impropriamente,* omogeneo*) se si ha*

$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha > 0.$$

Il funzionale p è detto subadditivo *se*

$$p(x + y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Osservazioni 10.1.2 **(1)** Se p è omogeneo, allora $p(0) = 0$, in quanto $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2\, p(0)$; inoltre se $\alpha < 0$ si ha $p(\alpha x) = p((-\alpha)(-x)) = -\alpha\, p(-x)$per ogni $x \in X$.

(2) Se p è omogeneo e subadditivo, allora p è convesso: infatti per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) = \lambda\, p(x) + (1 - \lambda)\, p(y).$$

Viceversa, se p è omogeneo e convesso, allora p è subadditivo: infatti per ogni $x, y \in X$ risulta

$$p(x + y) = p\left(2\frac{x + y}{2}\right) = 2\, p\left(\frac{x + y}{2}\right) \le 2\left[\frac{1}{2}\, p(x) + \frac{1}{2}\, p(y)\right] = p(x) + p(y).$$

I funzionali omogenei e subadditivi coincidono dunque con quelli omogenei e convessi. Si può dimostrare facilmente (esercizio 10.1.1) che essi coincidono anche con quelli subadditivi e convessi tali che $p(0) = 0$. Invece nessuna di queste tre proprietà, da sola,

implica le altre (esercizio 10.1.2).
Ad esempio, sono funzionali omogenei e convessi in uno spazio normato: la norma, ogni funzionale lineare, ed anche il valore assoluto di un funzionale lineare; un altro esempio importante è quello dei cosiddetti *funzionali di Minkowski* associati ai sottoinsiemi convessi di X (esercizio 10.1.3).
Il problema di estendere un funzionale lineare, definito su un sottospazio M propriamente contenuto in uno spazio normato X, senza alterarne la norma, è di facile soluzione se, ad esempio, $X = \mathbb{R}^N$ e $M = \mathbb{R}^k$ con $k < N$, ma non è altrettanto facile in generale, a meno che X non sia uno spazio di Hilbert (nel qual caso si rimanda all'esercizio 8.2.1). Il teorema che segue fornisce una risposta molto generale a questa questione.

Teorema 10.1.3 (di Hahn-Banach) *Sia X uno spazio normato reale, e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale positivamente omogeneo e subadditivo. Siano inoltre M un sottospazio proprio di X e $f : M \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che $fx \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Allora esiste almeno un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ tale che $F|_M = f$ e $Fx \le p(x)$ per ogni $x \in X$.*

Osserviamo che se si sceglie $p(x) = c\|x\|$, allora si ha $f \in M^*$ e $F \in X^*$, in quanto per ipotesi
$$|fx| = \max\{fx, f(-x)\} \le c\|x\| \qquad \forall x \in M,$$
e dal teorema segue
$$|Fx| = \max\{Fx, F(-x)\} \le c\|x\| \qquad \forall x \in X;$$
in particolare, prendendo $c = \|f\|_{M^*}$, otteniamo anche $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.
Notiamo inoltre che se X è uno spazio di Hilbert e $p(x) = \|f\|_{M^*}\|x\|_X$, allora in virtù del teorema di Riesz-Fréchèt l'estensione è unica ed è nulla su $M^\perp$ (esercizio 8.2.1).

Dimostrazione Per ipotesi, esiste $z \in X \setminus M$. Il primo passo della dimostrazione consiste nell'estendere f allo spazio $M_1 = [M, z]$ generato da M e da z, definendo l'estensione f_1 nel modo seguente:
$$f_1(x + tz) = fx + tc \qquad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R},$$
ove $c \in \mathbb{R}$ è una costante da fissare (se possibile!) in modo che risulti
$$fx + tc = f_1(x + tz) \le p(x + tz) \qquad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Dividendo per t ed usando l'omogeneità si ricavano le condizioni
$$f\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) \qquad \forall x \in M,\ \forall t > 0,$$
$$f\left(\frac{x}{t}\right) + c \ge -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) \qquad \forall x \in M,\ \forall t < 0,$$
ossia, essendo M un sottospazio,
$$c \le p(y + z) - fy \quad \forall y \in M, \qquad c \ge -p(-y' - z) - fy' \quad \forall y' \in M.$$

D'altra parte, usando la subadditività di p si ha per ogni $y, y' \in M$:

$$fy - fy' = f(y - y') \leq p(y - y') = p((y + z) - (y' + z)) \leq p(y + z) + p(-y' - z),$$

cioè

$$-p(-y' - z) - fy' \leq p(y + z) - fy \qquad \forall y, y' \in M.$$

Dunque possiamo scegliere $c \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\sup_{y' \in M} \{-p(-y' - z) - fy'\} \leq c \leq \inf_{y \in M} \{p(y + z) - fy\},$$

ed in generale ci sarà più di una scelta possibile per c.
Se nello spazio X vi è una successione $\{z_n\}$ tale che $X = [\{z_n\}]$ (è il caso, per esempio, di c_{00}), si può ripetere il procedimento sopra descritto, ottenendo estensioni successive su $M_1 = [M, z_1]$, su $M_2 = [M_1, z_2]$, ed induttivamente su $M_n = [M_{n-1}, z_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$; dato che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, resterà infine definita un'estensione F su X, la quale verificherà la tesi del teorema.
Ma in generale questo non accadrà, e quindi occorre seguire un'altra strada. Ricorriamo al lemma di Zorn (lemma 8.3.11): consideriamo le coppie (g, N) ove N è un sottospazio di X contenente M e $g : N \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare tale che $g|_M = f$ e $gx \leq p(x)$ per ogni $x \in N$; l'insieme P a cui applicare il lemma di Zorn sarà costituito da tutte queste coppie, ordinate nel modo seguente:

$$(g, N) \leq (g', N') \qquad \iff \qquad N \subseteq N' \text{ e } g'|_N = g.$$

Si noti che P non è vuoto perché $(f, M) \in P$, ed è chiaro che $\leq$ è una relazione d'ordine su P. Sia $Q \subseteq P$ un insieme totalmente ordinato: sarà $Q = \{(g_i, N_i)\}_{i \in I}$, ove I è un qualunque insieme di indici. Definiamo

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i\,, \qquad gx = g_i x \text{ se } x \in N_i;$$

una facile verifica mostra che $(g, N) \in P$ e che $(g_i, N_i) \leq (g, N)$ per ogni $i \in I$, ossia (g, N) è un maggiorante per Q. Per il lemma di Zorn, esiste allora un elemento $(F, N_0) \in P$ che è massimale per P; questo implica $N_0 = X$, altrimenti la procedura esposta all'inizio della dimostrazione permetterebbe di ottenere un'estensione propria di F, contraddicendo la massimalità di (F, N_0). Ciò mostra che F è l'estensione di f richiesta. $\square$

Osservazione 10.1.4 Il teorema di Hahn-Banach vale anche negli spazi normati complessi, modificando opportunamente l'enunciato ed anche la definizione di funzionale omogeneo: si veda l'esercizio 10.1.6.

Il teorema di Hahn-Banach ha alcune importanti conseguenze.

Corollario 10.1.5 *Se X è uno spazio normato con $X \neq \{0\}$, e $x_0 \in X \setminus \{0\}$, allora esiste $F \in X^*$ tale che $\|F\|_{X^*} = 1$ e $Fx_0 = \|x_0\|_X$.*

Dimostrazione Scegliamo $p(x) = \|x\|_X$, e sul sottospazio 1-dimensionale $M = [\{x_0\}]$ poniamo

$$f(tx_0) = t\|x_0\|_X \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente f è lineare e si ha

$$f(tx_0) = t\|x_0\|_X \le |t|\|x_0\|_X = \|tx_0\|_X = p(tx_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(tx_0) = t\|x_0\|_X \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad Fx \le \|x\|_X \quad \forall x \in X;$$

in particolare $Fx_0 = \|x_0\|_X$ e

$$|Fx| = \max\{Fx, F(-x)\} \le \|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

e ciò prova che $\|F\|_{X^*} = 1$. $\Box$

In particolare il corollario precedente mostra che se $X \ne \{0\}$ allora $X^* \ne \{0\}$.

Corollario 10.1.6 *Sia X uno spazio normato e sia M un sottospazio proprio di X. Se $x_0 \in X \setminus M$ e se $d(x_0, M) = \delta > 0$, allora esiste $F \in X^*$ tale che*

$$\|F\|_{X^*} = 1, \qquad F|_M = 0, \qquad Fx_0 \ge \delta.$$

Dimostrazione Scegliamo $p(x) = \|x\|_X$, e sul sottospazio $M' = [M, x_0]$ poniamo

$$f(x + tx_0) = t\delta \qquad \forall x \in M, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente f è lineare, f è nullo su M e, per definizione di δ,

$$f(x + tx_0) = t\delta \le |t| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|_X = \|x + tx_0\|_X = p(x + tx_0) \quad \forall x \in M, \ \forall t \ne 0.$$

Il teorema di Hahn-Banach fornisce allora un'estensione lineare G di f a tutto X, tale che

$$Gx_0 = \delta, \qquad |Gx| = \max\{Gx, G(-x)\} \le \|x\|_X \quad \forall x \in X;$$

dato che $\|G\|_{X^*} \le 1$, il funzionale $F = G/\|G\|_{X^*}$ è quello cercato. $\Box$

Corollario 10.1.7 *L'inclusione $L^1 \subseteq (L^\infty)^*$ è in generale stretta.*

Dimostrazione Ricordiamo che l'inclusione è valida in virtù dell'esempio 7.3.6 (3). Consideriamo lo spazio misurato $([0,1], \mathcal{M}, m)$. Supponiamo, per assurdo, che ogni funzionale $F \in (L^\infty(0,1))^*$ si rappresenti nella forma

$$Fg = \int_0^1 g(t)h(t)\,dt \qquad \forall g \in L^\infty(0,1)$$

per un'opportuna funzione $h \in L^1(0,1)$. Consideriamo il funzionale lineare f da $C^0[0,1]$ in $\mathbb{R}$ definito da $fg = g(0)$: ovviamente si ha $|fg| \le \|g\|_\infty$ per ogni $g \in C^0[0,1]$; quindi per il teorema di Hahn-Banach esiste $F \in (L^\infty(0,1))^*$ tale che

$$Fg \le \|g\|_\infty \quad \forall g \in L^\infty(0,1), \qquad F|_{C^0[0,1]} = f.$$

Detta h la funzione di $L^1(0,1)$ che rappresenta F, si ha allora

$$1 = f(e^{-nt}) = F(e^{-nt}) = \int_0^1 e^{-nt} h(t)\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ma ciò è assurdo in quanto, per convergenza dominata, l'ultimo membro tende a 0 per $n \to \infty$. $\square$

Esempio 10.1.8 Sia T un elemento di $(\ell^\infty)^*$: dunque T è lineare ed esiste $C \geq 0$ tale che

$$|Tu| \leq C\|u\|_\infty \qquad \forall u \in \ell^\infty.$$

In particolare, naturalmente,

$$|Tu| \leq C\|u\|_\infty \qquad \forall u \in c_0\,.$$

ossia la restrizione $T_0 = T|_{c_0}$ appartiene a c_0^* e $\|T_0\|_{c_0^*} \leq C$. Per l'esercizio 7.3.21, si ha $c_0^* \simeq \ell^1$, ossia esiste $y \in \ell^1$ tale che

$$Tu = T_0 u = \sum_{n=1}^\infty u_n\, y_n \qquad \forall u \in c_0\,,$$

ove, per l'esattezza, $y_n = Te_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, essendo e_n l'n-simo elemento della base canonica.
L'operatore $T_0 : c_0 \to \mathbb{R}$ ha dunque due estensioni a ℓ^∞: una è T, l'altra è l'operatore $\overline{T} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definito da

$$\overline{T}u = \sum_{n=1}^\infty u_n\, y_n \qquad \forall u \in \ell^\infty.$$

Non è detto che sia $T = \overline{T}$: scegliamo, ad esempio, l'operatore lineare S, definito nello spazio c delle successioni reali convergenti da

$$Su = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad \forall u \in c.$$

Utilizzando il teorema di Hahn-Banach, sia T_S una estensione lineare e continua di S allo spazio ℓ^∞: per questo operatore la restrizione T_0 sopra costruita è l'operatore nullo su c_0:

$$T_0 u = Su = \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad \forall u \in c_0.$$

Quindi l'operatore $T_0 = 0 : c_0 \to \mathbb{R}$ ha due estensioni distinte a ℓ^∞: una è l'operatore $\overline{T} = 0$, l'altra è T_S, che ovviamente almeno su $c \setminus c_0$ è non nullo. In conclusione, non può esistere un isomorfismo fra $(\ell^\infty)^*$ e $\ell^1 \simeq c_0^*$, perché un tale operatore $j : (\ell^\infty)^* \to c_0^*$ non potrebbe essere iniettivo: si avrebbe $j(\overline{T}) = j(0) = 0$ e $j(T_S) = 0$.

Esercizi 10.1

1. Sia X uno spazio normato e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale subadditivo e convesso con $p(0) = 0$; si provi che p è positivamente omogeneo.

2. Si provi che:

   (i) se $X = \mathbb{R}$ e $p(x) = \sqrt{|x|}$, p è subadditivo ma non positivamente omogeneo né convesso;

   (ii) se $X = \mathbb{R}^2$ e $p(x, y) = x^2 + y^2$, p è convesso ma non positivamente omogeneo né subadditivo;

   (iii) se $X = \mathbb{R}^2$ e $p(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$, p è positivamente omogeneo ma non subadditivo né convesso.

3. (*Funzionale di Minkowski*) Sia X uno spazio normato e sia $K \subseteq X$ un insieme convesso che abbia 0 come punto interno. Poniamo

$$p_K(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in K \right\} \qquad \forall x \in X.$$

   Si verifichi che l'insieme di cui $p_K(x)$ è l'estremo inferiore non è vuoto, e si provi che:

   (i) p_K è un funzionale positivamente omogeneo e subadditivo;

   (ii) esiste $M > 0$ tale che $p_K(x) \le M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$;

   (iii) $p_K(x) \le 1$ per ogni $x \in K$.

   [**Traccia:** per la subadditività, siano $r, s > 0$ tali che x/r e y/s stiano in K e $r < p_K(x) + \varepsilon$, $s < p_K(y) + \varepsilon$; allora usando la convessità di K si mostri che $\frac{x+y}{r+s} \in K$ e se ne deduca che $p_K(x + y) \le p_K(x) + p_K(y) + 2\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.]

4. Si determini il funzionale di Minkowski relativo ai seguenti insiemi convessi K:

   (i) X spazio normato, $K = X$;

   (ii) X spazio normato, $K = \{x \in X : \|x\| \le R\}$;

   (iii) $X = \ell^2$, $K = \{x \in \ell^2 : |x_j| \le 1\}$, con $j \in \mathbb{N}$ fissato;

   (iv) $X = \mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \le c\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ fissati.

5. Sia $X = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$, e sia $K = \{x \in c_{00} : |x_n| < 2^{-n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Si verifichi che K ha parte interna vuota ma che malgrado ciò il funzionale di Minkowski di K è ben definito.

6. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$, e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale subadditivo e tale che $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ per ogni $x \in X$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$. Siano poi M un sottospazio proprio di X e $f : M \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare tale che $|fx| \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Provare che esiste $F : X \to \mathbb{C}$ lineare, tale che $F|_M = f$ e $|Fx| \le p(x)$ per ogni $x \in X$.

[**Traccia:** utilizzando il teorema 10.1.3 si costruisca un'estensione reale G del funzionale reale Ref; si definisca poi $Fx = Gx - i\,G(ix)$ e si verifichi che F estende f e che deve essere $|Fx| \le p(x)$.]

7. Sia X uno spazio normato e sia $K \subset X$ un convesso aperto contenente 0. Si provi che per ogni $x_0 \in X \setminus K$ esiste $F \in X^*$ tale che $Fx \le Fx_0$ per ogni $x \in K$.
[**Traccia:** sia $f : [\{x_0\}] \to \mathbb{R}$ definita da $f(tx_0) = t$; si verifichi che $fx \le p_K(x)$ per ogni $x \in [\{x_0\}]$, si applichi il teorema di Hahn-Banach e si provi che l'estensione F verifica la tesi.]

8. Sia X uno spazio normato e siano K, M sottoinsiemi convessi di X, non vuoti e disgiunti, con K aperto. Si provi che esiste $F : X \to \mathbb{R}$ lineare e non nullo che *separa* K e M, ossia verifica
$$\sup_{x\in K} Fx \le \inf_{y\in M} Fy.$$
[**Traccia:** posto $H = K - M = \{x = y - z : y \in K,\ z \in M\}$, si verifichi che H è un convesso aperto che non contiene 0, e si applichi l'esercizio precedente.]

9. Siano K, M convessi dello spazio normato X, non vuoti e disgiunti. Se K è chiuso e M è compatto, si provi che esiste $F \in X^*$ che separa K e M strettamente, ossia
$$\sup_{x\in K} Fx < \inf_{y\in M} Fy.$$
[**Traccia:** si provi che $K_\varepsilon = K + B(0,\varepsilon)$ e $M_\varepsilon = M + B(0,\varepsilon)$ sono convessi aperti non vuoti, e sono disgiunti per ε sufficientemente piccolo; si scelga $F \in X^* \setminus \{0\}$ che li separa, e si deduca che $\sup_K F \le \inf_M F - 2\varepsilon \|F\|_{X^*}$.]

10. Sia M un sottospazio di uno spazio normato X. Si provi che M è denso in X se e solo se per ogni $F \in X^*$ vale l'implicazione
$$F|_M = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F = 0.$$

11. Sia M un sottospazio chiuso e proprio dello spazio normato X. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X \setminus M$ tale che $\|x_\varepsilon\| = 1$ e $\|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$ per ogni $x \in M$.

12. Siano X, Y spazi normati con X diverso da $\{0\}$. Si provi che $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach se e solo se lo è Y.

13. Siano $g, f_1, \ldots, f_n$ funzionali lineari e continui sullo spazio normato X. Si provi che risulta
$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \subseteq \ker g$$
se e solo se g è combinazione lineare degli f_k.
[**Traccia:** per la necessità si consideri l'operatore $T : X \to \mathbb{R}^n$ definito da $Tx = (f_1x, \ldots, f_nx)$, e sia poi $h : R(T) \to \mathbb{R}$ data da $h(Tx) = gx$; si verifichi che h è ben definita e continua, e poi si applichi il teorema di Hahn-Banach.]

14. Per ogni $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \in \ell^\infty$ e per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$T_m x = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k\,,$$

e consideriamo il sottospazio

$$M = \{x \in \ell^\infty : \; \exists\, Tx = \lim_{m\to\infty} T_m x\}.$$

Si provi che esiste un funzionale lineare e continuo $\overline{T} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, detto *limite di Banach*, tale che:

(i) $\overline{T}x = Tx$ per ogni $x \in M$;

(ii) $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \overline{T}x \le \limsup_{n\to\infty} x_n$ per ogni $x \in \ell^\infty$;

(iii) $\overline{T}x = \overline{T}(\tau x)$ per ogni $x \in \ell^\infty$, ove $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ è l'operatore di "shift" definito da $(\tau x)_n = x_{n+1}$.

[**Traccia:** si applichi il teorema di Hahn-Banach a $p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$.]

10.2 Uniforme limitatezza di operatori

Un altro fondamentale risultato dell'analisi funzionale permette di trasformare una stima puntuale per un'arbitraria famiglia di operatori lineari e limitati in una stima uniforme. Più precisamente, vale il seguente enunciato:

Teorema 10.2.1 (di Banach-Steinhaus) *Sia X uno spazio di Banach e sia Y uno spazio normato; sia inoltre $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una qualsiasi famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X,Y)$. Se risulta*

$$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_Y < \infty \qquad \forall x \in X,$$

allora

$$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty;$$

se invece esiste $z \in X$ tale che $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha z\|_Y = \infty$, allora

$$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_Y = +\infty \qquad \forall x \in D,$$

ove D è un sottoinsieme denso in X.

Dimostrazione È necessario fare uso di un importante risultato di topologia generale: il teorema di Baire.

Teorema 10.2.2 (di Baire) *Sia (Z,d) uno spazio metrico completo. Se $\{V_n\}$ è una successione di aperti densi in Z, allora la loro intersezione è un insieme denso in Z (in particolare è non vuota).*

Dimostrazione Sia W un aperto non vuoto di Z. Poiché V_1 è denso in Z, l'aperto $W \cap V_1$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_1, r_1)}$ con $r_1 < 1$; poiché V_2 è denso in Z, l'aperto $B(x_1, r_1) \cap V_2$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_2, r_2)}$ con $r_2 < \frac{1}{2}$, e procedendo induttivamente si ottiene che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'aperto $B(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})}$ con $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Si ha allora

$$d(x_i, x_j) \leq r_n < \frac{1}{n} \qquad \forall i, j \geq n,$$

da cui, per la completezza di Z, esiste $x \in Z$ tale che $x_n \to x$; si ha anzi $d(x_n, x) \leq r_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Pertanto

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

In particolare, l'insieme $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ è non vuoto. $\square$

Veniamo alla dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus. Poniamo

$$\varphi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_Y, \qquad V_n = \{x \in X : \varphi(x) > n\}.$$

Ciascun V_n è aperto in X: infatti se $x \in V_n$, allora per definizione di $\varphi(x)$ esiste $\alpha \in A$ tale che $\|T_\alpha x\|_Y > n$; quindi per la continuità di T_α esiste una palla $B(x, \delta)$ tale che $\|T_\alpha z\|_Y > n$ per ogni $z \in B(x, \delta)$, da cui a maggior ragione $\varphi(z) > n$ per ogni $z \in B(x, \delta)$: ciò mostra che $B(x, \delta) \subseteq V_n$ e dunque V_n è aperto.
Adesso i casi sono due: risulta $\varphi(x) < \infty$ per ogni $x \in X$, oppure al contrario esiste $z \in X$ tale che $\varphi(z) = +\infty$. Nel primo caso, non tutti gli aperti V_n possono essere densi in X, altrimenti per il teorema di Baire dedurremmo che l'insieme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x \in X : \varphi(x) = +\infty\}$$

sarebbe non vuoto. Dunque almeno uno fra i V_n non è denso in X, ossia esistono $n_0 \in \mathbb{N}^+$, $x_0 \in X$ e $r > 0$ per i quali

$$\|x - x_0\|_X \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) \leq n_0;$$

di conseguenza se $\|x'\|_X \leq r$ si ha

$$\|T_\alpha x'\|_Y = \|T_\alpha(x' + x_0) - T_\alpha x_0\|_Y \leq 2n_0 \qquad \forall \alpha \in A,$$

da cui, se $\|x\|_X \leq 1$

$$\|T_\alpha x\|_Y = \frac{1}{r} \|T_\alpha(rx)\|_Y \leq \frac{2n_0}{r} \qquad \forall \alpha \in A.$$

In definitiva, nel caso in cui $\varphi(x) < \infty$ per ogni $x \in X$ abbiamo ricavato che

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Nel caso contrario, in cui esiste $z \in X$ per cui $\varphi(z) = +\infty$, avremo a maggior ragione

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \frac{\varphi(z)}{\|z\|_X} = +\infty;$$

quindi ciascun V_n deve essere denso in X (altrimenti, per l'argomentazione precedente, dedurremmo che $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$). Ma allora per il teorema di Baire l'insieme $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ è addirittura denso in X e si ha $\varphi(x) = +\infty$ per ogni $x \in D$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus. $\square$

Osservazione 10.2.3 Se ci accontentiamo di provare solo il primo enunciato del teorema di Banach-Steinhaus, vi è una dimostrazione elementare che non fa uso del teorema di Baire. Supponiamo, per assurdo, che sia

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = +\infty;$$

allora esiste una successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $x_0 = 0$ e costruiamo induttivamente una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ nel modo seguente: nota x_{n-1}, scegliamo, in virtù dell'esercizio 10.2.1, $x_n \in B(x_{n-1}, 3^{-n})$ tale che

$$\|T_n x_n\|_Y > \frac{2}{3^{n+1}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\,.$$

È facile verificare che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, dato che per $m > n$ si ha

$$\|x_m - x_n\|_X \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|_X \leq \sum_{k=n}^{m-1} 3^{-k-1} < \frac{1}{2 \cdot 3^n}\,.$$

Detto x il limite della successione $\{x_n\}$, si ha $\|x - x_n\|_X \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$; pertanto

$$\|T_n x\|_Y \geq \|T_n x_n\|_Y - \|T_n(x - x_n)\|_Y > \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right] \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Ciò mostra che

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_Y = +\infty,$$

il che contraddice l'ipotesi.

Vediamo un'applicazione del teorema precedente alla convergenza puntuale delle serie di Fourier di funzioni continue. Introduciamo lo spazio di Banach

$$C^0_{\#}[-\pi.\pi] = \{f \in C^0[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\},$$

munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Se f è una funzione di tale spazio, in particolare $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e quindi la sua serie di Fourier, relativa al sistema trigonometrico, converge a f nella norma $\|\cdot\|_2$. Possiamo scrivere le somme parziali della serie di Fourier di f nel modo seguente:

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt,$$

ove il *nucleo di Dirichlet* D_n è definito da

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, \qquad t \in \mathbb{R};$$

moltiplicando $D_n(t)$ per $e^{\pm it/2}$ e sottraendo le relazioni ottenute, si vede subito che

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{se } t \neq 0 \\ 2n+1 & \text{se } t = 0; \end{cases}$$

in particolare, D_n è una funzione reale. Quindi, fissato $x \in [-\pi,\pi]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il funzionale

$$T_n f = S_n f(x) \qquad \forall f \in C^0_\#[-\pi,\pi]$$

è lineare e continuo con

$$\|T_n\|_{(C^0_\#[-\pi,\pi])^*} \leq \frac{\|D_n\|_1}{2\pi} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ed anzi vale l'uguaglianza, come si vede prendendo una successione $\{g_j\} \subset C^0_\#[-\pi,\pi]$ tale che $0 \leq g_j \leq 1$ e $\lim_{j\to\infty} g_j(t) = \operatorname{sgn} D_n(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che

$$\|T_n\|_{(C^0_\#[-\pi,\pi])^*} = \frac{\|D_n\|_1}{2\pi} \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin s| \frac{ds}{s}\,,$$

e poiché la funzione $s \mapsto \frac{|\sin s|}{s}$ non è sommabile in $[0,\infty[$, si conclude che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{(C^0_\#[-\pi,\pi])^*} = +\infty.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus si deduce che esiste un insieme D, intersezione di aperti densi in $C^0_\#[-\pi,\pi])$ e dunque esso stesso denso in $C^0_\#[-\pi,\pi])$, tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty \qquad \forall f \in D.$$

In definitiva, c'è un insieme denso di funzioni continue la cui serie di Fourier non converge puntualmente nel punto x, che era stato fissato arbitrariamente in $[-\pi,\pi]$. Un raffinamento di questo risultato è descritto nell'esercizio 10.2.10.

Esercizi 10.2

1. Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operatore fra due spazi normati. Si provi che per ogni $x_0 \in X$ e $r > 0$ si ha
$$\sup_{x \in B(x_0,r)} \|Tx\|_Y \geq r\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\,.$$

2. Per ogni $r > 0$ sia $B_r = \{f \in L^2(a,b)\} : \|f\|_2 \leq r\}$. Si provi che $B_r \subset L^1(a,b)$, e che B_r è un chiuso in $L^1(a,b)$ privo di punti interni. Se ne deduca che l'inclusione $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ è propria.

3. Sia $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, con X spazio di Banach e Y spazio normato. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione $\{T_n x\}$ converga in Y. Si provi che:

   (i) la successione $\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\}$ è limitata;

   (ii) $x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$ è un elemento T di $\mathcal{L}(X,Y)$;

   (iii) si ha $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

4. Sia X uno spazio normato e sia B un sottoinsieme di X^*. Se per ogni $x \in X$ l'insieme $\{Tx : T \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$, si provi che B è limitato in X^*.

5. Sia X uno spazio di Banach e sia B un sottoinsieme di X. Se per ogni $T \in X^*$ l'insieme $T(B)$ è limitato in $\mathbb{R}$, si provi che B è limitato in X.
[**Traccia:** per ogni $x \in B$ si consideri il funzionale $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definito da $J_x(T) = Tx$.]

6. Si consideri lo spazio $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : c_{00} \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_k x = kx_k$. Si provi che T_k è lineare e continuo, che
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k x| < +\infty \qquad \forall x \in c_{00}\,,$$
ma che $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = +\infty$. Giustificare il risultato.

7. Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo
$$T_k : c_0 \to \mathbb{R}, \qquad T_k a = \sum_{h=0}^{k} x_h a_h \quad \forall a = \{a_n\} \in c_0.$$

   (i) Provare che $\|T_k\|_{c_0^*} = \sum_{h=0}^{k} |x_h|$.

   (ii) Supponiamo che per ogni $a \in c_0$ la successione reale $\{T_k a\}$ abbia limite finito; si provi allora che il funzionale
   $$T : c_0 \to \mathbb{R}, \qquad Ta = \lim_{k\to\infty} T_k a$$
   è lineare e continuo, con
   $$\|T\|_{c_0^*} = \sum_{h=0}^{\infty} |x_h|,$$
   e che $T_k \to T$ in c_0^*.

8. Sia $a = \{a_n\}$ una successione reale.
   (i) Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente per ogni successione $b = \{b_n\} \in \ell^1$, si provi che $a \in \ell^\infty$;
   (ii) se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente per ogni successione $b = \{b_n\} \in c_0$, si provi che $a \in \ell^1$.

9. Sia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$, con X spazio di Banach e Y spazio normato. Se risulta
$$\sup_{\alpha\in A} |\varphi(T_\alpha x)| < +\infty \qquad \forall x \in X, \ \forall \varphi \in Y^*,$$
si provi che $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$.

10. Si provi che esiste un insieme D denso in $C^0_\#[-\pi, \pi]$, tale che per ogni $f \in D$ l'insieme
$$\left\{ x \in [-\pi, \pi] : \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty \right\}$$
è denso in $[-\pi, \pi]$.

10.3 Applicazioni aperte

Gli operatori lineari fra spazi di Banach godono di una importante proprietà topologica, assai utile nelle applicazioni. Essa è espressa dal seguente enunciato:

Teorema 10.3.1 (dell'applicazione aperta) *Siano X ed Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è un operatore surgettivo, allora T è un'* applicazione aperta*, ossia per ogni aperto $A \subseteq X$ l'insieme $T(A)$ è aperto in Y.*

Osserviamo che se T non è lineare il teorema non vale: ad esempio se $X = Y = \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 - x$ è continua e surgettiva, ma non lineare, e trasforma l'aperto $]-\infty, 0[$ nell'insieme $]-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ che non è aperto.

Dimostrazione Siano U, V le palle unitarie in X e Y rispettivamente: la tesi del teorema equivale a dire che esiste $\delta > 0$ tale che $\delta V \subseteq T(U)$ (ove $\delta V = \{\delta y : y \in V\}$ è la palla di centro 0 e raggio δ in Y). Infatti, se vale questa condizione ed A è un aperto di X, fissato $y_0 \in T(A)$ (dunque $y_0 = Tx_0$ con $x_0 \in A$) e scelto $r > 0$ in modo che $x_0 + rU = B(x_0, r) \subseteq A$, si ha
$$B(y_0, r\delta) = y_0 + r\delta V \subseteq Tx_0 + T(rU) = T(B(x_0, r)) \subseteq T(A),$$
e quindi $T(A)$ è aperto; viceversa, se T è un'applicazione aperta allora $T(U)$ è aperto in Y e quindi contiene una palla δV centrata nel proprio punto $T(0) = 0$.
Dimostriamo dunque che esiste $\delta > 0$ per cui $\delta V \subseteq T(U)$. Proveremo la tesi in tre passi.

1º passo $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{T(kU)}$.

Infatti, essendo T surgettivo, ogni $y \in Y$ è immagine di qualche $x \in X$; sarà $\|x\|_X < k$

per qualche $k \in \mathbb{N}^+$, da cui $y \in T(kU) \subseteq \overline{T(kU)}$.

2^{O} passo Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ ed $\varepsilon > 0$ c'è un $x \in X$ che verifica $\|x\|_X < \frac{1}{\delta}\|y\|_Y$ e $\|y - Tx\|_Y < \varepsilon$.

Anzitutto, per il teorema di Baire almeno uno fra gli insiemi $\overline{T(kU)}$ ha parte interna non vuota; quindi esistono $k \in \mathbb{N}^+$ ed un aperto $W \subseteq Y$ tali che $W \subseteq \overline{T(kU)}$. Dunque, scelto $y_0 \in W$, esiste $\eta > 0$ tale che $B(y_0, \eta) \subseteq W$, da cui

$$\eta V = B(0, \eta) \subseteq \overline{T(kU)} - y_0 \subseteq \overline{T(2kU)}.$$

D'ora in poi k, W ed η sono fissati. Dalla relazione precedente segue che

$$y \in B(0, 2\|y\|_Y) = 2\|y\|_Y V \subseteq \overline{T\left(\frac{4k}{\eta}\|y\|_Y U\right)} \qquad \forall y \in Y;$$

dunque, per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in \frac{4k}{\eta}\|y\|_Y U$ tale che $\|y - Tx\|_Y < \varepsilon$: questa è esattamente la tesi del 2^{O} passo con $\delta = \frac{\eta}{4k}$.

3^{O} passo Proviamo la tesi del teorema.

Applicheremo il 2^{O} passo iterativamente. Sia $\delta = \frac{\eta}{4k}$. Fissati $\varepsilon > 0$ e $y \in \delta V$, per il 2^{O} passo esiste $x_1 \in X$ tale che

$$\|x_1\|_X < \frac{1}{\delta}\|y\|_Y < 1, \qquad \|y - Tx_1\|_Y < \frac{\delta\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, in corrispondenza di $y - Tx_1$ esiste $x_2 \in X$ tale che

$$\|x_2\|_X < \frac{1}{\delta}\|y - Tx_1\|_Y < 2^{-1}\varepsilon, \qquad \|y - Tx_1 - Tx_2\|_Y < 2^{-2}\delta\varepsilon,$$

e procedendo induttivamente, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $x_{n+1} \in X$ tale che

$$\|x_{n+1}\|_X < \frac{1}{\delta}\left\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\right\|_Y < 2^{-n}\varepsilon, \qquad \left\|y - \sum_{k=1}^{n+1} Tx_k\right\|_Y < 2^{-(n+1)}\delta\varepsilon.$$

Poniamo ora $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; poiché X è completo, la successione $\{s_n\}$, che è di Cauchy in X, converge ad un elemento $x \in X$ per il quale risulta

$$\|x\|_X \leq \|x_1\|_X + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k\|_X < 1 + \varepsilon;$$

inoltre, per continuità, $Ts_n \to Tx$ in y. D'altra parte si ha, per costruzione, $Ts_n \to y$, e dunque $y = Tx \in T((1+\varepsilon)U)$; ne segue, per l'arbitrarietà di y, $\delta V \subseteq T((1+\varepsilon)U)$, ossia

$$T(U) \supseteq \frac{\delta}{1+\varepsilon}V \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

In definitiva

$$T(U) \supseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} \frac{\delta}{1+\varepsilon}V = \delta V.$$

Ciò prova la tesi. $\square$

Corollario 10.3.2 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se T è bigettivo, allora T è un isomorfismo, ossia $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Dimostrazione Ovviamente T^{-1} è lineare; inoltre per il teorema dell'applicazione aperta T trasforma aperti in aperti e dunque la controimmagine di un aperto mediante T^{-1} è un aperto. Pertanto T^{-1} è continua e quindi $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. Notiamo in particolare che si ha

$$\|x\|_X \le c\|Tx\|_Y \qquad \forall x \in X,$$

ove $c = \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$. $\square$

Corollario 10.3.3 (teorema del grafico chiuso) *Siano X ed Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Se T è un operatore* chiuso, *ossia il grafico G_T di T è un sottoinsieme chiuso dello spazio prodotto $X \times Y$, allora $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Osserviamo che se T è non lineare il risultato è falso: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, ha grafico chiuso pur essendo discontinua.

Dimostrazione Dall'esercizio 7.3.10 segue che $X \times Y$ è uno spazio di Banach con la norma $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$; poiché G_T è chiuso in $X \times Y$, $(G_T, \|\cdot\|_{X\times Y})$ è uno spazio di Banach. L'applicazione $\Gamma : G_T \to X$ definita da

$$\Gamma(x,Tx) = x \qquad \forall (x,Tx) \in G_T$$

è ben definita, lineare e, ovviamente, continua con norma non superiore a 1. Inoltre Γ è bigettiva; quindi, per il corollario precedente, Γ è un isomorfismo ed in particolare esiste $c > 0$ tale che

$$\|(x,Tx)\|_{X\times Y} \le c\|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

da cui $c \ge 1$ e $\|Tx\|_Y \le (c-1)\|x\|_X$ per ogni $x \in X$, cioè la tesi. $\square$

Osservazioni 10.3.4 (1) Un operatore lineare T, definito su un sottospazio M di uno spazio normato X, a valori in uno spazio normato Y, è chiuso se e solo se vale l'implicazione seguente:

$$\{x_n\} \subseteq M, \quad x_n \to x \text{ in } X, \quad Tx_n \to y \text{ in } Y \quad \Longrightarrow \quad x \in M \quad \text{e} \quad Tx = y.$$

Infatti ciò significa esattamente che G_T è chiuso in $X \times Y$.

(2) Come vedremo nell'esempio successivo, il teorema del grafico chiuso è falso in generale se X non è completo, oppure se X è completo ma T è definito su un sottospazio proprio e non chiuso di X (le due cose sono equivalenti, dato che ogni spazio normato non completo è sottospazio non chiuso dello spazio di Banach costituito dal suo completamento).

Nelle applicazioni, ad esempio nel campo delle equazioni differenziali, si incontrano spesso operatori chiusi non continui; l'esempio principale è il seguente:

Esempio 10.3.5 Consideriamo l'operatore *derivata prima*:

$$A : C^1[a,b] \to C^0[a,b], \qquad Af = f' \quad \forall f \in C^1[a,b].$$

Rispetto alle norme naturali di $C^1[a,b]$ e di $C^0[a,b]$, l'operatore derivata è lineare e continuo con norma uguale a 1: infatti ovviamente

$$\|Af\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1[a,b]},$$

e d'altra parte prendendo le funzioni $f_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin \frac{x-a}{\varepsilon}$, con $0 < \varepsilon < \frac{2}{\pi}(b-a)$, si ottiene subito

$$\|Af_\varepsilon\|_\infty = 1, \qquad \|f_\varepsilon\|_{C^1[a,b]} = \varepsilon + 1$$

e dunque

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C^1[a,b],C^0[a,b])} \ge \frac{1}{1+\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Notiamo che A è surgettivo: ogni $g \in C^0[a,b]$ è la derivata delle funzioni $c + \int_a^x g(t)dt$, che sono tutte in $C^1[a,b]$. Quindi A è un'applicazione aperta. La restrizione di A al sottospazio

$$M = \{f \in C^1[a,b] : f(x_0) = 0\} \qquad (x_0 \text{ punto fissato di } [a,b]),$$

è anche iniettiva, perché ogni $g \in C^0[a,b]$ ha come unica controimmagine in M la soluzione del problema di Cauchy $f' = g, f(x_0) = 0$; quindi $A|_M$ è un isomorfismo. In effetti si ha

$$(A|_M)^{-1} g(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt,$$

ed è immediato verificare che

$$\|(A|_M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(C^0[a,b],C^1[a,b])} = 1 + \max\{b - x_0, x_0 - a\}.$$

Cambiamo punto di vista, mettendo su $C^1[a,b]$ la norma $\|\cdot\|_\infty$: allora $C^1[a,b]$ diventa un sottospazio non chiuso di $C^0[a,b]$, ovvero uno spazio normato non completo. L'operatore A agisce allora nello spazio $C^0[a,b]$: il suo *dominio*, definito da

$$D(A) = \{f \in C^0[a,b] : Af = f' \in C^0[a,b]\},$$

è il sottospazio $C^1[a,b]$ di $C^0[a,b]$. In questo modo A non è più continuo, perché scegliendo $f_n(x) = (x-a)^n$ si trova subito

$$\|f_n'\|_\infty = n(b-a)^{n-1}, \qquad \|f_n\|_\infty = (b-a)^n,$$

e dunque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|f_n'\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

Tuttavia A è un operatore chiuso: infatti se $\{(f_n, f_n')\}$ è una successione del grafico G_A che converge nella norma dello spazio prodotto ad un elemento (f,g) (ossia $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$), passando al limite nella relazione

$$f_n(x) - f_n(x') = \int_{x'}^x f_n'(t)dt \qquad \forall x, x' \in [a,b]$$

si trova subito che

$$f(x) - f(x') = \int_{x'}^{x} g(t)dt \qquad \forall x, x' \in [a, b],$$

da cui è facile dedurre, dividendo per $x - x'$ e facendo tendere x' ad x, che f è derivabile e $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$: dunque $f \in C^1[a, b]$ e $Af = g$, ovvero $(f, g) \in G_A$. Quindi G_A è chiuso.

Esercizi 10.3

1. Sia X uno spazio normato e sia M un sottospazio di X. Si consideri l'operatore di restrizione $r : X^* \to M^*$, definito da

$$r(F) = F|_M \qquad \forall F \in X^*.$$

(i) Si verifichi che $r \in \mathcal{L}(X^*, M^*)$ e se ne calcoli la norma.

(ii) L'operatore r è iniettivo? è surgettivo?

(iii) Si provi che r è un'applicazione aperta.

2. Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore surgettivo. Si provi che esiste $c > 0$ dotata della seguente proprietà:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \quad Tx = y \quad \text{e} \quad \|x\|_X \le c\|y\|_Y \, .$$

3. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Si provi che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $R(T)$ è chiuso in H;

(ii) $R(T^*)$ è chiuso in H (si ricordi l'esercizio 8.2.3);

(iii) $R(T) = (\ker T^*)^\perp$;

(iv) $R(T^*) = (\ker T)^\perp$;

(v) esiste $c > 0$ tale che $\|x\| \le c\|Tx\|$ per ogni $x \in (\ker T)^\perp$;

(vi) esiste $c' > 0$ tale che $\|y\| \le c'\|T^*y\|$ per ogni $y \in (\ker T^*)^\perp$.

4. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore iniettivo. Si provi che

$$\|x\|_{R(T)} = \|T^{-1}x\|_X$$

è una norma in $R(T)$ e che $R(T)$ è uno spazio di Banach con tale norma. Si verifichi poi che l'immersione $i : R(T) \to X$ è continua e se ne calcoli la norma.

5. Sia X uno spazio di Banach e siano M, N sottospazi chiusi di X tali che $M \cap N = \{0\}$. Posto $Z = \{x = a + b : a \in M, \ b \in N\}$, si provi che Z è chiuso in X se e solo se esiste $c > 0$ tale che

$$\|a\|_X \le c\|a + b\|_X \qquad \forall a \in M, \quad \forall b \in N.$$

[**Traccia:** supponendo Z chiuso si dimostri che $P : Z \to M$, definito da $P(a+b) = a$, è un operatore chiuso.]

6. Sia $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$, e sia $T : M \to \mathbb{R}$ definito da $Tf(t) = tf(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si provi che M è denso in $L^1(\mathbb{R})$ e che T è chiuso ma non continuo.

7. Sia X uno spazio normato, sia M un sottospazio di X e sia $T : M \to \mathbb{R}$ un operatore lineare.

   (i) Se M è chiuso in X e T è continuo, si provi che T è chiuso. Cosa può succedere se M non è chiuso?

   (ii) Se X è completo, M è chiuso in X e T è chiuso, si provi che T è continuo. Cosa può succedere se M non è chiuso?

   (iii) Se T è chiuso, è vero che T trasforma insiemi chiusi in insiemi chiusi?

8. Si provi che l'operatore derivata prima $A = \frac{d}{dt} : AC[a,b] \to L^1(a,b)$ è continuo rispetto alle norme naturali di questi spazi, ed è chiuso, ma non continuo, se lo si definisce come operatore nello spazio $L^1(a,b)$ con dominio $D(A) = AC[a,b]$.

9. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T : H \to H$ un operatore lineare autoaggiunto (vedere l'esercizio 8.2.4). Si provi che $T \in \mathcal{L}(H)$.
   [**Traccia:** si mostri che T è un operatore chiuso.]

10. Sia M un sottospazio di $C^0[a,b]$ chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_2$; si provi che M ha dimensione finita.
    [**Traccia:** si verifichi che $(M, \|\cdot\|_\infty)$ e $(M, \|\cdot\|_2)$ sono spazi di Banach e si deduca che esiste $c > 0$ tale che $\|u\|_\infty \le c\|u\|_2$ per ogni $u \in M$; poi, se $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale completo in M, si fissi $y \in [a,b]$ e si definisca $v(x) = \sum_{n=0}^{N} \overline{e_n(y)} e_n(x)$: si verifichi che $v \in M$ e si ricavi la maggiorazione $\sum_{n=0}^{N} |e_n(y)|^2 \le c^2$. Infine si integri rispetto a y su $[a,b]$... .]

11. Per ogni $f \in L^1(-\pi, \pi)$ si definiscano i coefficienti di Fourier rispetto al sistema trigonometrico:
$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

    (i) Si provi che $\gamma_k \to 0$ per $|k| \to \infty$.

    (ii) Posto
$$c_0(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \lim_{|k| \to \infty} x_k = 0\},$$
    si verifichi che l'applicazione $Tf = \{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è lineare e continua da $L^1(-\pi, \pi)$ in $c_0(\mathbb{Z})$ con norma uguale a $\frac{1}{2\pi}$.

    (iii) Si provi che T è iniettiva, ma non surgettiva.

10.4 Operatore aggiunto

Questo paragrafo è dedicato all'importante nozione di "aggiunto" di un operatore lineare, nozione già incontrata, in un caso particolare, negli esercizi 8.2.4 e successivi. Dati due spazi normati complessi X, Y, considereremo operatori lineari $A : D(A) \subseteq X \to Y$, ove $D(A)$, il *dominio* di A, è un opportuno sottospazio di X: abbiamo già incontrato questa situazione nell'esempio 10.3.5.
Sia dunque $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare. Poniamo

$$M = \{\varphi \in Y^* : \varphi \circ A : D(A) \to \mathbb{C} \text{ è continuo nella norma di } X\};$$

ovviamente M è un sottospazio di Y^*. Fissato $\varphi \in M$, per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale $\Phi \in Y^*$ tale che $\Phi|_{D(A)} = \varphi \circ A$. Tale funzionale non è in generale unico; se però $D(A)$ è denso in X, allora l'estensione da $\varphi \circ A$ a Φ è unica.
Supporremo allora che $D(A)$ sia denso in X.

Definizione 10.4.1 *Siano X e Y spazi normati e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare con dominio denso. L'operatore lineare $A^* : D(A^*) \to X^*$ dato da*

$$D(A^*) = M, \qquad A^*\varphi = \Phi \quad \forall \varphi \in M,$$

ove M e Φ sono definiti come sopra, si chiama operatore aggiunto *di A; esso è caratterizzato dalla relazione*

$$(A^*\varphi)x = \varphi(Ax) \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall \varphi \in D(A^*).$$

Un caso importante è quello in cui $D(A) = X$ e A è continuo: in questo caso si ha

Proposizione 10.4.2 *Siano X, Y spazi normati. Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora risulta $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}.$$

Dimostrazione Se $A = 0$ la tesi è ovvia: supponiamo dunque $A \neq 0$. Anzitutto

$$\|A^*\varphi\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

da cui $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. D'altra parte, sia $x \in X$ tale che $Ax \neq 0$: posto $y = \frac{Ax}{\|Ax\|_Y}$, per il teorema di Hahn-Banach (più precisamente per il corollario 10.1.5) esiste $\varphi \in Y^*$ tale che $\|\varphi\|_{Y^*} = 1$ e $\varphi y = \|y\|_Y = 1$. Dunque $\varphi(Ax) = \|Ax\|_Y$ e pertanto

$$\|Ax\|_Y = \varphi(Ax) \leq \|A^*\varphi\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}\|x\|_X,$$

da cui $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$. $\square$

Le principali proprietà degli aggiunti sono elencate nell'enunciato che segue.

Proposizione 10.4.3 *Siano X, Y, Z spazi normati. Valgono i fatti seguenti:*

(i) *Se $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

(ii) *Se* $\alpha \in \mathbb{C}$ *e* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*, allora* $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

(iii) *Se* $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *e* $B \in \mathcal{L}(X,Y)$*, allora* $(AB)^* = B^*A^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$.

(iv) *Se* $A \in \mathcal{L}(X)$ *ed esiste* $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$*, allora esiste anche* $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$ *e si ha* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Dimostrazione Le verifiche sono tutte facili; in particolare, per (iv) si osservi che risulta $(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I : X^* \to X^*$, e si applichi (iii). □

Osservazione 10.4.4 Se $X = Y = H$, con H spazio di Hilbert, la nozione di operatore aggiunto va precisata, in accordo con quanto esposto negli esercizi 8.2.3 e 8.2.4. Indichiamo con $j : H \to H^*$ l'isomorfismo canonico fornito dal teorema di Riesz-Fréchèt, tale che

$$\varphi x = (x, j^{-1}\varphi)_H \qquad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*.$$

Se $A \in \mathcal{L}(H)$, per la proposizione 10.4.2 si ha $A^* \in \mathcal{L}(H^*)$ e risulta

$$(x, j^{-1}(A^*\varphi))_H = A^*\varphi(x) = \varphi(Ax) = (Ax, j^{-1}\varphi)_H \qquad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*,$$

ossia, posto $y = j^{-1}\varphi$,

$$(x, (j^{-1}A^*j)y)_H = (Ax, y)_H \qquad \forall x, y \in H.$$

Nel caso di operatori $A \in \mathcal{L}(H)$ è consuetudine identificare l'operatore aggiunto $A^* \in \mathcal{L}(H^*)$ con l'operatore $j^{-1}A^*j \in \mathcal{L}(H)$. Nel seguito indicheremo senz'altro con A^*, nel caso Hilbertiano, l'operatore $j^{-1}A^*j$; quindi A^* sarà un elemento di $\mathcal{L}(H)$ e sarà caratterizzato dalla relazione

$$(x, A^*y)_H = (Ax, y)_H \qquad \forall x, y \in H.$$

È necessario però osservare che, con questa identificazione, l'applicazione di $\mathcal{L}(H)$ in sé, definita da $A \mapsto A^*$, è *antilineare*, ossia risulta

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^* \qquad \forall A, B \in \mathcal{L}(H), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

in contrasto con la proposizione 10.4.3: questo fatto è conseguenza dell'antilinearità dell'isomorfismo canonico j (osservazione 8.2.2).

Definizione 10.4.5 *Sia* H *uno spazio di Hilbert. Un operatore* $A : D(A) \subseteq H \to H$*, con dominio* $D(A)$ *denso in* H*, si dice* autoaggiunto *se si ha* $D(A^*) = D(A)$ *e* $A^* = A$ *(nel senso dell'osservazione 10.4.4), ossia se*

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall y \in D(A^*).$$

Esempi 10.4.6 **(1)** Sia $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ un operatore lineare: allora, scelte su $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ le basi canoniche, A si rappresenta con una matrice $\{a_{ij}\}$ $m \times n$. L'aggiunto A^* si rappresenta con la matrice trasposta coniugata $\{\overline{a_{ji}}\}$. Infatti

$$z = Ax \qquad \iff \qquad z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

da cui

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{m} z_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overline{y_i} = \sum_{j=1}^{m} x_j \overline{\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}} y_i} = (x, A^* y).$$

In particolare, A è autoaggiunto se e solo se la matrice $\{a_{ij}\}$ è reale e simmetrica.

(2) Sia $H = L^2(a, b)$, sia $K \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$ e consideriamo l'*operatore integrale* $A : H \to H$ definito (si veda l'esempio 9.1.8) da

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy, \quad x \in]a, b[\,, \qquad \forall f \in H.$$

Allora si verifica facilmente che $A \in \mathcal{L}(H)$ e che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(\,]a,b[\,\times\,]a,b[\,)}.$$

Inoltre, utilizzando il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}(Af, g)_H &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy\right] \overline{g(x)}\, dx = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) \overline{g(x)}\, dx\right] f(y)\, dy = \\ &= \int_a^b \overline{\left[\int_a^b \overline{K(x, y)} g(x)\, dx\right]}\, dy = (f, A^* g)_H,\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$A^* g(y) = \int_a^b \overline{K(x, y)} g(x)\, dx \quad y \in]a, b[\,, \qquad \forall g \in H.$$

In particolare, A è autoaggiunto se e solo se $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Osservazione 10.4.7 Tramite il lemma di Zorn è possibile costruire in ogni spazio di Banach X un operatore lineare non continuo, con dominio uguale a X. Per semplicità, ci limitiamo al caso di $X = \ell^2$ e consideriamo un fissato operatore lineare non limitato $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$: per esempio, poniamo $(Ax)_n = nx_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in D(A)$, ove

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Dato che $Ae_n = n\, e_n$ per ogni elemento e_n della base, è chiaro che A non è limitato. Sia adesso $\mathcal{E}$ l'insieme di tutte le estensioni di A, ossia di tutti gli operatori lineari $A' : D(A') \subseteq \ell^2 \to \ell^2$ tali che $D(A') \supseteq D(A)$ e $A'x = Ax$ per $x \in D(A)$. L'insieme $\mathcal{E}$ è non vuoto, poiché $A \in \mathcal{E}$, ed è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione dei dominî. Inoltre, ogni catena totalmente ordinata in $\mathcal{E}$ ha un elemento massimale, definito sull'unione dei dominî degli elementi della catena. Quindi, per il lemma di Zorn esiste in $\mathcal{E}$ un elemento massimale A''. Se fosse $D(A'') \subset \ell^2$, scelto $v \in D(A'')^c$ potremmo definire un'estensione A' di A'' su $D(A') = \{x + tv : x \in D(A'')\}$, ponendo ad esempio $A'(x + tv) = A''x$ per ogni $x + tv \in D(A')$. Ma ciò contraddice la massimalità di A'', e pertanto $D(A'') = \ell^2$.

Esercizi 10.4

1. Determinare A^*, essendo $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Fissata $\alpha \in \ell^\infty$, sia $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = \alpha_n x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Determinare A^* e verificare che:

   (i) $AA^* = A^*A$;

   (ii) A è autoaggiunto se e solo se $\alpha_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (iii) $AA^* = A^*A = I$ se e solo se $|a_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. Dato l'operatore $B \in \mathcal{L}(\ell^2)$, definito da $(Bx)_0 = 0$ e $(Bx)_n = x_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si determini B^* e si verifichi che $B^*B = I$ mentre $BB^* \neq I$.

4. Sia $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione bigettiva e si consideri l'operatore $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{i(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che $A^*A = AA^*$. L'operatore A è autoaggiunto?

5. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A : D(A) \subseteq H \to H$ lineare e autoaggiunto. Si provi che A è un operatore chiuso (corollario 10.3.3), e che se $D(A) = H$ allora A è continuo.

6. Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineare e iniettivo, con dominio $D(A)$ denso in X e immagine $R(A)$ densa in Y. Si provi che $(A^*)^{-1}$ esiste e coincide con $(A^{-1})^*$. Si provi anche che A^{-1} è continuo se e solo se $(A^*)^{-1}$ è continuo.

7. Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare chiuso. Si provi che allora $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$ è chiuso.

8. Sia $K(x, y) = 1 + \frac{1}{2} e^{2\pi i(x-y)}$, $x, y \in [0, 1]$, e sia A l'operatore dell'esempio 10.4.6 (2) in $L^2(0, 1)$. Si provi che
$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} < \|K\|_{L^2(]0,1[\times]0,1[)} .$$
   [**Traccia:** per calcolare la norma di Af si utilizzi l'uguaglianza di Bessel per il sistema $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.]

9. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che T^* sia surgettivo. Si provi che T è invertibile e $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

10.5 Riflessività

Introduciamo ora una nozione, quella di riflessività, che pur essendo di natura algebrica, condiziona fortemente la geometria dello spazio: infatti, fra tutti gli spazi di Banach, quelli riflessivi sono i più vicini, per ricchezza di proprietà, agli spazi di Hilbert.
Sia dunque X uno spazio di Banach, sia X^* il suo duale, e sia $X^{**} = (X^*)^*$ il duale

del duale, o *biduale* di X. Vi è una immersione naturale di X nel suo biduale X^{**}, che indichiamo con J e che è così definita: ad ogni $x \in X$ associamo il funzionale $J_x \in X^{**}$ che agisce su X^* nel modo seguente:

$$J_x(T) = Tx \qquad \forall T \in X^*.$$

L'applicazione $J : X \to X^{**}$ è chiaramente lineare, perché per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oppure $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) si ha

$$J_{\lambda x+\mu x'}(T) = T(\lambda x + \mu x') = \lambda Tx + \mu Tx' = \lambda J_x(T) + \mu J_{x'}(T) \quad \forall T \in X^*.$$

Inoltre J è continua, poiché per ogni $x \in X$ risulta

$$|J_x(T)| = |Tx| \le \|T\|_{X^*}\|x\|_X \qquad \forall T \in X^*,$$

da cui $\|J_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$; ma scegliendo, grazie al corollario 10.1.5, un elemento $T_0 \in X^*$ tale che $\|T_0\|_{X^*} = 1$ e $T_0x = \|x\|_X$, si trova

$$|J_x(T_0)| = |T_0x| = \|x\|_X = \|T_0\|_{X^*}\|x\|_X,$$

e dunque

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Pertanto l'applicazione J è un'isometria fra X e la sua immagine $J(X) \subseteq X^{**}$. Essa si chiama *immersione canonica* di X in X^{**}. L'immagine $J(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**} (esercizio 10.5.1), in generale strettamente contenuto in X^{**}.

Definizione 10.5.1 *Diciamo che lo spazio di Banach X è* riflessivo *se risulta $J(X) = X^{**}$, ossia l'immersione canonica J è surgettiva.*

Nelle proposizioni che seguono illustriamo alcune proprietà degli spazi riflessivi.

Proposizione 10.5.2 *Sia X uno spazio di Banach; allora X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.*

Dimostrazione Sia X^* riflessivo. Se, per assurdo, esistesse $\alpha \in X^{**} \setminus J(X)$, per il corollario 10.1.5 potremmo trovare un elemento $\Lambda \in X^{***}$ tale che $\Lambda|_{J(X)} = 0$ e $\Lambda(\alpha) \neq 0$. Per la riflessività di X^*, si avrebbe $\Lambda = J^*_F$ con $F \in X^*$ (ove J^* è l'immersione canonica di X^* in X^{***}); tale F verificherebbe per ogni $y \in X$

$$Fy = J_yF = J^*_FJ_y = \Lambda J_y = 0,$$

ossia avremmo $F = 0$, il che però è assurdo essendo $J^*_F = \Lambda \neq 0$.
Sia ora X riflessivo. Allora ogni $\alpha \in X^{**}$ è della forma $\alpha = J_x$ con $x \in X$, da cui $J^*_F(\alpha) = \alpha(F) = J_x(F) = Fx$ per ogni $F \in X^*$; quindi, dato $\Lambda \in X^{***}$, l'operatore $\Lambda \circ J$ è un elemento di X^* e risulta per ogni $\beta = J_y \in X^{**}$

$$\Lambda\beta = \Lambda(J_y) = (\Lambda \circ J)y = J_y(\Lambda \circ J) = \beta(\Lambda \circ J) = J^*_{\Lambda\circ J}\beta,$$

ossia $\Lambda = J^*_{\Lambda\circ J} \in J^*(X^*)$. Ciò prova che X^* è riflessivo. $\square$

Proposizione 10.5.3 *Sia M un sottospazio chiuso dello spazio di Banach X; se X è riflessivo, allora M è riflessivo.* $\square$

Dimostrazione Ovviamente, $(M, \|\cdot\|_X)$ è uno spazio di Banach. Se $\alpha \in M^{**}$, detta F_r la restrizione a M di un arbitrario funzionale $F \in X^*$, si vede subito che $F \mapsto \alpha(F_r)$ è un elemento $\beta \in X^{**}$. Sia x l'elemento di X tale che $J_x = \beta$; supponendo per assurdo che $x \notin M$, per il corollario 10.1.5 troveremmo un funzionale $G \in X^*$ tale che $Gx \neq 0$ e $G_r = 0$. Ma allora avremmo

$$0 = \alpha(G_r) = \beta G = J_x(G) = Gx \neq 0,$$

e ciò è impossibile. Dunque si ha $x \in M$. Per ogni $F \in M^*$, detta J^M l'immersione canonica di M in M^{**} e detta $\overline{F}$ una qualunque estensione di F a tutto X, si ha allora

$$\alpha(F) = \alpha(\overline{F}_r) = \beta(\overline{F}) = J_x(\overline{F}) = \overline{F}x = \overline{F}_r x = Fx = J_x^M F,$$

ossia $\alpha = J_x^M$. Ciò mostra che X è riflessivo. $\square$

Proposizione 10.5.4 *Se lo spazio di Banach X ha dimensione finita, allora X è riflessivo.*

Dimostrazione Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base per X, sia $\{f^1, \ldots, f^n\}$ la *base duale* di X^* (cioè quella tale che $f^i(e_j) = \delta_{ij}$), e sia $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ la base di X^{**} tale che $\alpha_k(f^i) = \delta_{ki}$. Si ha allora per ogni $F = \sum_{h=1}^n c_h f^h \in X^*$

$$J_{e_i}(F) = F(e_i) = \sum_{h=1}^n c_h f^h(e_i) = c_i, \qquad \alpha_i(F) = \sum_{h=1}^n c_h \alpha_i(f^h) = c_i.$$

Dunque $\alpha_i = J_{e_i}$ e di conseguenza se $\alpha = \sum_{h=1}^n b_h \alpha_h$ è un elemento di X^{**}, posto $x = \sum_{h=1}^n b_h e_h$ si ha $\alpha = J_x$. Pertanto X è riflessivo. $\square$

Vediamo qualche esempio.

Esempi 10.5.5 (1) Ogni spazio di Hilbert H è riflessivo. Infatti, sia $\alpha \in H^{**}$ e consideriamo l'isomorfismo antilineare $j : H \to H^*$ fornito dal teorema di Riesz-Fréchèt, che ad ogni $z \in H$ associa il funzionale $j_z \in H^*$ definito da $j_z(x) = (x, z)_H$ per ogni $x \in H$; allora il funzionale $x \mapsto \overline{\alpha \circ j}(x)$ è lineare, dunque è un elemento di H^*, e sarà pertanto della forma $\overline{\alpha \circ j} = j_u$ per uno ed un solo $u \in H$, che dipenderà da α. Quindi si ha

$$\overline{\alpha(j_x)} = \overline{\alpha \circ j}(x) = j_u(x) = (x, u)_H \qquad \forall x \in H.$$

Sia adesso T un arbitrario elemento di H^*, quindi $T = j_z$ con $z \in H$: si ha, per definizione di immersione canonica J,

$$\alpha(T) = \alpha(j_z) = \overline{(z, u)_H} = (u, z)_H = j_z(u) = Tu = J_u(T),$$

e pertanto $\alpha = J_u$. Ciò prova che $J : H \to H^{**}$ è surgettiva.

(2) Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, allora $L^p(X)$ è riflessivo per ogni $p \in]1, \infty[$. Infatti, sia $\alpha \in (L^p)^{**}$: proveremo che esiste una funzione $a \in L^p$ (necessariamente unica, essendo J un'isometria) tale che $J_a = \alpha$. Sia $q \in]1, \infty[$ l'esponente coniugato di p; indichiamo con $i_q : L^q \to (L^p)^*$ l'isometria bigettiva lineare indotta dal teorema di Riesz-Fischer, definita dalla relazione

$$[i_q f](g) = \int_X g f \, d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Dimostreremo che $\alpha = J_a$, ove $a = i_p^{-1}(\alpha \circ i_q)$. Si noti che $\alpha \circ i_q$ è un elemento di $(L^q)^*$ in virtù della relazione

$$|\alpha(i_q f)| \leq \|\alpha\|_{(L^p)^{**}} \|i_q f\|_{(L^p)^*} = \|\alpha\|_{(L^p)^{**}} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q;$$

dunque, come è giusto, $a = i_p^{-1}(\alpha \circ i_q)$ è un elemento di L^p. Sia $F \in (L^p)^*$ e sia f l'unico elemento di L^q per cui $F = i_q f$: si ha allora, dalle definizioni di i_p ed i_q,

$$J_a(F) = F(a) = \int_X f a \, d\mu = i_p a(f) = (\alpha \circ i_q)(f) = \alpha(F).$$

Pertanto $\alpha = J_a$ e ciò prova che $J : L^p \to (L^p)^{**}$ è surgettivo, ossia L^p è riflessivo. Si noti che, indicando con J^p e J^q le immersioni canoniche di L^p ed L^q (ove naturalmente $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) nei rispettivi biduali, si ha

$$J^p_f(i_q g) = \int_X f g \, d\mu = \int_X g f \, d\mu = J^q_g(i_p f) \qquad \forall f \in L^p, \quad \forall g \in L^q.$$

(3) Lo spazio L^1 non è riflessivo in generale. Ad esempio, sappiamo dal teorema di Riesz-Fischer che il duale di $L^1(a,b)$ è isomorfo ed isometrico a $L^\infty(a,b)$ mediante l'applicazione i_∞ che ad ogni $f \in L^\infty(a,b)$ associa il funzionale $[i_\infty f](g) = \int_a^b g(t) f(t)\, dt$ per ogni $g \in L^1(a,b)$; quindi, detta $J^1 : L^1(a,b) \to (L^1(a,b))^{**}$ l'immersione canonica, l'immagine di J^1 in $(L^1(a,b))^{**}$ è

$$J^1(L^1(a,b)) = \Bigg\{ \alpha \in (L^1(a,b))^{**} : \\ \exists h \in L^1(a,b) : \alpha(i_\infty f) = \int_a^b f(t) h(t)\, dt \ \forall f \in L^\infty(a,b) \Bigg\}.$$

Ma se consideriamo una qualunque estensione $\overline{\Lambda}$ a $L^\infty(a,b)$ del funzionale

$$\Lambda f = f(a) \qquad \forall f \in C^0[a,b],$$

allora $\overline{\Lambda} \circ i_\infty^{-1}$ è un elemento di $(L^1(a,b))^{**}$ che non può stare in $J^1(L^1(a,b))$: infatti in tal caso otterremmo, per ogni $F = i_\infty f \in (L^1(a,b))^*$, ossia per ogni $f \in L^\infty(a,b)$,

$$\overline{\Lambda} \circ i_\infty^{-1}(F) = \overline{\Lambda} f = \int_a^b f(t) h(t)\, dt$$

per un'opportuna $h \in L^1(a,b)$, il che, come sappiamo dal corollario 10.1.7, è impossibile.

Come vedremo nei prossimi paragrafi, gli spazi riflessivi sono importanti perché in essi gli insiemi limitati e chiusi sono "debolmente compatti" in un senso che preciseremo: questo consente di ottenere, in svariati problemi applicativi, risultati di esistenza di soluzioni (ma non sempre di unicità).

Esercizi 10.5

1. Sia X uno spazio di Banach; si provi che $J(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**}.

2. Si provi che $L^\infty(a,b)$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ non sono riflessivi.

3. Si provi che ℓ^1 e ℓ^∞ non sono riflessivi.

4. Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dette J, J' le immersioni canoniche di X in X^{**} e di Y in Y^{**} rispettivamente, si verifichi che $T^{**} \circ J = J' \circ T$, ove $T^{**} = (T^*)^* : X^{**} \to Y^{**}$ è l'aggiunto dell'operatore $T^* : Y^* \to X^*$, a sua volta aggiunto di T.

5. Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se T è surgettivo, si provi che T^* è iniettivo e che $R(T^*)$ è chiuso in Y.
   [**Traccia:** per la seconda affermazione, sia $\{F_n\} \subseteq R(T^*)$ tale che $F_n \to F$ in X^*; si verifichi che esiste un unico $G_n \in Y^*$ tale che $F_n = T^*G_n$, ed usando l'esercizio 10.3.2 si provi che $\{G_n\}$ è una successione di Cauchy in Y^*. Detto $G \in Y^*$ il suo limite, si verifichi che $F = T^*G$.]

6. Siano X, Y spazi di Banach con X riflessivo. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si provi che
   $$\overline{R(T^*)} = \{F \in X^* : F|_{\ker T} = 0\}.$$
   [**Traccia:** per provare l'inclusione $\supseteq$, si ragioni per assurdo: se $F|_{\ker T} = 0$ e $F \notin \overline{R(T^*)}$, si trovi $\alpha \in X^{**}$ tale che $\alpha(F) > 0$ e $\alpha|_{\overline{R(T^*)}} = 0$; se $x \in X$ è tale che $J_x = \alpha$, si deduca che $G(Tx) = 0$ per ogni $G \in Y^*$ e si ricavi l'assurdo.]

7. Siano X, Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $R(T)$ è chiuso in Y, si provi che
   $$R(T^*) = \{F \in X^* : F|_{\ker T} = 0\}.$$
   [**Traccia:** per provare l'inclusione $\supseteq$, si osservi che se $F|_{\ker T} = 0$, allora ha senso definire $G(y) = F(x)$ per ogni $y \in R(T)$, ove $x \in T^{-1}(\{y\})$ è scelto ad arbitrio. Dato che $R(T)$ è chiuso, esso è uno spazio di Banach; si usi l'esercizio 10.3.2 per provare che esiste $c > 0$ tale che $|G(y)| \le c\|y\|_Y$ per ogni $y \in R(T)$. Si estenda il funzionale G, col teorema di Hahn-Banach, ad un elemento $\overline{G} \in Y^*$ e si concluda che $F = T^*\overline{G}$.]

8. Siano X, Y spazi di Banach; se X è riflessivo ed esiste un operatore $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surgettivo, si provi che anche Y è riflessivo.
   [**Traccia:** per l'esercizio 10.5.5 si ha $\ker T^* = \{0\}$ e $R(T^*)$ chiuso; se ne deduca, per l'esercizio 10.5.7, che $R(T^{**}) = \{\alpha \in X^{**} : \alpha|_{\ker T^*} = 0\} = X^{**}$, e quindi che T^{**} è surgettivo. Dall'esercizio 10.5.4 si ricavi che Y è riflessivo.]

9. Si provi che uno spazio normato è separabile se e solo se si ha $X = \overline{[\{x_n\}]}$, ove $\{x_n\}$ è un'opportuna successione di elementi di X.

10. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che:

    (i) se X^* è separabile, allora anche X è separabile, ma che il viceversa è falso;

    (ii) se X è separabile e riflessivo, allora anche X^* è separabile e riflessivo.

    [**Traccia:** per (i), se $X^* = \overline{\{F_n\}}$, si scelga $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_X = 1$ e $F_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|F_n\|_{X^*}$; posto $M = \overline{[\{x_n\}]}$, si dimostri che $M = X$ ragionando per assurdo: se esistesse $x_0 \in X \setminus M$, utilizzando il corollario 10.1.6 si costruisca un elemento $F \in X^*$ "lontano" da tutti gli F_n e si deduca il risultato. Per (ii), si provi che se $X = \overline{[\{x_n\}]}$ allora $X^{**} = \overline{[\{J_{x_n}\}]}$, e quindi X^{**} è separabile.]

11. Se X e Y sono spazi riflessivi, si provi che $X \times Y$ è riflessivo.
    [**Traccia:** si utilizzi l'esercizio 7.3.10.]

10.6 Convergenze deboli

Negli spazi normati vi è un altro tipo di convergenza, più debole di quella rispetto alla norma e dunque più facile da ottenere, che è molto utile nelle applicazioni.

Definizione 10.6.1 *Sia X uno spazio normato e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in X. Diciamo che $\{x_n\}$* converge debolmente *ad un elemento $x \in X$ se si ha $Fx_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$ per ogni funzionale $F \in X^*$; in tal caso scriviamo $x_n \rightharpoonup x$.*

Osserviamo che la convergenza debole, ovviamente, è più debole della convergenza rispetto alla norma: infatti se $x_n \to x$ in X, allora

$$|Fx_n - Fx| \leq \|F\|_{X^*}\|x_n - x\|_X \to 0 \qquad \forall F \in X^*,$$

e quindi $x_n \rightharpoonup x$ in X.
Altrettanto ovviamente, se $x_n \rightharpoonup x$ in X non è detto che $x_n \to x$. Ad esempio, ogni sistema ortonormale numerabile $\{e_n\}$ in uno spazio di Hilbert H converge debolmente all'elemento $0 \in H$: per verificarlo, ricordando il teorema di Riesz-Fréchèt, basta osservare che

$$\lim_{n\to\infty} (e_n, z)_H = 0 \qquad \forall z \in H$$

in virtù della disuguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.6). D'altra parte non può essere $e_n \to 0$ dato che $\|e_n\|_H = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si può facilmente verificare (esercizio 10.6.9) che se X ha dimensione finita allora la

convergenza debole è equivalente a quella forte (cioè a quella rispetto alla norma di X). Si noti che questa asserzione non si può invertire, come mostra l'esercizio 10.6.10.
La seguente proprietà della convergenza debole è di uso assai frequente.

Proposizione 10.6.2 *Sia X uno spazio normato. Se $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora $\{x_n\}$ è limitata in X e*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Dimostrazione Sia $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica. Per ipotesi si ha

$$\lim_{n\to\infty} J_{x_n}(F) = \lim_{n\to\infty} Fx_n = Fx \qquad \forall F \in X^*;$$

quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |J_{x_n}(F)| < \infty \qquad \forall F \in X^*.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus, applicato agli spazi X^* e $\mathbb{R}$, si ottiene

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|J_{x_n}\|_{X^{**}} < \infty,$$

e ricordando che J è un'isometria, otteniamo la limitatezza in X della successione $\{x_n\}$. Inoltre, per ogni $F \in X^*$ si ha

$$|Fx| = \lim_{n\to\infty} |Fx_n| \leq \liminf_{n\to\infty} \|F\|_{X^*}\|x_n\|_X,$$

da cui

$$\|x\|_X = \|J_x\|_{X^{**}} = \sup_{F\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|Fx|}{\|F\|_{X^*}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X\,. \quad \square$$

Nello spazio duale X^* vi è un altro tipo di convergenza, ancora più debole.

Definizione 10.6.3 *Sia X uno spazio normato e sia $\{F_n\}$ una successione contenuta in X^*. Diciamo che F_n* converge debolmente* *in X^* (e leggiamo "debolmente star") ad un elemento $F \in X^*$ se si ha $F_n x \to Fx$ in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in X$. In tal caso scriviamo $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$.*

La convergenza debole* è dunque semplicemente la convergenza puntuale per funzionali lineari definiti su X. Si noti che in X^* si hanno entrambi i tipi di convergenza debole:

$$F_n \rightharpoonup F \text{ in } X^* \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(F_n) \to \alpha(F) \quad \forall \alpha \in X^{**},$$

$$F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F \text{ in } X^* \quad \Longleftrightarrow \quad F_n x \to Fx \quad \forall x \in X.$$

In particolare, la convergenza debole in X^* implica la convergenza debole* in X^*, mentre il viceversa è falso in generale, come vedremo nel prossimo esempio; le due convergenze deboli in X^* coincidono nel caso che X sia uno spazio di Banach riflessivo.

Esempio 10.6.4 La successione $\{e_n\}$ (ove $e_n = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$ con 1 al posto n-simo) converge debolmente* a 0 in ℓ^∞, che, ricordiamo, è isomorfo a $(\ell^1)^*$. Infatti, detto $i : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ tale isomorfismo, per ogni $x \in \ell^1$ si ha

$$[i(e_n)]x = \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k \, x_k = x_n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Inoltre, $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in ℓ^1, che è lo spazio duale di c_0: infatti, detto $j : l^1 \to (c_0)^*$ il corrispondente isomorfismo, si ha

$$[j(e_n)] \, x = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n)_k \, x_k = x_n \to 0 \qquad \forall x \in c_0 \, .$$

D'altra parte $e_n \not\rightharpoonup 0$ in ℓ^1, perché scelto l'elemento $\mathbf{1} = \{1, 1, 1, \ldots\} \in \ell^\infty$, risulta

$$[i(\mathbf{1})] \, e_n = (e_n)_n = 1 \not\to 0.$$

Le convergenze deboli sono importanti perché forniscono buoni teoremi di compattezza. Esamineremo alcuni risultati di questo tipo nel prossimo paragrafo.

Esercizi 10.6

1. Sia X uno spazio normato. Si provi che:

   (i) se $x_n \rightharpoonup x$ in X e $F_n \to F$ in X^*, allora $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$;

   (ii) se $x_n \to x$ in X e $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*, allora $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$;

   (iii) se $x_n \rightharpoonup x$ in X e $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ oppure $F_n \rightharpoonup F$ in X^*, allora non è detto che si abbia $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$.

2. Sia $1 < p < \infty$. Se $\{f_n\} \subseteq L^p$, si provi che $f_n \rightharpoonup f$ in L^p se e solo se:

   (i) $\{f_n\}$ è limitata in L^p,

   (ii) $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$ per ogni insieme misurabile E con $\mu(E) < \infty$.

   L'enunciato è ancora vero per $p = \infty$?

3. Sia $\{f_n\} \subseteq L^1$. Se $f_n \rightharpoonup f$ in L^1, si provi che valgono (i) e (ii) del precedente esercizio, ma che il viceversa è falso se $\mu(X) = \infty$.

4. Sia X uno spazio normato e sia M un sottospazio di X. Si provi che M è chiuso in X se e solo se è chiuso rispetto alla convergenza debole. Si provi che lo stesso enunciato vale supponendo soltanto M convesso.
   [**Traccia:** per la seconda parte si utilizzi l'esercizio 10.1.9.]

5. Dimostrare che il limite debole, o debole*, è unico (se esiste).

6. Si provi che se X è uno spazio di Banach e se $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*, allora $\{F_n\}$ è limitata in X^* e
$$\|F\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{X^*} \; .$$

7. Siano X, Y spazi normati e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si provi che se $x_n \rightharpoonup x$ in X allora $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in Y.

8. Sia $1 \le p \le \infty$. Si provi che l'insieme $\{e_m + me_n\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ non ha alcuna sottosuccessione che converga debolmente a 0 in ℓ^p.

9. Si provi che se X ha dimensione finita, allora la convergenza debole equivale a quella forte.

10. Si provi che in ℓ^1 la convergenza debole è equivalente alla convergenza forte. [**Traccia:** per assurdo sia $\{x^{(n)}\} \subset \ell^1$ tale che $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ ma $\|x^{(n)}\|_1 \ge \varepsilon$; si osservi che $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Definiamo induttivamente: $n_0 = 0$, $m_0 = 0$ e poi, noti n_{h-1} e m_{h-1}, $n_h = \min\{n > n_{h-1} : \sum_{k=0}^{m_{h-1}} |x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{5}\}$, $m_h = \min\{m > m_{h-1} : \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i^{(n_h)}| < \frac{\varepsilon}{5}\}$. Posto $z = \{z_k\}$, ove $z_k = \operatorname{sgn} x_k^{(n_h)}$ se $m_{h-1} < k \le m_h$, si ha $z \in \ell^\infty$; si mostri che $|\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_h)}| \ge \frac{\varepsilon}{5}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, e si deduca l'assurdo.]

11. Dimostrare con esempi che:

    (i) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f$ q.o.;

    (ii) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f$ in misura;

    (iii) $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ q.o. $\quad \not\Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f$ in L^p;

    (iv) $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ in misura $\quad \not\Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f \in L^p$.

12. Si provi che $\sin nx \rightharpoonup 0$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1,\infty[$, e che $\sin nx \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.

13. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito. Se $f_n \rightharpoonup f$ in L^p, $1 \le p < \infty$, oppure $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞, si provi che
$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \le f(x) \le \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{q.o. in } X.$$
[**Traccia:** supposto $p = 1$, e posto $M(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, si osservi che per provare che $f \le M$ q.o. basta mostrare che $f \le M$ q.o. in E, ove E è un arbitrario insieme misurabile di misura finita. Si utilizzi l'esercizio 10.6.2 e si deduca la relazione precedente mostrando che $\int_F f\,d\mu \le \int_F M\,d\mu$ per ogni insieme misurabile F contenuto in $Q = \{x \in X : |M(x)| < \infty\}$, od in $Q_+ = \{x \in X : M(x) = +\infty\}$, od in $Q_- = \{x \in X : M(x) = -\infty\}$. Per l'altra disuguaglianza, si consideri $-f$. Il caso $p \ge 1$ è analogo.]

10.7 Compattezza

Come si sa, in uno spazio metrico completo (X, d) un insieme K è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato; ricordiamo che K è *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una *ε-rete*, cioè una famiglia finita $\{x_1, \ldots, x_N\}$ di punti di K tali che $K \subseteq \bigcup_{j=1}^N B(x_j, \varepsilon)$, ove $B(x_j, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_j) < \varepsilon\}$. Se lo spazio X è immerso in

$\mathbb{R}^n$ od in $\mathbb{C}^n$ per qualche n, allora la nozione di totale limitatezza equivale a quella di limitatezza; altrimenti, come nel caso degli spazi di Banach di dimensione infinita, gli insiemi limitati e chiusi non saranno compatti. Ad esempio, gli spazi ℓ^p hanno dimensione infinita e l'insieme $K = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove al solito $(e_n)_k = \delta_{nk}$, è limitato, chiuso ma non compatto (vedere gli esercizi 10.7.5 e 10.7.6).
Esistono svariati criteri di compattezza per sottoinsiemi di spazi di Banach. Ne esamineremo solamente alcuni fra i principali.

Teorema 10.7.1 (di Ascoli-Arzelà) *Sia X uno spazio metrico separabile e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $X \to \mathbb{R}$. Se:*

(i) $\mathcal{F}$ *è* equicontinua*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

(ii) $\mathcal{F}$ *è* puntualmente equilimitata*, ossia per ogni $x \in X$ esiste $M_x \geq 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq M_x \qquad \forall f \in \mathcal{F},$$

allora da ogni successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di X.

Dimostrazione Poiché X è separabile, esiste un insieme numerabile $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso in X. Poniamo $S_0 = \mathbb{N}$; poiché, per (ii), $\{f_n(x_0)\}_{n\in S_0}$ è limitato in $\mathbb{R}$, esiste $S_1 \subseteq S_0$ tale che la sottosuccessione $\{f_n(x_0)\}_{n\in S_1}$ è convergente. Per induzione, costruito $S_k \subseteq S_{k-1}$ tale che $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_k}$ è convergente per ogni $j = 0, 1, \ldots, k-1$, poiché $\{f_n(x_k)\}_{n\in S_k}$ è limitato in $\mathbb{R}$ esiste $S_{k+1} \subseteq S_k$ tale che la sottosuccessione $\{f_n(x_k)\}_{n\in S_{k+1}}$ è convergente (al pari delle sottosuccessioni $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_{k+1}}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$). Resta così definita un'infinita sequenza di sottosuccessioni, ognuna inclusa nella precedente, delle quali la $k+1$-sima è tale che $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_{k+1}}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $j = 0, 1, \ldots, k$. Adesso indichiamo con r_k il k-simo elemento dell'insieme S_k (che è ordinato secondo l'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$); ponendo $S = \{r_0, r_1, \ldots, r_k, \ldots\}$, si ha $S \subseteq \mathbb{N}$ ed inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$, al più i primi k termini di S, da r_0 a r_{k-1}, *non* appartengono a S_k. Di conseguenza, la sottosuccessione "diagonale" $\{f_n\}_{n\in S}$ è tale che $\{f_n(x_k)\}_{n\in S}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero

$$\exists \lim_{n\in S,\ n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in E.$$

Adesso, fissato un compatto $K \subseteq X$, proveremo che $\{f_n(x)\}_{n\in S}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in K$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e scegliamo $\delta > 0$ in modo che valga la (i). Poiché K è compatto, esso può essere ricoperto da una famiglia finita di palle $B(y_1, \frac{\delta}{2}), \ldots, B(y_N, \frac{\delta}{2})$; dato che E è denso in X, in ciascuna palla $B(y_i, \frac{\delta}{2})$ cadrà un punto $x_{k_i} \in E$. Quindi, per (i), avremo

$$|f_n(x_{k_i}) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in B\left(y_i\,, \frac{\delta}{2}\right), \quad \forall i = 1, \ldots, N,$$

e dunque se $x \in K$, scelto i in modo che $x \in B(y_i, \frac{\delta}{2})$, e ricordando che $\{f_n(x_{k_i})\}_{n\in S}$ è convergente, otteniamo per ogni $n, m \in S$ sufficientemente grandi:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_{k_i})| + |f_n(x_{k_i}) - f_m(x_{k_i})| + |f_m(x_{k_i}) - f_m(x)| < 3\varepsilon.$$

Ciò prova che $\{f_n\}_{n\in S}$ è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in K, ove K è un arbitrario compatto contenuto in X. La tesi è provata. $\square$

Corollario 10.7.2 *Sia X uno spazio di Banach separabile e sia $\{F_n\}$ una successione limitata in X^*. Allora esiste una sottosuccessione $\{F_{n_k}\}$ di $\{F_n\}$ che converge debolmente* in X^* ad un elemento $F \in X^*$.*

Dimostrazione Posto $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|F_n\|_{X^*}$, si ha

$$|F_n x| \le M\|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$|F_n x - F_n y| \le M\|x - y\|_X \qquad \forall x, y \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

quindi la famiglia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Dunque, essendo $\{x\}$ un compatto di X per ogni $x \in X$, per un'opportuna sottosuccessione $\{F_{n_k}\} \subseteq \{F_n\}$ si avrà che

$$\exists \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \qquad \forall x \in X.$$

È chiaro che il limite così definito è un funzionale lineare F tale che $|Fx| \le M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$; ne segue la tesi. $\square$

Corollario 10.7.3 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $\{x_n\}$ una successione limitata in X. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ che converge debolmente in X ad un elemento $x \in X$.*

Dimostrazione Il sottospazio $M = \overline{[\{x_n\}]}$ è separabile (esercizio 10.5.9) e riflessivo, essendo un sottospazio chiuso dello spazio riflessivo X (proposizione 10.5.3). Poiché $\{J_{x_n}\}$ è una successione limitata in M^{**}, per il corollario 10.7.2 c'è una sottosuccessione $\{J_{x_{n_k}}\}$ di $\{J_{x_n}\}$ che converge debolmente* ad un elemento $\alpha \in M^{**}$. Per la riflessività di M sarà $\alpha = J_x$ per un certo $x \in M$: quindi $J_{x_{n_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} J_x$ in M^{**}, ovvero $Fx_{n_k} \to Fx$ per ogni $F \in M^*$. Dato che ogni funzionale lineare continuo su X è anche continuo su M, si ha in particolare che $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in X. Ciò prova la tesi. $\square$

Vediamo adesso un importante criterio di compattezza negli spazi L^p.

Teorema 10.7.4 (di Fréchèt-Kolmogorov) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia K un sottoinsieme di $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Se $m_N(\Omega) < \infty$, l'insieme K è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$ se e solo se, prolungate a 0 fuori di Ω tutte le funzioni di K, valgono le proprietà seguenti:*

(i) *K è limitato,*

(ii) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \sup_{f\in K} \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0.$

Se invece $m_N(\Omega) = +\infty$, l'insieme K è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$ se e solo se oltre alle condizioni **(i)** *e* **(ii)**, *risulta*

(iii) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in K} \int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f(x)|^p\,dx = 0.$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Per ipotesi, dato $\varepsilon > 0$, esiste una ε-rete per K: quindi esistono $f_1, \dots, f_{m_\varepsilon} \in K$ tali che

$$\min_{1\le k\le m_\varepsilon} \|f - f_k\|_p < \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

In particolare, ciò implica che K è limitato in $L^p(\Omega)$, ossia vale (i). Inoltre, se $m_N(\Omega) = +\infty$, esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_k(x)|^p\,dx < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m_\varepsilon, \qquad \forall R > R_\varepsilon,$$

da cui, per ogni $f \in K$ e per ogni $R > R_\varepsilon$,

$$\left[\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \inf_{1\le k\le m_\varepsilon} \left[\|f - f_k\|_p + \left[\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_k(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\right] < 2\varepsilon.$$

Ciò prova (iii).
Proviamo infine (ii). Per $1 \le k \le m_\varepsilon$ sia $g_k \in C_0(\Omega)$ tale che $\|f_k - g_k\|_p < \varepsilon$ (esercizio 9.1.25). Prolungate le g_k a 0 fuori di Ω, ed indicato con $H_\varepsilon \subset \Omega$ un compatto la cui parte interna contenga l'unione dei supporti delle g_k, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|g_k(x+h) - g_k(x)| \le \frac{\varepsilon}{m_N(H_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}, \quad 1 \le k \le m_\varepsilon, \quad |h| < \delta_\varepsilon.$$

Allora per ogni $f \in K$ si ha per $|h| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le \\
&\quad = \inf_{1\le k\le m_\varepsilon} \Big[\|f(\cdot+h) - f_k(\cdot+h)\|_p + \|f_k(\cdot+h) - g_k(\cdot+h)\|_p + \\
&\quad + \|g_k(\cdot+h) - g_k(\cdot)\|_p + \|g_k - f_k\|_p + \|f_k - f\|_p\Big] \le \\
&\quad \le 2\|f_k - f\|_p + 2\|f_k - g_k\|_p + \max_{1\le k\le m_\varepsilon} \|g_k(\cdot+h) - g_k(\cdot)\|_p < 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ciò prova (ii) e conclude la prima parte della dimostrazione.

($\Longleftarrow$) Sia $\{f_n\}$ una successione contenuta in K: proveremo che essa ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$. Supponiamo $m_N(\Omega) = \infty$: fissato $\varepsilon > 0$, per (iii) esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_n(x)|^p\,dx < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall R \ge R_\varepsilon.$$

In base a (ii), scegliamo $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_\Omega |f_n(x+h) - f_n(x)|^p \, dx < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall |h| \leq \delta_\varepsilon.$$

Infine, sia φ_δ una mollificatrice (esercizio 5.4.5), e poniamo per $0 < \delta \leq \delta_\varepsilon$

$$K_\delta = \{f \star \varphi_\delta : f \in K\}.$$

Per ogni $\delta > 0$, K_δ è un sottoinsieme di $C(\overline{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)}) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se $m_N(\Omega) < \infty$, avremo in particolare $\Omega \cap B(0, R_\varepsilon) = \Omega$ e l'argomentazione non richiede l'uso di $B(0, R_\varepsilon)$. Notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha, in virtù di (i),

$$|f \star \varphi_\delta(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi_\delta(y) \, dy \right| \leq \|f\|_p \|\varphi_\delta\|_q \leq M \|\varphi_\delta\|_q \quad \forall f \in K;$$

inoltre, grazie a (ii), per $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned} |f \star \varphi_\delta(x) - f \star \varphi_\delta(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x'-y)| \varphi_\delta(y) \, dy \leq \\ &\leq \|f(\cdot + x' - x) - f(\cdot)\|_p \|\varphi_\delta\|_q < \varepsilon \|\varphi_\delta\|_q \quad \forall f \in K. \end{aligned}$$

Pertanto K_δ è una famiglia equilimitata ed equicontinua in $C(\overline{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)})$. Dunque il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1) è applicabile e pertanto la successione $\{f_n \star \varphi_\delta\} \subseteq K_\delta$ ha una sottosuccessione $\{f_{n_k} \star \varphi_\delta\}$ uniformemente convergente in $C(\overline{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)})$. In particolare, esiste $\nu_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned} &\|f_{n_k} \star \varphi_\delta - f_{n_h} \star \varphi_\delta\|_p \leq \\ &\quad \leq m_N(\Omega \cap B(0, R_\varepsilon))^{1 - \frac{1}{p}} \|f_{n_k} \star \varphi_\delta - f_{n_h} \star \varphi_\delta\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k, h \geq \nu_{\varepsilon,\delta}. \end{aligned}$$

Adesso osserviamo che, essendo $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\delta(x) \, dx = 1$, risulta

$$\begin{aligned} \|f_n - f_n \star \varphi_\delta\|_p &= \left[\int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f_n(x) - f_n(x-y)] \varphi_\delta(y) \, dy \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\int_\Omega \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f_n(x-y)| \varphi_\delta(y)^{\frac{1}{p}} \varphi_\delta(y)^{\frac{1}{q}} \, dy \right]^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f_n(x-y)|^p \varphi_\delta(y) \, dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\delta(y) \, dy \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} \|f_n(\cdot) - f_n(\cdot - y)\|_p^p \varphi_\delta(y) \, dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \sup_{|y| \leq \delta} \|f_n(\cdot) - f_n(\cdot - y)\|_p < \varepsilon \qquad \forall \delta \leq \delta_\varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, scelto $\delta = \delta_\varepsilon$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\|f_{n_k} - f_{n_h}\|_p \leq \\ &\quad \leq \|f_{n_k} - f_{n_k} \star \varphi_\delta\|_p + \|f_{n_k} \star \varphi_\delta - f_{n_h} \star \varphi_\delta\|_p + \|f_{n_h} \star \varphi_\delta - f_{n_h}\|_p < \\ &\quad < 3\varepsilon \qquad \forall k, h \geq \nu_{\varepsilon, \delta_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ciò prova che la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge in $L^p(\Omega)$. la tesi è provata. □

Esercizi 10.7

1. Si provi che se X è uno spazio di Banach riflessivo, ogni funzionale $F \in X^*$ assume massimo sulla palla unitaria chiusa di X.

2. Si provi che $M = \{f \in C^0[a,b] : f(a) = 0\}$ non è riflessivo, e se ne deduca che $C^0[a,b]$ non è riflessivo.
   [**Traccia:** si consideri il funzionale
   $$Fg = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, g\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right), \qquad f \in M,$$
   e si utilizzi l'esercizio precedente.]

3. Si provi che c_0 non è riflessivo.
   [**Traccia:** si utilizzi l'esercizio 7.3.11.]

4. Sia X uno spazio di Banach infinito-dimensionale e riflessivo. Si provi che esistono una successione $\{x_n\} \subset X$ ed un elemento $x \in X$ tali che $x_n \rightharpoonup x$ ma $x_n \not\to x$ in X.
   [**Traccia:** utilizzando l'esercizio 10.1.11, si costruisca induttivamente $\{x_n\} \subset X$ tale che $\|x_n\|_X = 1$ e $\|x_n - x_m\|_X \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n > m \ldots$]

5. Si provi che in ℓ^1, in ℓ^2 e in ℓ^∞ la palla unitaria chiusa non è compatta.

6. Si provi che se $p \in [1, \infty[$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è una serie convergente di numeri positivi, allora l'insieme
   $$K = \{x \in \ell^p : |x_n| \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
   è compatto in ℓ^p. Se $p = 2$ e $a_n = \frac{1}{n+1}$ l'insieme K è detto *cubo di Hilbert*.

7. Si provi che un sottoinsieme $K \subseteq C^0[a,b]$ è relativamente compatto se e solo se è limitato ed equicontinuo (secondo la definizione data nell'enunciato del teorema 10.7.1).

8. (*Teorema di Peano*) Sia G un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, e sia $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ continua. Si provi che per ogni $(x_0, y_0) \in G$ il problema di Cauchy
   $$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$
   ha almeno una soluzione $y \in C^1(I)$, ove I è un opportuno intervallo di $\mathbb{R}$ centrato in x_0.
   [**Traccia:** sia $M = \sup_{\overline{G}} |f|$, e per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\sigma > 0$ tale che
   $$|x - x'| < \sigma, \ |y - y'| < 2M\sigma \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$$
   Sia $\Delta \subseteq G$ l'unione dei due triangoli chiusi delimitati dalle due rette per (x_0, y_0) di coefficienti angolari $\pm M$ e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ (con a, b opportuni e tali che $a < x_0 < b$). Si costruiscano le *spezzate di Eulero* nel modo seguente:

si tracci da (x_0, y_0) la retta di coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$, si fissi su di essa un altro punto (x_1, y_1), e si tracci da esso la retta di coefficiente angolare $f(x_1, y_1)$; fissato su questa un altro punto (x_2, y_2), si tracci da esso la retta di coefficiente angolare $f(x_2, y_2)$, e così via. Sia ora $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni i cui grafici siano spezzate di Eulero passanti per (x_0, y_0), con nodi $(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})$, tali che $\delta_n = \max_i (\xi_i^{(n)} - \xi_{i-1}^{(n)})$ tenda a 0 per $n \to \infty$. Si verifichi che $\{\varphi_n\}$ è un sottoinsieme limitato ed equicontinuo di $C^0[a, b]$ e sia $\{\psi_n\}$ una sottosuccessione di $\{\varphi_n\}$ uniformemente convergente in $[a, b]$ (esercizio 10.7.7). Indichiamo con φ il limite; sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|\psi_n - \varphi\|_\infty < 2M\sigma$ e $\delta_n < \sigma$ per ogni $n > N$. Siano $|x - x'| < \sigma$, con (ad esempio) $x < x'$, e $n > N$; detti $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ i nodi della spezzata grafico di ψ_n, sarà $x_r \le x < x_{r+1} < \ldots < x_s < x' \le x_{s+1}$. Si verifichi che

$$
\begin{aligned}
&\psi_n(x) - \psi_n(x') = \\
&\quad = [\psi_n(x) - \psi_n(x_{r+1})] + \sum_{i=r+1}^{s-1} [\psi_n(x_i) - \psi_n(x_{i+1})] + [\psi_n(x_s) - \psi_n(x')] = \\
&\quad = f(x_r, y_r)(x - x_{r+1}) + \sum_{i=r+1}^{s-1} f(x_i, y_i)(x_i - x_{i+1}) + f(x_s, y_s)(x_s - x'),
\end{aligned}
$$

e dal fatto che $|f(x_i, y_i) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon$ per $i = r, r+1, \ldots, s$ si deduca che

$$
\left| \frac{\psi_n(x) - \psi_n(x')}{x - x'} - f(x, \psi_n(x)) \right| < \varepsilon \quad \forall n > N, \ \forall x' \in]x - \sigma, x + \sigma[\,.
$$

Si concluda, passando al limite per $n \to \infty$ e per $x' \to x$, che φ risolve il problema di Cauchy.]

Capitolo 11

Teoria spettrale

11.1 Spettro e risolvente

Questo capitolo è dedicato alla *teoria spettrale* degli operatori lineari su uno spazio normato X: in altre parole, se $T : X \to X$ è lineare, studieremo la struttura dell'insieme dei valori λ tali che $\lambda I - T$ è invertibile con inverso continuo. Questa proprietà è di grande importanza nelle applicazioni, poiché permette di ottenere teoremi di esistenza di soluzioni per equazioni vettoriali, con le quali è possibile modellizzare svariatissimi fenomeni.
Consideriamo un operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \to X$ in uno spazio di Banach *complesso* X; se lo spazio X è reale, si può considerare il *complessificato* di X (si veda l'esercizio 11.1.1).

Definizione 11.1.1 *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Il punto λ è detto* regolare *per A se l'operatore $\lambda I - A : D(A) \to X$ è iniettivo con immagine $R(\lambda I - A)$ densa in X, e se il suo inverso $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to D(A)$ è continuo (rispetto alla norma di X). L'insieme*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ è regolare per } A\}$$

si dice insieme risolvente *di A. L'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$, che si denota con $R(\lambda, A)$, si chiama* operatore risolvente *di A. L'insieme*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ non è regolare per } A\}$$

si dice spettro *di A.*
A sua volta lo spettro di A si decompone in questo modo:

$$\text{spettro puntuale} = P_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ non è iniettivo}\},$$

$$\begin{aligned}\text{spettro continuo} = C_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ & \lambda I - A \text{ è iniettivo}, \\ & \overline{R(\lambda I - A)} = X,\ (\lambda I - A)^{-1} \text{ non è continuo}\},\end{aligned}$$

$$\text{spettro residuo} = R_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda I - A \text{ è iniettivo},\ \overline{R(\lambda I - A)} \subset X\}.$$

Osservazione 11.1.2 Se A è un operatore lineare chiuso, e se $\lambda \in \rho(A)$, allora $R(\lambda I - A) = X$, cioè $\lambda I - A$ è bigettivo con inverso $(\lambda I - A)^{-1}$ definito su tutto X. Infatti, se $y \in X = \overline{R(\lambda I - A)}$, esiste $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tale che $\lambda x_n - Ax_n \to y$; la continuità di $(\lambda I - A)^{-1}$ implica che $\{x_n\}$ è di Cauchy in X e quindi converge a un elemento $x \in X$. Ne segue che $Ax_n \to -y + \lambda x$: poiché A è chiuso, si conclude che $x \in D(A)$ e $Ax = y - \lambda x$, cioè $y \in R(\lambda I - A)$.

Esempio 11.1.3 Sia $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un'applicazione lineare, rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice $\{a_{ij}\}$ che denotiamo ancora, seppur impropriamente, con A. L'equazione $\lambda x - Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se λ non è un autovalore della matrice A; in tal caso, l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ è definito su tutto $\mathbb{C}^n$ ed è continuo. Quindi $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se λ non è un autovalore. In definitiva, $\sigma(A)$ è l'insieme degli autovalori della matrice A.

In analogia con il caso delle matrici, si ha la seguente

Definizione 11.1.4 *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare in uno spazio di Banach complesso X. I punti λ dello spettro puntuale di A si dicono* autovalori *di A; i vettori non nulli $x \in X$ tali che $\lambda x - Ax = 0$ si dicono* autovettori *di A relativi all'autovalore λ.*

Proposizione 11.1.5 *Sia X uno spazio di Banach. Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ è un operatore lineare chiuso, allora $\rho(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$ e quindi $\sigma(A)$ è chiuso.*

Dimostrazione Se $\rho(A)$ è vuoto, allora è aperto. Altrimenti, fissiamo $\lambda \in \rho(A)$: per l'osservazione 11.1.2, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$; proviamo che se $\varepsilon \in \mathbb{C}$ e $\|(\lambda I - A)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \varepsilon < 1$ allora risulta $\lambda - \varepsilon \in \rho(A)$.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $B_k = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}$; $\{B_k\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$ per la scelta di ε. Poniamo $B = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}$: allora $B \in \mathcal{L}(X)$. Verifichiamo che $B(\lambda I - A)^{-1}$ è l'inverso di $(\lambda - \varepsilon)I - A$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} B_k(\lambda I - A)^{-1}[(\lambda - \varepsilon)I - A] &= B_k[I - \varepsilon(\lambda I - A)^{-1}] = \\ &= \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}[I - \varepsilon(\lambda I - A)^{-1}] = I - \varepsilon^{k+1}(\lambda I - A)^{-(k+1)}, \end{aligned}$$

e per $k \to \infty$ segue che

$$B(\lambda I - A)^{-1}[(\lambda - \varepsilon)I - A] = I|_{D(A)}\,.$$

Analogamente si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in X$

$$[(\lambda - \varepsilon)I - A]B_k(\lambda I - A)^{-1}x = x - \varepsilon^{k+1}(\lambda I - A)^{-(k+1)}x;$$

posto $z_k = B_k(\lambda I - A)^{-1}x$, per $k \to \infty$ risulta allora $z_k \in D(A)$, $z_k \to B(\lambda I - A)^{-1}x$ e $[(\lambda - \varepsilon)I - A]z_k \to x$. Poiché $(\lambda - \varepsilon)I - A$ è chiuso, si ottiene che $B(\lambda I - A)^{-1}x \in D(A)$ e

$$[(\lambda - \varepsilon)I - A]B(\lambda I - A)^{-1})x = x \qquad \forall x \in X. \quad \square$$

Proposizione 11.1.6 *Sia X uno spazio di Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, allora $\lambda \in \rho(A)$.*

Dimostrazione Se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, si verifica che l'operatore $B = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$ inverte $\lambda I - A$. $\square$

Esempi 11.1.7 **(1)** Poniamo $X = C[a,b]$, $D(A) = X$, $(Af)(t) = tf(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Allora $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \max\{|a|,|b|\}$. Poiché

$$[(\lambda I - A)f](t) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - t)f(t) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) \equiv 0,$$

si ha che $\lambda I - A$ è iniettivo per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e quindi $P_\sigma(A) = \emptyset$. Poi, se $\lambda \notin [a,b]$, allora per ogni $g \in X$ la funzione $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$ appartiene a X e verifica la relazione $f = (\lambda I - A)^{-1} g$. Inoltre

$$\|f\|_\infty \le \sup_{t \in [a,b]} \frac{1}{|\lambda - t|} \|g\|_\infty\,,$$

cosicché $[a,b] \supseteq \sigma(A)$. Viceversa, se $\lambda \in [a,b]$ si ha

$$R(\lambda I - A) = \{g \in X: \ g(\lambda) = 0 \text{ e } g \text{ è derivabile nel punto } \lambda\},$$

e questo insieme non è denso in X. Pertanto $C_\sigma(A) = \emptyset$ e $R_\sigma(A) = \sigma(A) = [a,b]$.

(2) Sia $X = C[a,b]$, $D(A) = C^1[a,b]$ e $A = \frac{d}{dt}$. Poiché $\lambda f(t) - f'(t) \equiv 0$ se e solo se $f(t) \equiv c\, e^{\lambda t}$, si ha che ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per A. Pertanto $\sigma(A) = P_\sigma(A) = \mathbb{C}$.

(3) Poniamo stavolta $X = C[a,b]$, $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = 0\}$, $A = \frac{d}{dt}$: l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha l'unica soluzione $f(t) = -e^{\lambda t} \int_a^t e^{-\lambda\tau} g(\tau)\, d\tau$; di conseguenza $(\lambda I - A)^{-1}$ è definito su tutto X ed è continuo. Pertanto $\sigma(A) = \emptyset$.

(4) Sia ancora $X = C[a,b]$, con $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = f(b) = 0\}$ e $A = \frac{d}{dt}$. Si vede subito che lo spettro puntuale è vuoto. D'altra parte l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha l'unica soluzione $f(t) = -e^{\lambda t} \int_a^t e^{-\lambda\tau} g(\tau) d\tau$ se e solo se g verifica la condizione di compatibilità $\int_a^b e^{-\lambda\tau} g(\tau) d\tau = 0$. Dunque l'immagine $R(\lambda I - A)$ non è densa in X e pertanto $\sigma(A) = R_\sigma(A) = \mathbb{C}$.

(5) Consideriamo ancora una volta $A = \frac{d}{dt}$ nello spazio $X = C[a,b]$, con dominio $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = Kf(b)\}$, essendo K un fissato numero reale non nullo. L'equazione $\lambda f - f' = 0$ ha soluzione non nulla per $\lambda = \frac{\log|K| + 2k\pi i}{a-b}$, $k \in \mathbb{Z}$, per cui $P_\sigma(A)$ è dato dall'insieme di questi punti. Gli altri punti di $\mathbb{C}$ sono in $\rho(A)$ in quanto risulta per ogni $g \in X$

$$[(\lambda I - A)^{-1} g](t) = -\frac{K e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda\tau} g(\tau)\, d\tau}{e^{\lambda a} - K e^{\lambda b}}\, e^{\lambda t} - e^{\lambda t} \int_a^t e^{-\lambda\tau} g(\tau)\, d\tau.$$

In definitiva, $\sigma(A) = P_\sigma(A) = \left\{ \frac{\log|K| + 2k\pi i}{a-b} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

(6) Sia $X = \ell^2$ e $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{n+1}$. Lo spettro puntuale è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, mentre lo spettro continuo è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ e lo spettro residuo è vuoto (si vedano la proposizione 11.1.6 e l'esercizio 11.1.5).

Esercizi 11.1

1. *(Complessificazione di uno spazio normato reale)* Sia X uno spazio normato reale. Su $X^2 = X \times X$ consideriamo le operazioni di somma e di prodotto per scalari complessi così definite:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \quad (\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

   (i) Si definisca $x + iy = (x, y)$ e si verifichi che

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v),\\ (\alpha + i\beta)(x + iy) &= (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

   per ogni $x, y, u, v \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (ii) Posto $X_{\mathbb{C}} = \{x + iy : x, y \in X\}$, si verifichi che $X_{\mathbb{C}}$ è uno spazio vettoriale complesso, che

$$\|x + iy\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\vartheta \in [0,2\pi[} \|x \cos\vartheta + y \sin\vartheta\|_X$$

   è una norma su $X_{\mathbb{C}}$ e che X si immerge isometricamente in $X_{\mathbb{C}}$.

   (iii) Si mostri che, in generale, la funzione $p(x + iy) = \|x\|_X + \|y\|_X$ non è una norma su $X_{\mathbb{C}}$.

2. Sia X uno spazio di Banach di dimensione finita. Se $T : X \to X$ è lineare, si provi che $\sigma(T) \neq \emptyset$, e che quando X è reale può capitare che $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

3. Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso. Si provi l'*identità del risolvente*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \qquad \forall \lambda, \mu \in \rho(A).$$

4. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si provi che $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ è un'applicazione olomorfa da $\rho(T)$ in $\mathcal{L}(X)$, e si calcoli $\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, T)$. Se ne deduca che se $T \in \mathcal{L}(X)$ allora $\sigma(T) \neq \emptyset$.

5. Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Se λ appartiene alla frontiera di $\sigma(A)$, si provi che $\lambda \in P_\sigma(A) \cap C_\sigma(A)$.

6. Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Dimostrare che:

   (i) se $\lambda \in \sigma(A)$, allora $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (ii) se $|\lambda| > \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$ allora $\lambda \in \rho(A)$;

   (iii) esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$. Tale limite si chiama *raggio spettrale* di A e si indica con $r_\sigma(A)$.

[**Traccia:** per (iii), posto $r = \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$ e fissato $\varepsilon > 0$, si scelga $m \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|A^m\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/m} \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$; si osservi che per $n > m$ risulta, scelto $k \in \mathbb{N}^+$ in modo che $km < n \le (k+1)m$:

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \le \|A^{km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \cdot \|A^{n-km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \le \left[\|A^m\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{km}{n}} \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}}.$$

Essendo $\frac{1}{n} \le \frac{n-km}{n} \le \frac{m}{n}$, si deduca che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}} \to 1 \text{ per } n \to \infty;$$

essendo $1 - \frac{m}{n} \le \frac{km}{n} < 1$, si concluda che $\limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \le (r+\varepsilon)$.]

7. Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso nello spazio di Banach X, tale che $0 \in \rho(A)$. Si provi che se $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

8. Siano $X = \ell^2$, $D(A) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n^2|x_n|^2 < \infty\}$, $(Ax)_n = nx_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'operatore A è chiuso? L'aggiunto A^* esiste? Si determini $\sigma(A)$.

9. Sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da

$$(Tx)_n = x_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in \ell^2.$$

(i) Si calcoli la norma di T.

(ii) Si scriva l'operatore aggiunto T^*.

(iii) Si trovino gli autovalori di T.

10. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un'isometria. Si provi che $P_\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

11. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore unitario (cioè tale che $TT^* = T^*T = I$). Si provi che $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

12. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Si provi che $R_\sigma(T) = \emptyset$.

13. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Si provi che $\lambda \in \rho(T)$ se e solo se $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

11.2 Operatori compatti

Mentre per gli operatori lineari su spazi di dimensione finita si può formulare una teoria esauriente, lo studio degli operatori lineari su spazi di dimensione infinita costituisce un problema vastissimo e complicato. Tuttavia, alcune notevoli clsssi di operatori possono essere descritte in maniera sufficientemente completa. Una delle più importanti è la classe degli operatori compatti: essi infatti da una parte godono di proprietà analoghe a quelle degli operatori a immagine finito-dimensionale, e quindi se ne può fornire una descrizione accurata, e dall'altra giocano un ruolo fondamentale in numerose applicazioni, e in particolare nella teoria delle equazioni integrali.

Definizione 11.2.1 *Siano X e Y spazi normati. Un operatore lineare $A : X \to Y$ si dice* compatto*, o* completamente continuo*, se è continuo e trasforma insiemi limitati di X in insiemi relativamente compatti di Y.*

Dalla definizione segue che gli operatori compatti sono continui; si noti che il viceversa è falso se $\dim Y = \infty$: l'identità $I : Y \to Y$ non è compatta. Notiamo anche che, evidentemente, per ottenere la compattezza di un operatore $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ basta mostrare che l'immagine della palla unitaria di X è relativamente compatta in Y.

Esempi 11.2.2 **(1)** Se $\dim Y < \infty$, ogni operatore $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ è compatto.

(2) Sia $A : \ell^2 \to \ell^2$ definito da $(Ax)_n = \frac{x_n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'immagine della palla unitaria è contenuta nel cubo di Hilbert (esercizio 10.7.6), il quale è un sottoinsieme compatto di ℓ^2: ne segue che A è un operatore compatto.

(3) Se M è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H, la proiezione ortogonale P_M è un operatore compatto se e solo se M ha dimensione finita.

(4) Sia K una funzione di due variabili continua in $[a,b]\times[a,b]$ e sia $A : C[a,b] \to C[a,b]$ l'operatore integrale definito da $Af(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds$ per ogni $t \in [a,b]$. Utilizzando il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1) non è difficile verificare che A è un operatore compatto.

(5) Un caso particolare dell'esempio precedente si ha quando $K(t,s) = 0$ per $t < s$: in questo caso si ha $Af(t) = \int_a^t K(t,s)f(s)ds$ e A viene chiamato *operatore integrale di Volterra*. Per tale operatore valgono le stime, verificabili per induzione,

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(C[a,b])} \le \|K\|_\infty^n \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

dunque la serie $\sum_{n=0}^\infty |\lambda|^{-n-1}\|A^n\|_{\mathcal{L}(C[a,b])}$ è convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e di conseguenza la serie $\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}A^n$ definisce un operatore che, come si verifica facilmente, coincide con $R(\lambda, A)$. In definitiva, per ogni fissata $g \in C[a,b]$ l'*equazione integrale di Volterra*

$$\lambda f(t) - \int_a^t K(t,s)f(s)ds = g(t), \qquad t \in [a,b],$$

è univocamente risolubile in $C[a,b]$ qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Al contrario, come si vedrà in seguito, si ha $0 \in \sigma(A)$.

Vediamo adesso le principali proprietà degli operatori compatti fra due spazi normati X e Y. È evidente dalla definizione che essi formano un sottospazio di $\mathcal{L}(X,Y)$; il risultato che segue mostra che tale sottospazio è chiuso allorché Y è completo.

Proposizione 11.2.3 *Sia X uno spazio normato e sia Y uno spazio di Banach. Sia $\{A_n\}_{n\in N^+}$ una successione di operatori compatti da X a Y tale che $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(X,Y)$: allora A è un operatore compatto.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X \le K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: dobbiamo provare che $\{Ax_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in Y. Poiché A_1 è compatto, esistono

un elemento $y_1 \in Y$ e una prima sottosuccessione $\{x_n^{(1)}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $A_1 x_n^{(1)} \to y_1$ in Y per $n \to \infty$. Poiché A_2 è compatto, esistono un altro elemento $y_2 \in Y$ e una seconda sottosuccessione $\{x_n^{(2)}\} \subseteq \{x_n^{(1)}\}$ tale che $A_i x_n^{(2)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Iterando il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, essendo A_k compatto, esisteranno un k-simo elemento $y_k \in Y$ e una k-sima sottosuccessione $\{x_n^{(k)}\} \subseteq \{x_n^{(k-1)}\}$ tale che $A_i x_n^{(k)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
Consideriamo adesso la successione $\{x_n^{(n)}\}$, la quale, salvo che per i suoi primi k termini, è estratta da $\{x_n^{(k)}\}$ e in particolare è una sottosuccessione della successione originaria $\{x_n\}$: per essa risulta $A_i x_n^{(n)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$ qualunque sia $i \in \mathbb{N}^+$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$: esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|A - A_k\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$. Allora, dato che $A_{k_\varepsilon} x_n^{(n)} \to y_{k_\varepsilon}$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|A_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_Y < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu_\varepsilon$. Ne segue, per ogni $n, m \geq \nu_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\|_Y &= \|Ax_n^{(n)} - A_{k_\varepsilon} x_n^{(n)}\|_Y + \\ &\quad + \|A_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_Y + \|A_{k_\varepsilon} x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|_Y < \\ &< 2\varepsilon K + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque la successione $\{Ax_n^{(n)}\}$ è di Cauchy in Y. Poiché Y è completo, essa è convergente in Y. $\square$
Nella proposizione precedente la completezza di Y è essenziale, come mostra il seguente

Esempio 11.2.4 Sia $B : c_0 \to \ell^2$ definito da $(Bx)_n = \frac{x_n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo $X = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (R(B), \|\cdot\|_{\ell^2})$, e consideriamo gli operatori $B_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ così definiti:

$$(B_n x)_k = \begin{cases} \frac{x_k}{k+1} & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n; \end{cases}$$

i B_n, avendo immagine finito-dimensionale, sono compatti. Si ha $B_n \to B$ in $\mathcal{L}(X, Y)$ per $n \to \infty$; d'altra parte, considerando la successione $\{y^{(n)}\} \subseteq X$ data da

$$y_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

essa è chiaramente limitata in X mentre, essendo

$$(By^{(n)})_k = \begin{cases} 1/k & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

si ha $By^{(n)} \to \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}^+} \notin Y$. Ciò prova che $\{By^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in Y che non converge in Y (e in particolare Y non è completo), cosicché $\{By^{(n)}\}$ è un insieme non relativamente compatto in Y. In particolare $B : X \to Y$ non è un operatore compatto. Si osservi tuttavia che $B : c_0 \to \ell^2$ è compatto.

Dalla proposizione 11.2.3 segue subito:

Corollario 11.2.5 *Sia X uno spazio normato e sia Y uno spazio di Banach. Allora gli operatori che sono limiti in $\mathcal{L}(X,Y)$ di successioni di operatori ad immagine finito-dimensionale sono compatti.* $\Box$

Il viceversa del corollario precedente è falso in generale, ma è vero, come vedremo, se X e Y coincidono con uno stesso spazio di Hilbert H.

Proposizione 11.2.6 *Siano X, Y, Z spazi normati, siano $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Se uno dei due operatori è compatto, allora $B \circ A$ è compatto.*

Dimostrazione Immediata conseguenza della definizione 11.2.1. $\Box$

Proposizione 11.2.7 *Sia X uno spazio normato e sia $A \in \mathcal{L}(X)$ un operatore compatto e iniettivo. Allora si ha $0 \in \rho(A)$ se e solo se X ha dimensione finita.*

Dimostrazione Se X ha dimensione finita, gli operatori lineari da X in sé sono tutti continui e compatti, e se sono iniettivi sono anche surgettivi con inverso continuo. Quindi 0 appartiene al loro risolvente. Viceversa, sia $A \in \mathcal{L}(X)$ compatto e iniettivo e sia $0 \in \rho(A)$: allora A è anche surgettivo e $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dunque $I = A^{-1}A$ è un operatore compatto in virtù della proposizione precedente: pertanto X ha dimensione finita. $\Box$

Corollario 11.2.8 *Sia X uno spazio normato di dimensione infinita. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ è un operatore compatto, allora $0 \in \sigma(A)$.* $\Box$

Proposizione 11.2.9 *Siano X e Y spazi normati e sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se A è compatto, allora A^* è compatto; viceversa, se A^* è compatto e Y è uno spazio di Banach, allora A è compatto.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Per provare che A^* è compatto dimostreremo che se W è un sottoinsieme limitato di Y^* allora $A^*(W)$ è totalmente limitato in X^*: dato che X^* è completo, ciò implicherà che $A^*(W)$ è relativamente compatto in X^*, che è quanto basta. Sia $\varepsilon > 0$: posto $S = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$, essendo A compatto l'insieme $A(S)$ è totalmente limitato in Y. Quindi esistono $x_1, \ldots, x_n \in S$ tali che

$$\min_{1 \le i \le n} \|Ax - Ax_i\|_Y < \varepsilon \qquad \forall x \in S.$$

Definiamo l'operatore $B : Y^* \to \mathbb{C}^n$ ponendo $Bg = (g(Ax_1), \ldots, g(Ax_n))$ per ogni $g \in Y^*$. Allora

$$|Bg|_n^2 = \sum_{i=1}^n |g(Ax_i)|^2 \le n \|g\|_{Y^*}^2 \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2 \,,$$

cosicché $B \in \mathcal{L}(Y^*, \mathbb{C}^n)$. Dato che B ha immagine finito-dimensionale, l'insieme $B(W)$ è totalmente limitato in $\mathbb{C}^n$: quindi esistono $g_1, \ldots, g_m \in W$ tali che

$$\min_{1 \le j \le m} |Bg_j - Bg|_n < \varepsilon \qquad \forall g \in W.$$

Dunque, fissata $g \in W$, è possibile scegliere un indice j_0 fra 1 e m (dipendente da g) in modo che

$$|g(Ax_i) - g_{j_0}(Ax_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Vogliamo adesso valutare la quantità

$$\|A^* g_{j_0} - A^* g\|_{X^*} = \sup_{x \in S} |g_{j_0}(Ax) - g(Ax)|.$$

Per ogni fissato $x \in S$, sia i_0 l'indice fra 1 e n (dipendente da x) tale che $\|Ax - Ax_{i_0}\|_Y < \varepsilon$; allora si ha

$$\begin{aligned} &|g_{j_0}(Ax) - g(Ax)| \le \\ &\quad \le |g_{j_0}(Ax) - g_{j_0}(Ax_{i_0})| + |g_{j_0}(Ax_{i_0}) - g(Ax_{i_0})| + |g(Ax_{i_0}) - g(Ax)| \le \\ &\quad \le (\|g_{j_0}\|_{Y^*} + \|g\|_{Y^*})\,\varepsilon + \varepsilon \le \left(1 + 2 \sup_{g \in W} \|g\|_{Y^*}\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Da questa relazione, per l'arbitrarietà di $x \in S$, segue che

$$\min_{1 \le j \le m} \|A^* g_j - A^* g\|_{X^*} \le \|A^* g_{j_0} - A^* g\|_{X^*} \le \left(1 + 2 \sup_{g \in W} \|g\|_{Y^*}\right) \varepsilon \quad \forall g \in W.$$

Ciò prova che $A^*(W)$ è totalmente limitato in X^*.

($\Longleftarrow$) L'argomentazione è del tutto analoga. $\square$

Proposizione 11.2.10 *Siano X e Y spazi normati e sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore compatto. Allora l'immagine $R(A)$ è separabile; inoltre $R(A)$ è uno spazio normato completo se e solo se ha dimensione finita.*

Dimostrazione Proviamo la separabilità. Dato che $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nB)$, ove B è la palla unitaria chiusa di X, basta mostrare che $A(B)$ è separabile. Poiché A è compatto, l'insieme $A(B)$ è relativamente compatto in Y e dunque totalmente limitato: quindi per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ esistono $y_1^m, \ldots, y_{p_m}^m \in A(B)$ tali che

$$\inf_{1 \le i \le p_m} \|y - y_i^m\|_Y < \frac{1}{m} \qquad \forall y \in A(B).$$

Ne segue che $\{y_i^m : 1 \le i \le p_m\,, m \in \mathbb{N}^+\}$ è un sottoinsieme numerabile denso in $A(B)$. Dimostriamo l'altro enunciato. Ovviamente, se la dimensione di $R(A)$ è finita, allora $R(A)$ è completo. Viceversa, supponiamo che $Z = R(A)$ sia completo. Siccome $A : X \to Z$ è compatto, anche $A^* : Z^* \to X^*$ è compatto (proposizione 11.2.9). Inoltre A^* è iniettivo: infatti se $f \in Z^*$ e $A^* f = 0$ allora $f(Ax) = 0$ per ogni $x \in X$, ovvero, per la surgettività di $A : X \to Z$, $fy = 0$ per ogni $y \in Z$: pertanto $f = 0$. In definitiva, $A^* : Z^* \to R(A^*)$ è bigettivo. Proviamo che $(A^*)^{-1} : R(A^*) \to Z^*$ è continuo: se così non fosse, esisterebbe $\{f_n\} \subseteq Z^*$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \|A^* f_n\|_{X^*} = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_{Z^*} = +\infty.$$

Quindi $(A^* f_n)x \to 0$ in $\mathbb{C}$ per ogni $x \in X$, cioè $f_n y \to 0$ in $\mathbb{C}$ per ogni $y \in Z$. Essendo Z completo, per il teorema di Banach-Steinhaus si conclude che $\{f_n\}$ è limitata in Z^*, e ciò è assurdo. Dunque $A^* : Z^* \to R(A^*)$ è compatto, bigettivo e ha inverso continuo. Dalla proposizione 11.2.7 si ottiene allora che Z^* ha dimensione finita e infine che $\dim Z = \dim Z^* < \infty$. $\square$

Esercizi 11.2

1. Siano X, Y spazi normati e sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di operatori compatti tale che $A_n x \to Ax$ in Y per $n \to \infty$. L'operatore A è necessariamente compatto? È continuo?

2. Siano X, Y spazi di Banach con X riflessivo, e sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si provi che A è compatto se e solo se $Ax_n \to Ax$ in Y per ogni $x_n \rightharpoonup x$ in X; si provi poi che quando X non è riflessivo tale condizione non è sufficiente per la compattezza di A (ma è sempre necessaria).

3. Sia X uno spazio di Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ è bigettivo, si provi che A è compatto se e solo se $\dim X < \infty$.

4. Sia $Tf(x) = x^2 f(x)$ per $f \in L^2(a, b)$.

   (i) Si provi che $T \in \mathcal{L}(L^2(a, b))$ e se ne calcoli la norma.

   (ii) Si mostri che T non ha autovalori e che $\sigma(T) = [0, \|T\|]$.

5. Fissata $g \in C[a, b]$, sia $A : C[a, b] \to C[a, b]$ definito da $Af(x) = f(x)g(x)$.

   (i) Si calcoli $\|A\|$ e si provi che se $g \neq 0$ allora A non è compatto.

   (ii) Per quali g l'operatore A ha autovalori?

   (iii) Se A ha autovalori, si provi che essi sono al più un'infinità numerabile.

6. Sia A l'operatore dell'esempio 11.2.2 (2). Si provi che $(\lambda I - A)^{-1}$, quando è definito, è un operatore compatto, e se ne determini lo spettro. Si analizzi poi la situazione per gli operatori degli esempi 11.2.2 (3) e 11.2.2 (4).

7. Siano X, Y spazi di Banach e siano $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ con B compatto. Si provi che se $R(A) \subseteq R(B)$, allora anche A è compatto.

8. Sia $X = C[0, 1]$ e poniamo $Tf(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{s}} ds$.

   (i) Si calcoli $\|T\|_{\mathcal{L}(X)}$;

   (ii) Si provi che T è compatto e se ne determini lo spettro;

   (iii) per $\lambda \in \rho(T)$ si scriva esplicitamente l'operatore $R(\lambda, T)$.

   [**Traccia:** per $\lambda \neq 0$ si consideri l'equazione $\lambda f - Tf = g$ supponendo dapprima $g \in C^1[0, 1]$: si osservi che se f è soluzione allora $f \in C^1$. Derivando, si ottiene l'equazione $\lambda f' - f = g'$, la cui soluzione (metodo di variazione delle costanti seguito da una integrazione per parti) è $f(t) = \frac{1}{\lambda} g(t) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{(t-s)/\lambda} g(s) ds$. Infine si noti che tale espressione ha senso per ogni $g \in C[0, 1]$. . .]

9. Sia A l'operatore integrale dell'esempio 10.4.6 (2). Si provi che $A : L^2(a.b) \to L^2(a, b)$ è compatto.

11.3 Operatori compatti in spazi di Hilbert

Nel caso di operatori compatti da uno spazio di Hilbert in sé, la teoria diventa più interessante e completa. Per cominciare, analizziamo il comportamento di un operatore compatto rispetto alla convergenza debole.

Proposizione 11.3.1 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $Ax_n \to Ax$ in H.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Sia $K \subseteq H$ un insieme limitato e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in K. Per il corollario 10.7.3 esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x \in H$. Per ipotesi, ciò implica $Ax_{n_k} \to Ax$, il che mostra che $A(K)$ è relativamente compatto. Dunque l'operatore A è compatto.

($\Longrightarrow$) Viceversa, sia A compatto e sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H. Allora per l'esercizio 10.6.7 si ha $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in H. Se, per assurdo, $\|Ax_n - Ax\|_H$ non tendesse a 0, esisterebbe una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $\|Ax_{n_k} - Ax\|_H \geq \varepsilon_0 > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. D'altra parte, per la limitatezza di $\{x_{n_k}\}$ e la compattezza di A, sarebbe possibile estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{x'_{n_k}\} \subseteq \{x_{n_k}\}$ tale che $Ax'_{n_k} \to y \in H$. A maggior ragione allora $Ax'_{n_k} \rightharpoonup y$, e per l'unicità del limite debole (esercizio 10.6.5) si deduce che $y = Ax$, e ciò è assurdo. Pertanto $Ax_n \to Ax$ in H. $\square$

Proposizione 11.3.2 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $(Ax_n, x_n)_H \to (Ax, x)_H$.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia A compatto e sia $x_n \rightharpoonup x$ in H. Per avere la tesi basta osservare che

$$\begin{aligned} |(Ax_n, x_n)_H - (Ax, x)_H| &\leq |(Ax_n - Ax, x_n)_H| + |(Ax, x_n - x)_H| \leq \\ &\leq \|Ax_n - Ax\|_H \|x_n\|_H + |(Ax, x_n - x)_H| \end{aligned}$$

e che l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to \infty$ in virtù della limitatezza di $\|x_n\|$.

($\Longleftarrow$) Viceversa, osserviamo anzitutto che se $z_n \rightharpoonup 0$ e $y_n \rightharpoonup 0$ in H, allora si ha anche $z_n + \alpha y_n \rightharpoonup 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$: quindi, per ipotesi,

$$(Az_n, z_n)_H \to 0, \quad (Ay_n, y_n)_H \to 0, \quad (A(z_n + \alpha y_n), z_n + \alpha y_n)_H \to 0.$$

Scegliendo $\alpha = 1$ e $\alpha = i$, per differenza si ottiene che $(Az_n, y_n)_H \to 0$.

Ciò premesso, sia $x_n \rightharpoonup x$ in H e sia $z_n = x_n - x$, cosicché $z_n \rightharpoonup 0$. Poiché, per l'esercizio 10.6.7, $Az_n \rightharpoonup 0$, scegliendo $y_n = Az_n$ l'argomentazione precedente mostra che $\|Az_n\|_H \to 0$, ossia $Ax_n \to Ax$. La proposizione 11.3.1 implica allora che A è compatto. $\square$

Analizziamo ora la struttura dello spettro degli operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert. Il primo enunciato estende un noto risultato algebrico valido per le matrici hermitiane.

Proposizione 11.3.3 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora:*

(i) *gli autovalori di A sono reali;*

(ii) *autovettori relativi ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali.*

Dimostrazione (i) Se $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$, allora

$$\lambda \|x\|_H^2 = (Ax, x)_H = (x, Ax)_H = \overline{\lambda} \|x\|_H^2 \,,$$

da cui $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) Se $Ax = \lambda x$ e $Ax' = \lambda' x'$ con $x, x' \neq 0$ e $\lambda \neq \lambda'$, allora a causa di (i) si ha

$$\lambda(x, x')_H = (Ax, x')_H = (x, Ax')_H = \overline{\lambda'}(x, x')_H = \lambda'(x, x')_H \,,$$

da cui $x \perp x'$. □

Proposizione 11.3.4 *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e sia $Q(x) = (Ax, x)_H$ la* forma quadratica *associata ad A; poniamo*

$$m = \inf_{\|x\|_H = 1} Q(x), \qquad M = \sup_{\|x\|_H = 1} Q(x).$$

Allora:

(i) *si ha $-\infty < m \leq M < +\infty$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}$;*

(ii) *supposto A anche compatto, se $m \neq 0$ allora m è autovalore di A, e se $M \neq 0$ allora M è autovalore di A.*

Dimostrazione (i) Anzitutto, evidentemente, $Q(x)$ è reale per ogni $x \in H$, si ha $m \leq M$ e

$$\max\{|m|, |M|\} \leq \sup_{\|x\|_H = 1} |Q(x)| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Se $A = 0$ allora, banalmente, $0 = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}$; supponiamo dunque $A \neq 0$ e poniamo

$$N = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|_H = 1} |Q(x)| :$$

allora, come si è osservato, $0 < N \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$. D'altra parte, essendo A autoaggiunto,

$$(A(x+y), x+y)_H - (A(x-y), x-y)_H = 4\mathrm{Re}(Ax, y)_H \,,$$

da cui, grazie all'identità del parallelogrammo (proposizione 7.2.9), otteniamo per ogni $x, y \in H$

$$\begin{aligned} 4\mathrm{Re}(Ax, y)_H &\leq |(A(x+y), x+y)_H| + |(A(x-y), x-y)_H| \leq \\ &\leq N \left[\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 \right] = 2N \left[\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 \right]. \end{aligned}$$

Per ogni $x \in H$ tale che $\|x\|_H = 1$ e $Ax \neq 0$, scegliendo $y = \frac{Ax}{\|Ax\|_H}$ si ricava $\|Ax\|_H \leq N$: dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq N$.

(ii) Sia A compatto e autoaggiunto. Sia $m \neq 0$ e sia $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $\|x_n\|_H = 1$

e $m \leq (Ax_n, x_n)_H < m + \frac{1}{n}$: allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x$, con $x \in H$; per la proposizione 10.6.2 risulta $\|x\|_H \leq 1$. Poiché A è compatto, in virtù della proposizione 11.3.2 otteniamo

$$(Ax, x)_H = \lim_{k \to \infty} (Ax_{n_k}, x_{n_k})_H = m \neq 0,$$

e in particolare $x \neq 0$.
Consideriamo adesso l'operatore $A - mI$: esso è autoaggiunto e positivo, in quanto, per definizione di m e per omogeneità,

$$((A - mI)z, z)_H = (Az, z)_H - m\|z\|_H^2 \geq 0 \quad \forall z \in H.$$

In virtù dell'esercizio 8.2.7, per la forma quadratica $z \mapsto ((A - mI)z, z)_H$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ossia si ha

$$|((A - mI)z, y)_H|^2 \leq ((A - mI)z, z)_H \cdot ((A - mI)y, y)_H = 0 \qquad \forall z, y \in H;$$

scegliendo $z = x_{n_k}$ si ricava per ogni $y \in H$

$$|((A - mI)x_{n_k}, y)_H|^2 \leq ((A - mI)x_{n_k}, x_{n_k})_H \cdot ((A - mI)y, y)_H < \frac{1}{n_k} \cdot ((A - mI)y, y)_H\,,$$

da cui, per $k \to \infty$,

$$(Ax - mx, y)_H = 0 \qquad \forall y \in H,$$

e dunque $Ax = mx$. Essendo $x \neq 0$, il numero m è autovalore di A con autovettore x. Discorso analogo se $M \neq 0$. □

Osservazioni 11.3.5 **(1)** Se l'operatore A non è compatto, non è detto che m e M, anche se non nulli, siano entrambi autovalori per A: ad esempio, in $H = \ell^2$ per l'operatore $(Ax)_n = (1 + \frac{1}{n})x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, che non è compatto, si ha $M = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 2$ e $m = 1$, ma $Ax = x$ se e solo se $x = 0$.

(2) Dalla proposizione 11.3.4 (i) segue facilmente, analizzando tutti i casi possibili, che almeno uno fra i due numeri $\pm\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ è autovalore di A.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema, che è un'estensione della proprietà di diagonalizzazione delle matrici hermitiane in $\mathbb{C}^N$.

Teorema 11.3.6 (spettrale) *Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H.*

(i) *Se $\dim R(A) = n < \infty$, allora A possiede n autovalori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diversi da 0 (non necessariamente distinti), più l'autovalore 0 quando $\dim H > n$, ed esiste un sistema ortonormale $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di autovettori relativi ai λ_k, tale che*

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H;$$

inoltre

$$\sigma(A) = \begin{cases} \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n} & \text{se } \dim H = n, \\ \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n} \cup \{0\} & \text{se } \dim H > n. \end{cases}$$

(ii) *Se* $\dim R(A) = \infty$, *allora* A *possiede un'infinità numerabile di autovalori reali* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, *diversi da* 0 *(non tutti necessariamente distinti), tali che* $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}^+$ *e* $\lambda_k \to 0$ *per* $k \to \infty$, *ed esiste un sistema ortonormale* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ *di autovettori relativi ai* λ_k *, tale che*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H;$$

inoltre

$$\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \cup \{0\}.$$

In particolare, ogni autovalore di A *ha molteplicità finita. Infine, il sistema ortonormale* $\{x_k\}$ *è completo in* H *se e solo se* 0 *non è autovalore di* A.

Dimostrazione Se $A = 0$ tutti gli enunciati sono banalmente veri: si ha $n = 0$ e l'unico autovalore di A è 0. Supporremo dunque $A \neq 0$. Ricordando l'osservazione 11.3.5 (2), sia $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalore di A con $|\lambda_1| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ e sia x_1 un corrispondente autovettore di norma unitaria. Detto M_1 il sottospazio generato da x_1, notiamo che il sottospazio $M_1^\perp$ è invariante per A, in quanto

$$y \in M_1^\perp \implies (Ay, x_1)_H = (y, Ax_1)_H = \lambda_1 (y, x_1)_H = 0 \implies Ay \in M_1^\perp.$$

Consideriamo allora la restrizione $A|_{M_1^\perp}$: essa è un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $M_1^\perp$. In virtù dell'osservazione 11.3.5 (2), esiste un autovalore $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_2| = \|A\|_{\mathcal{L}(M_1^\perp)} \leq |\lambda_1|$; scelto un autovettore corrispondente x_2 di norma unitaria, consideriamo il sottospazio M_2 generato da M_1 e da x_2: esso è ancora invariante per A e dunque la restrizione $A|_{M_2^\perp}$ è un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $M_2^\perp$. Iterando questo procedimento si presentano due casi:

(a) $\dim R(A) < \infty$: in questo caso esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $A|_{M_n^\perp} = 0$. Se $\dim H = n$, ciò significa che $M_n^\perp = \{0\}$, mentre se $\dim H > n$ allora $M_n^\perp = \ker A$, ossia tale sottospazio è generato da autovettori relativi all'autovalore 0;

(b) $\dim R(A) = \infty$: in questo caso esiste una successione $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$ tale che λ_k è autovalore non nullo di A e $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Si ha inoltre $\lambda_k \to 0$ per $k \to \infty$: infatti i corrispondenti autovettori x_k formano un sistema ortonormale e pertanto convergono debolmente a 0 in H, da cui, essendo A compatto, $\|Ax_k\|_H |\lambda_k| \to 0$ in virtù della proposizione 11.3.1.

Da quanto detto segue in particolare che ogni autovalore ha molteplicità finita. Nel caso (a) si ha anche, ovviamente, la formula di rappresentazione

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} (Ax, x_k)_H \, x_k = \sum_{k=1}^{n} (x, Ax_k)_H \, x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \quad \forall x \in H.$$

Proviamo la formula di rappresentazione nel caso (b). Sia $x \in H$ e poniamo $y_k = x - \sum_{h=1}^{k} (x, x_h)_H \, x_h$. Poiché $y_k \in M_k^\perp$, per definizione dei λ_k sarà $\|Ay_k\|_H \leq |\lambda_{k+1}| \cdot \|y_k\|_H$; ma essendo

$$\|y_k\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{h=1}^{k} |(x, x_h)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

si ricava $\|Ay_k\|_H \le |\lambda_{k+1}| \cdot \|x\|_H \to 0$ per $k \to \infty$. Pertanto, osservando che

$$Ay_k = Ax - \sum_{h=1}^{k} (x, x_h)_H \, Ax_h = Ax - \sum_{h=1}^{k} \lambda_h (x, x_h)_H \, x_h \,,$$

si conclude che

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H.$$

Proviamo infine le asserzioni relative allo spettro di A. Mostriamo anzitutto che A non ha altri autovalori $\lambda \neq 0$ distinti dai λ_k: se infatti x_0 fosse un autovettore di norma unitaria relativo a λ, allora per la proposizione 11.3.3 avremmo

$$\lambda x_0 = Ax_0 = \sum_k \lambda_k (x_0, x_k)_H \, x_k = 0,$$

da cui $x_0 = 0$, il che è assurdo.
Sia ora $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ distinto dai λ_k e proviamo che $\lambda \in \rho(A)$. Non è escluso che 0 sia autovalore di A con molteplicità qualunque: ricordando l'esercizio 10.3.3, dato che A è autoaggiunto risulta $\overline{R(A)} = (\ker A)^{\perp}$. Sia dunque $y \in H$. L'equazione $\lambda x - Ax = y$ si scrive nel modo seguente:

$$\sum_k (\lambda - \lambda_k)(x, x_k)_H \, x_k + \lambda P_{\ker A} \, x = \sum_k (y, x_k)_H \, x_k + P_{\ker A} \, y.$$

Ne segue

$$(\lambda - \lambda_k)(x, x_k)_H = (y, x_k)_H \qquad \forall k,$$
$$\lambda P_{\ker A} \, x = P_{\ker A} \, y.$$

Pertanto l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha l'unica soluzione

$$x = \sum_k \frac{(y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k} \, x_k + \frac{1}{\lambda} \, P_{\ker A} \, y;$$

l'espressione a secondo membro definisce anche l'operatore $R(\lambda, A)$. Inoltre, posto $d = \min_k |\lambda - \lambda_k|$ (si noti che $d > 0$), vale la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|x\|_H^2 &= \|R(\lambda, A)y\|_H^2 = \\ &= \sum_k \frac{|(y, x_k)_H|^2}{|\lambda - \lambda_k|^2} + \frac{\|P_{\ker A} \, y\|_H^2}{|\lambda|^2} \le \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \|y\|_H^2; \end{aligned}$$

perciò $\lambda \in \rho(A)$. Tenuto conto del corollario 11.2.8, si ottiene la tesi. $\square$

La rappresentazione fornita dal teorema spettrale caratterizza gli operatori compatti e autoaggiunti. Vale infatti la seguente

Proposizione 11.3.7 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ definito da*

$$Ax = \sum_k \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H,$$

ove la somma è finita o infinita, $\{x_k\}$ è un sistema ortonormale in H al più numerabile e $\{\lambda_k\}$ è una famiglia di numeri reali tali che $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ e $\lambda_k \to 0$. Allora A è un operatore compatto e autoaggiunto, i λ_k sono i suoi autovalori non nulli e gli x_k sono i corrispondenti autovettori.

Dimostrazione Si verifica immediatamente che $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$ per ogni $x, y \in H$, cosicché A è autoaggiunto.
Proviamo che A è compatto: sia $\{y_n\} \subseteq H$ una successione tale che $y_n \rightharpoonup y \in H$. Allora

$$A(y_n - y) = \sum_k \lambda_k (y_n - y, x_k)_H \, x_k \, .$$

Poiché $\lambda_k \to 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $|\lambda_k| < \varepsilon$ per ogni $k > \nu$. D'altra parte si ha $\lim_{n\to\infty}(y_n - y, x_k)_H = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Perciò, grazie all'ortonormalità degli x_k e alla disuguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.6), si ha

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \|A(y_n - y)\|_H^2 \leq \\
&\quad \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} |\lambda_k|^2 |(y_n - y, x_k)_H|^2 + \limsup_{n\to\infty} \sum_{k>\nu} \varepsilon^2 |(y_n - y, x_k)_H|^2 \leq \\
&\quad \leq 0 + \varepsilon^2 \sup_n \|y_n - y\|_H^2 \, ,
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε otteniamo $Ay_n \to Ay$. Dalla proposizione 11.3.1 segue la tesi.
□

Come mostra la proposizione precedente, la rappresentazione fornita dal teorema spettrale non è vera per gli operatori che sono compatti ma non autoaggiunti, nemmeno in dimensione finita: ad esempio, come si sa, non tutte le matrici $N \times N$ possono essere diagonalizzate. Anche la proprietà di possedere almeno un autovalore non sussiste in generale per gli operatori soltanto compatti, come mostra l'esempio che segue; tuttavia essa è sempre vera in dimensione finita, dato che ogni matrice $N \times N$ ha autovalori.

Esempio 11.3.8 Sia $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da

$$(Ax)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{x_{n-1}}{n} & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che A è compatto e che non possiede autovalori. Chiaramente $0 \in \sigma(A)$ poiché A è compatto; in realtà lo spettro di questo operatore è costituito dal solo punto 0. Infatti si verifica per induzione che

$$(A^m y)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \dfrac{y_{n-m}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)} & \text{se } n \geq m, \end{cases}$$

cosicché

$$\|A^m y\|_H^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|y_{n-m}|^2}{[n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)]^2} \leq \frac{1}{[m!]^2}\, \|y\|_H^2 \qquad \forall y \in \ell^2,$$

ossia $\|A^m\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \leq \frac{1}{m!}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, il che ci dice che A ha raggio spettrale nullo:

$$r_\sigma(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}^{1/m} = 0.$$

Ricordando l'esercizio 11.1.6 si conclude che $\sigma(A) = \{0\}$.

Terminiamo il paragrafo con un'altra caratterizzazione degli operatori compatti.

Teorema 11.3.9 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se esiste una successione di operatori $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$, tali che* $\dim R(A_n) < \infty$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(H)$.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) La tesi segue dall'esempio 11.2.2 (1) e dalla proposizione 11.2.3.

($\Longrightarrow$) Per ipotesi, detta B la palla unitaria di H, l'insieme $A(B)$ è relativamente compatto in Y: dunque, fissato $n \in \mathbb{N}^+$, esistono $y_1, \ldots y_{m_n} \in A(B)$ tali che

$$A(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} B\left(y_i, \frac{1}{n}\right).$$

Sia allora $M_n = [\{y_1, \ldots, y_{m_n}\}]$: per ogni n, M_n è un sottospazio finito-dimensionale di H, e se P_n è la proiezione ortogonale su M_n risulta $P_n y_i = y_i$ per $i = 1, \ldots, m_n$. Quindi per ogni $x \in B$ si ha, scegliendo y_j in modo che $Ax \in B(y_j, 1/n)$:

$$\|Ax - P_n Ax\|_H \leq \|Ax - y_j\|_H + \|y_j - P_n Ax\|_H < \frac{1}{n} + \|P_n(y_j - Ax)\|_H < \frac{2}{n}\,.$$

Ciò prova che

$$\|A - P_n A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{2}{n}\,,$$

da cui la tesi. $\square$

Esercizi 11.3

1. Sia $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito per ogni $x \in \ell^2$ da $(Tx)_n = n^{-\frac{3}{4}} x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Provare che T è compatto e autoaggiunto e determinarne lo spettro.

2. Sia $\{a_{ij}\}$ una matrice infinita tale che $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. Posto $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ per ogni $x \in \ell^2$, si provi che $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e che A è compatto.

3. Sia $\alpha \in \ell^\infty$ e si definisca $(Ax)_n = \alpha_n x_n$ per ogni $x \in \ell^2$. Si verifichi che $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$, si calcoli $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}$ e si provi che A è compatto se e solo se $\alpha \in c_0$.

4. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto; posto
$$m = \inf_{\|x\|_H=1} (Ax, x)_H \,, \qquad M = \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x)_H \,,$$
si provi che $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.
[**Traccia:** si ricordi che lo spettro è reale; se ad esempio $\lambda > M$, si applichi all'operatore strettamente positivo $\lambda I - A$ l'esercizio 10.3.3.]

5. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto. Dimostrare che:

   (i) se $\lambda \neq 0$ allora $R(\lambda I - A)$ è un sottospazio chiuso di H;

   (ii) se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(A)$, allora λ è un autovalore di A;

   (iii) gli autovalori di A non hanno punti d'accumulazione diversi da 0;

   (iv) $\sigma(A)$ è al più numerabile.

6. Si provi l'esercizio precedente nel caso in cui X è uno spazio di Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$ è compatto.
Traccia: per sopperire all'assenza della nozione di ortogonalità, si utilizzi l'esercizio 10.1.11.]

7. Sia H uno spazio di Hilbert non separabile e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ compatto e autoaggiunto. Si provi che 0 è un autovalore di T.

11.4 L'alternativa di Fredholm

La particolare struttura dello spettro degli operatori compatti in uno spazio di Hilbert H permette di analizzare in dettaglio la risolubilità di equazioni nell'incognita $x \in H$ della forma
$$\lambda x - Ax = y$$
con $y \in H$ assegnato e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fissato. Accanto a tale equazione sarà utile considerare l'equazione omogenea associata
$$\lambda x - Ax = 0$$
nonché le due equazioni "aggiunte" delle precedenti:
$$\overline{\lambda} z - A^* z = w$$
con $w \in H$ assegnato, e
$$\lambda z - A^* z = 0.$$
Il legame fra queste quattro equazioni è fornito dal seguente "teorema dell'alternativa":

Teorema 11.4.1 (di Fredholm) *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allora:*

(i) *Fissato $y \in H$, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione se e solo se y è ortogonale a ogni soluzione z dell'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$: in altre parole, $R(\lambda I - A) = [\ker(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp$.*

(ii) *Fissato $w \in H$, l'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = w$ ha soluzione se e solo se w è ortogonale a ogni soluzione x dell'equazione $\lambda x - Ax = 0$: in altre parole, $R(\overline{\lambda} I - A^*) = [\ker(\lambda I - A)]^\perp$.*

(iii) *L'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione unica per ogni $y \in H$ se e solo se l'equazione $\lambda x - Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$, ovvero $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$.*

(iv) *L'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = w$ ha soluzione unica per ogni $w \in H$ se e solo se l'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$ ha l'unica soluzione $z = 0$, ovvero $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ se e solo se $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = \{0\}$.*

(v) *Le equazioni $\lambda x - Ax = 0$ e $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$ hanno lo stesso numero (finito) di soluzioni linearmente indipendenti, ossia*

$$\dim \ker(\lambda I - A) = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty.$$

Dimostrazione Faremo cinque passi successivi (per i primi due si veda anche l'esercizio 10.3.2).

1o passo: $R(\lambda I - A)$ e $R(\overline{\lambda} I - A^*)$ sono chiusi.

Sia $\{y_n\} \subseteq R(\lambda I - A)$ una successione tale che $y_n \to y \in H$: dobbiamo provare che $y \in R(\lambda I - A)$. Esiste $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $\lambda x_n - Ax_n = y_n$; si può supporre che $x_n \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, perché altrimenti si prenderà $x'_n = x_n - Px_n$, essendo P la proiezione ortogonale su $\ker(\lambda I - A)$. Inoltre si può supporre $\{x_n\}$ limitata: infatti se esistesse una sottosuccessione (sempre indicata con $\{x_n\}$) tale che $\|x_n\|_H \to \infty$, avremmo, per la limitatezza di $\{y_n\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda x_n - Ax_n}{\|x_n\|_H} = 0.$$

Ma allora, per la limitatezza di $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|_H} \right\}$ e la compattezza di A, passando a un'ulteriore sottosuccessione $\left\{ \frac{Ax_n}{\|x_n\|_H} \right\}$ convergerebbe, per cui anche $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|_H} \right\}$ convergerebbe a un elemento $z \in H$. Ovviamente avremmo $\|z\|_H = 1$ e $\lambda z - Az = 0$; ma dato che $x_n \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, dovrebbe essere $z \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$ e quindi $z = 0$: ciò è assurdo, e pertanto $\{x_n\}$ è limitata.

Esiste allora una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che Ax_{n_k} converge in H, quindi anche $x_{n_k} = \lambda^{-1}[y_{n_k} - Ax_{n_k}]$ converge a un certo elemento $x \in H$. Ne segue $y = \lambda x - Ax$, cioè $y \in R(\lambda I - A)$. Pertanto $R(\lambda I - A)$ è chiuso. In modo assolutamente analogo si prova che $R(\overline{\lambda} I - A^*)$ è chiuso.

2o passo: $\ker(\lambda I - A) = R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$ e $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = R(\lambda I - A)^\perp$.

Sia $z \in \ker(\lambda I - A)$: allora

$$(z, (\overline{\lambda} I - A^*)x)_H = ((\lambda I - A)z, x)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

e quindi $z \in R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$. Viceversa, se $z \in R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$, allora

$$((\lambda I - A)z, x)_H = (z, (\overline{\lambda} I - A^*)x)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

da cui $(\lambda I - A)z = 0$. In modo del tutto analogo si prova l'altra uguaglianza.

3$^{\text{o}}$ passo: Posto $H_k = R((\lambda I - A)^k)$, esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $H_k = H_j$ per ogni $k \geq j$.
Ovviamente si ha $H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$, e gli H_k sono sottospazi chiusi di H in virtù del 1$^{\text{o}}$ passo. Se fosse $H_k \supset H_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si troverebbe un sistema ortonormale $\{x_k\} \subset H$ con $x_k \in H_k$ e $x_k \perp H_{k+1}$. Allora per $h > k$ si troverebbe

$$Ax_h - Ax_k = -\lambda x_k + [\lambda x_h - (\lambda I - A)x_h + (\lambda I - A)x_k] = -\lambda x_k + y,$$

dove $y = \lambda x_h - (\lambda I - A)x_h + (\lambda I - A)x_k$ è un elemento di $H_{k+1}^\perp$; ne seguirebbe

$$\|Ax_h - Ax_k\|_H^2 = \|\lambda x_k\|_H^2 + \|y\|_H^2 \geq |\lambda|^2,$$

cosicché da $\{Ax_k\}$ sarebbe impossibile estrarre sottosuccessioni convergenti: ciò è assurdo perché A è compatto.

4$^{\text{o}}$ passo: $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ se e solo se $R(\lambda I - A) = H$.
Sia $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ e sia $y \in H$: se $y \notin R(\lambda I - A)$, allora $y \neq (\lambda I - A)x$ per ogni $x \in H$, da cui, per l'iniettività di $\lambda I - A$,

$$(\lambda I - A)^k y - (\lambda I - A)^{k+1} x \neq 0 \qquad \forall x \in H, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e ciò contraddice il 3$^{\text{o}}$ passo.

5$^{\text{o}}$ passo: $\dim \ker(\lambda I - A) = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$.
Se fosse $\dim \ker(\lambda I - A) = +\infty$, esisterebbe un sistema ortonormale $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ contenuto in $\ker(\lambda I - A)$; da $Ax_k = \lambda x_k$ seguirebbe $\|Ax_k - Ax_h\|_H = |\lambda| \|x_k - x_h\|_H = |\lambda|\sqrt{2}$, per cui $\{Ax_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sarebbe priva di sottosuccessioni convergenti: assurdo. Analogamente si prova che $\dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$.
Poniamo ora

$$\mu = \dim \ker(\lambda I - A), \qquad \nu = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*)$$

e proviamo che $\mu = \nu$. Siano $\{x_1, \ldots, x_\mu\}$ e $\{z_1, \ldots, z_\nu\}$ sistemi ortonormali in $\ker(\lambda I - A)$ e in $\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$ rispettivamente. Supponiamo per assurdo che sia $\mu < \nu$, e poniamo

$$Sx = (\lambda I - A)x - \sum_{k=1}^{\mu} (x, x_k)_H \, z_k \,, \qquad x \in H.$$

L'operatore S è del tipo $\lambda I - B$ con B operatore compatto; quindi ad esso è applicabile tutto quanto fin qui dimostrato. Proviamo che S è iniettivo: da $Sx = 0$ segue

$$(\lambda I - A)x = \sum_{k=1}^{\mu} (x, x_k)_H \, z_k \ :$$

poiché il primo membro di questa uguaglianza appartiene a $R(\lambda I - A)$ e il secondo a $\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$, per il 2$^{\text{o}}$ passo si deduce $(\lambda I - A)x = 0$ e $(x, x_k)_H = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, \mu$,

cioè $x \in \ker(\lambda I - A) \cap [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, e in definitiva $x = 0$.
Applichiamo adesso all'operatore S il 4$^{\rm o}$ passo: si ottiene $R(S) = H$. Pertanto esiste $y \in H$ tale che

$$z_{\mu+1} = Sy = (\lambda I - A)y - \sum_{k=1}^{\mu} (y, x_k)_H \, z_k \,,$$

da cui

$$\begin{aligned} 1 = (z_{\mu+1}, z_{\mu+1})_H &= ((\lambda I - A)y, z_{\mu+1})_H - \sum_{k=1}^{\mu} (y, x_k)_H (z_k, z_{\mu+1})_H = \\ &= (y, (\overline{\lambda} I - A^*) z_{\mu+1})_H = (y, 0)_H = 0 \end{aligned}$$

il che è assurdo. Analogamente si mostra che non può essere $\mu < \nu$. Il teorema di Fredholm è dimostrato. □

Osservazione 11.4.2 Dal teorema di Fredholm si ricava che se $A \in \mathcal{L}(H)$ è compatto e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora per l'equazione

$$\lambda x - Ax = y \in H$$

vale la seguente alternativa:

- o λ non è autovalore per A, e allora l'equazione ha soluzione unica per ogni $y \in H$,
- oppure λ è autovalore per A, e allora l'equazione è risolubile, non univocamente, se e solo se $y \in [\ker(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp$

In altre parole, se $\lambda \neq 0$ allora o λ è un punto regolare per A, oppure λ è un autovalore di A (di molteplicità finita): questo fatto, nel caso di un operatore A compatto e autoaggiunto, ci era già noto dal teorema spettrale (teorema 11.3.6).

Torniamo all'equazione

$$\lambda x - Ax = y \in H$$

supponendo stavolta che A sia un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H. Vogliamo rappresentare le soluzioni x, analogamente a quanto fatto nel teorema spettrale, esclusivamente in termini degli autovalori non nulli di A e dei corrispondenti autovettori.

Proposizione 11.4.3 *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ compatto e autoaggiunto, sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ la successione degli autovalori non nulli di A e sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ il corrispondente sistema ortonormale di autovettori. Allora:*

(i) *Se $\lambda \neq 0$ non è autovalore per A, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione unica per ogni $y \in H$, data da*

$$x = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k (y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k} \, x_k + y \right].$$

(ii) *Se $\lambda \neq 0$ è autovalore per A, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione se e solo se $y \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$; in tal caso tutte le soluzioni sono della forma*

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\lambda_k (y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k}\, x_k + y\right] + v,$$

ove v è un arbitrario elemento di $\ker(\lambda I - A)$, il quale è un sottospazio finito-dimensionale di H.

Dimostrazione (i) Dal teorema spettrale segue che l'equazione $\lambda x - Ax = y$ può scriversi nel modo seguente:

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H\, x_k + y\right];$$

ne segue

$$\lambda_n (x, x_n)_H = \frac{\lambda_n}{\lambda}[\lambda_n (x, x_n)_H + (y, x_n)_H] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui

$$\lambda_n (x, x_n)_H = \frac{\lambda_n (y, x_n)_H}{\lambda - \lambda_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

e quindi la rappresentazione cercata. Si noti che si tratta della stessa formula ottenuta nell'ultima parte della dimostrazione del teorema spettrale (teorema 11.3.6): la differenza è che adesso x è espresso in funzione di y e dei soli autovettori x_k, senza far intervenire gli elementi di $\ker A$.

(ii) Sarà $\lambda = \lambda_s$ per un certo $s \in \mathbb{N}^+$: per il teorema di Fredholm (teorema 11.4.1) esistono soluzioni se e solo se $y \in \ker(\overline{\lambda_s} I - A)]^\perp = \ker(\lambda_s I - A)]^\perp$. In tal caso per i $\lambda_n \neq \lambda_s$ si ha ancora

$$\lambda_n (x, x_n)_H = \frac{\lambda_n (y, x_n)_H}{\lambda_s - \lambda_n},$$

mentre, tenuto conto che $y \in [\ker(\lambda_s I - A)]^\perp$, i coefficienti $(x, x_n)_H$ relativi ai $\lambda_n = \lambda_s$ saranno arbitrari. Ne segue la formula cercata.
Il fatto che $\dim \ker(\lambda_s I - A) < \infty$ segue dal teorema spettrale. $\square$

Esempio 11.4.4 Consideriamo l'equazione integrale

$$f(t) - \mu \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds = h(t), \qquad t \in [a,b],$$

che è detta *equazione di Fredholm di seconda specie*. La funzione $K(t,s)$, detta *nucleo* dell'equazione, appartiene a $L^2(]a,b[\times]a,b[)$, il secondo membro h è una funzione assegnata in $L^2(a,b)$ e μ è un parametro complesso non nullo, mentre f è l'incognita.
Come si sa (esercizio 11.2.9), l'operatore $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ definito da

$$Af(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds, \qquad t \in [a,b],$$

è compatto (nonché autoaggiunto se $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$). L'equazione integrale si può scrivere nella forma

$$\lambda f - Af = g,$$

ove $\lambda = \frac{1}{\mu}$ e $g = \frac{1}{\mu}h$, e ad essa è applicabile la teoria precedente. In base alla proposizione 11.4.3 otteniamo che, se $\frac{1}{\mu}$ non è autovalore di A, la soluzione si rappresenta in questo modo:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu}{\mu_k - \mu}(h, \varphi_k)_{L^2(a,b)}\, \varphi_k(t) + h(t) \qquad \text{q.o. in } [a,b],$$

ove $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è un sistema ortonormale di autovettori relativi alla famiglia $\{\frac{1}{\mu_k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ degli autovalori non nulli di A, e la serie converge nel senso di $L^2(a,b)$ (si veda anche l'esercizio 11.4.2).

Esercizi 11.4

1. Sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una successione infinitesima tale che $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = +\infty$. Posto

$$Af(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, e_k)_{L^2(a,b)}\, e_k(t),$$

ove $e_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\pi t$, si provi che $\in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ e che A è compatto, ma non è un operatore integrale con nucleo in $L^2(]0,1[\times]0,1[)$.

2. Sia $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$ tale che $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, e sia A l'operatore dell'esempio 11.4.4. Se $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori non nulli di A e $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori, si provi che:

   (i) $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)\overline{u_k(s)}$ q.o. in $L^2(]a,b[\times]a,b[)$;

   (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$.

3. Sia A l'operatore dell'esempio 11.4.4, sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ la successione degli autovalori non nulli di A e sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ un corrispondente sistema ortonormale di autovettori. Posto

$$K_1(t,s) = K(t,s), \qquad K_{n+1}(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)K_n(\tau,s)\, ds \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

si provi che:

   (i) $K_n \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$ e $\|K_n\|_2 \le \|K\|_2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

   (ii) A^n è un operatore integrale il cui nucleo è $K_n(t,s)$;

   (iii) A^n è compatto, $\{(\lambda_k)^n\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione dei suoi autovalori non nulli e $\{u_k\}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori;

   (iv) $\|K_n\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

   (v) se $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ allora $K_n(t,s) = \overline{K_n(s,t)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

11.5 L'equazione di Sturm - Liouville

Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Mu = pu'' + ru' + qu, \qquad u \in C^2[a,b],$$

ove p, q, r sono funzioni reali continue in $[a,b]$ con $p(x) \neq 0$ in $[a,b]$. È ben noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari il seguente risultato:

Teorema 11.5.1 *Fissati $g \in C[a,b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nelle ipotesi sopra scritte il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Mu = g & \textit{in } [a,b] \\ u(a) = \alpha \\ u'(a) = \beta \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $u \in C^2[a,b]$. $\square$

Osserviamo che un operatore del tipo sopra descritto si può sempre trasformare in un operatore della forma

$$Lv = -(\psi v')' + \varphi v, \qquad v \in C^2[a,b],$$

ove $\psi \in C^1[a,b]$ e inoltre $\psi(x) > 0$ in $[a,b]$: basta moltiplicare l'operatore M per la funzione

$$-\frac{1}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right)$$

e scegliere

$$\psi(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right), \qquad \varphi(x) = -\frac{q(x)}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right).$$

Con questo artificio, lo studio delle equazioni differenziali del secondo ordine, a coefficienti reali, si può ridurre, almeno per certi scopi, allo studio di operatori differenziali della particolare forma sopra descritta. Considereremo dunque l'*equazione di Sturm-Liuville*

$$Lf - \mu f = g,$$

con L operatore del tipo sopra illustrato e f soggetta a condizioni agli estremi di natura più generale di quelle del teorema 11.5.1. Ciò comporterà una restrizione sul dominio dell'operatore L, ma ci permetterà di fare uso della teoria sviluppata nei due paragrafi precedenti.
Definiamo

$$D(L) = \{u \in C^1[a,b] : u' \in AC[a,b],\ u'' \in L^2(a,b),\ B_1 u = B_2 u = 0\},$$

ove

$$B_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a), \qquad B_2 u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b),$$

essendo $\alpha_1\,,\beta_1\,,\alpha_2\,,\beta_2$ numeri reali tali che $|\alpha_1|+|\beta_1|>0$, $|\alpha_2|+|\beta_2|>0$. La scelta di questo tipo di condizioni agli estremi è dettata dal fatto che, grazie ad esse, l'operatore L risulta autoaggiunto in $L^2(a,b)$. La verifica di questo fatto è una semplice applicazione della formula di integrazione per parti per funzioni assolutamente continue (esercizio 6.5.11). In particolare, posto

$$D=\{u\in C^2[a,b]:\ B_1u=B_2u=0\},$$

si ha

$$(Lu,v)_{L^2(a,b)}=(u,Lv)_{L^2(a,b)}\qquad \forall u,v\in D.$$

Nel seguito restringeremo talvolta l'operatore L al dominio D, che è più piccolo del dominio naturale $D(L)$ ma che garantisce la continuità di tutte le funzioni coinvolte. Notiamo che ogni autovettore di L è necessariamente un elemento di $C^2[a,b]$ (esercizio 11.5.1).

Proposizione 11.5.2 *Sia L l'operatore definito nello spazio $L^2(a,b)$ da*

$$Lu=(-\psi u')'+\varphi u,\qquad u\in D,$$

ove $\psi\in C^1[a,b]$ con $\psi>0$ in $[a,b]$, $\varphi\in C[a,b]$ e l'insieme D è quello sopra introdotto. Allora:

(i) *gli autovalori di L sono reali;*

(ii) *autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali in H;*

(iii) *gli autovalori di L formano un insieme al più numerabile.*

Dimostrazione Gli enunciati (i) e (ii) si provano come nella proposizione 11.3.3. Per (iii) si osservi che se l'insieme degli autovalori fosse più che numerabile, esisterebbe, per (i), un sistema ortonormale di autovettori più che numerabile nello spazio di Hilbert separabile $L^2(a,b)$, il che è assurdo per l'osservazione 8.3.3. □

Proposizione 11.5.3 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, gli autovalori di L costituiscono una successione limitata inferiormente.*

Notiamo che se fosse $\psi<0$ in $[a,b]$, la successione degli autovalori sarebbe limitata superiormente.

Dimostrazione Sia $u\in D$ un autovettore relativo all'autovalore μ, con $\|u\|_{L^2(a,b)}=1$. Si ha

$$\begin{aligned}\mu &= \mu\|u\|^2_{L^2(a,b)}=(Lu,u)_{L^2(a,b)}=\int_a^b[(-\psi u')'+\varphi u]\overline{u}\,dx=\\ &= -\psi(b)u'(b)\overline{u(b)}+\psi(a)u'(a)\overline{u(a)}+\int_a^b(\psi|u'|^2+\varphi|u|^2)dx.\end{aligned}$$

Si tratta di minorare gli addendi dell'ultimo membro. Osserviamo preliminarmente che $|u|$, essendo una funzione continua in $[a,b]$, ha minimo non negativo in un punto $z \in [a,b]$: poiché $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$, deve essere

$$|u(z)| = \min_{x\in[a,b]} |u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,,$$

altrimenti avremmo

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1.$$

Di conseguenza si ha, in virtù della disuguaglianza di Hölder (proposizione 9.1.2),

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(x)-u(z)| + |u(z)| = \left|\int_x^z u'(y)\,dy\right| + |u(z)| \leq \\ &\leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \qquad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Ciò premesso, se $u(a) = 0$ oppure $u'(a) = 0$, certamente $\psi(a)u'(a)\overline{u(a)} = 0$; altrimenti se $u(a)u'(a) \neq 0$ allora dalla condizione $B_1 u = 0$ segue che $\beta_1 \neq 0$ e quindi

$$\begin{aligned} &|\psi(a)u'(a)\overline{u(a)}| \leq \|\psi\|_\infty \left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right| |u(a)|^2 \leq \\ &\leq c\left[\sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right] \leq c_1\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + c_2. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo,

$$|\psi(b)u'(b)\overline{u(b)}| \leq c_1\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + c_2.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} \mu &\geq -|\psi(a)u'(a)\overline{u(a)}| - |\psi(b)u'(b)\overline{u(b)}| + \min_{x\in[a,b]}\psi(x)\int_a^b |u'|^2 dy \geq \\ &\geq c_3\int_a^b |u'|^2 dy - c_4\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} - c_5 = \\ &= \left(\sqrt{c_3\int_a^b |u'|^2 dy} - \frac{c_4}{2\sqrt{c_3}}\right)^2 - c_6 > -\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 11.5.4 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, ogni autovalore di L ha molteplicità 1.*

Dimostrazione Siano $u, v \in D$ autovettori non nulli relativi all'autovalore u. Allora

$$\begin{cases} Lu = \mu u \\ B_1 u = B_2 u = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv = \mu v \\ B_1 v = B_2 v = 0. \end{cases}$$

In particolare,

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0,$$

il che implica, essendo α_1 e β_1 non entrambi nulli,

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Perciò esistono $p, q \in \mathbb{C}$, non entrambi nulli, tali che

$$p \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la funzione $pu + qv$ risolve

$$\begin{cases} (L - \mu I)(pu + qv) = 0 \quad \text{in } [a, b] \\ (pu + qv)(a) = (pu + qv)'(a) = 0 \end{cases}$$

e per il teorema 11.5.1 si conclude che $pu + qv \equiv 0$ in $[a, b]$, cioè u e v sono linearmente dipendenti. $\square$

Osservazione 11.5.5 La proposizione 11.5.2 (iii) ci autorizza a supporre, senza restrizione alcuna, che 0 non sia autovalore per L. Infatti in caso contrario, scelto un numero $\nu \in \mathbb{R}$ che non sia autovalore per L, l'equazione $Lu - \mu u = g$ si può riscrivere come

$$(-\psi u')' + (\varphi - \nu)u - (\mu - \nu)u = g;$$

dunque posto $L_0 = L - \nu I$ e $\mu_0 = \mu - \nu$, L_0 è ancora un operatore di Sturm-Liouville che non ha 0 come autovalore, e si ha

$$L_0 u - \mu_0 u = Lu - \mu u = g.$$

Esercizi 11.5

1. Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2 si provi che ogni autovettore di L appartiene a $C^2[a, b]$.

2. Trovare autovalori e autovettori del problema

$$\begin{cases} [(1 + x)^2 u']' + \lambda u = 0 \quad \text{in } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

dedurre che le funzioni

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x}\,\log 2} \sin\left(\frac{\pi k}{2\log 2} \log(1+x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}^+}$$

formano un sistema ortonormale completo in $L^2(0,1)$.
[**Traccia:** Si mostri che u è soluzione del problema proposto se e solo se la funzione $v(t) = u(e^t - 1)$ risolve $v'' + v' + \lambda v = 0$ in $[0, \log 2]$ con le condizioni ai limiti $v(0) = v(\log 2) = 0$.]

3. Si provi che un'equazione della forma

$$(\psi(\xi)u')' + \lambda u = 0, \qquad \xi \in [0, a],$$

con $\psi \in C[0, a]$ e $\psi > 0$, si può trasformare nell'equazione

$$v'' + q(x)v + \lambda v = 0, \qquad x \in [0, b],$$

con opportuni $b > 0$ e $q \in C[0, b]$, facendo uso delle sostituzioni

$$x = \eta(\xi) = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{\psi(t)}}\,. \qquad v(x) = u(\eta^{-1}(\xi))\sqrt[4]{\psi(\eta^{-1}(\xi))}.$$

4. Determinare l'andamento asintotico degli autovalori del problema

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \quad \text{in } [0,1] \\ u(0) = u(1) + u'(1) = 0. \end{cases}$$

11.6 Risolubilità dell'equazione di Sturm - Liouville

Consideriamo ancora l'operatore di Sturm-Liouville L, sotto le ipotesi della proposizione 11.5.2. Nell'ipotesi che 0 non sia autovalore di L, il che, come si è osservato, non è restrittivo, andiamo a dimostrare l'invertibilità di L in $C[a, b]$. Proviamo anzitutto il seguente

Lemma 11.6.1 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L*. Allora i due problemi*

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \quad \textit{in } [a,b] \\ B_1u_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \quad \textit{in } [a,b] \\ B_2u_2 = 0, \end{cases}$$

hanno rispettivamente soluzioni $u_1, u_2 \in C^2[a, b]$ *reali, non identicamente nulle e tali che per ogni* $x \in [a, b]$ *i vettori* $(u_1(x), u_1'(x))$ *e* $(u_2(x), u_2'(x))$ *sono linearmente indipendenti in* $\mathbb{R}^2$*.*

Dimostrazione Per determinare u_1 e u_2 è sufficiente risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ u_1(a) = \beta_1 \\ u_1'(a) = -\alpha_1 \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ u_2(b) = \beta_2 \\ u_2'(b) = -\alpha_2 \,, \end{cases}$$

i quali per il teorema 11.5.1 hanno un'unica soluzione reale di classe C^2 non identicamente nulla. Se $(u_1(x), u_1'(x))$ e $(u_2(x), u_2'(x))$ fossero linearmente dipendenti per qualche $x \in [a,b]$, esisterebbe $x_0 \in [a,b]$ tale che $u_1(x_0)u_2'(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = 0$. D'altra parte è facile verificare che

$$\frac{d}{dx}(\psi(x)[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)]) = 0 \qquad \forall x \in [a,b],$$

e poiché tale funzione è nulla in x_0 si deduce che $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2) = 0$ in $[a,b]$, da cui

$$u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

In particolare, calcolando nei punti $x = a$ e $x = b$, si ha subito $B_2u_1 = B_1u_2 = 0$. Dunque u_1 e u_2 sono soluzioni del problema

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ B_1u = B_2u = 0, \end{cases}$$

e dato che 0 non è autovalore per L, questo implica $u_1 = u_2 = 0$: ciò è assurdo poiché, per ipotesi, u_1 e u_2 sono non identicamente nulle. □

Osservazione 11.6.2 Dalla dimostrazione del lemma 11.6.1 segue che la funzione $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2)$ è costante in $[a,b]$; si può quindi supporre (sostituendo ad esempio α_1 e β_1 con $\lambda\alpha_1$ e $\lambda\beta_1$, e corrispondentemente u_1 con λu_1, per un opportuno numero reale λ) che tale costante sia -1, cioè che

$$\psi(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) = -1 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema 11.6.3 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L *e che risulti* $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2) = -1$ *in* $[a,b]$*, ove* u_1 *e* u_2 *sono le funzioni introdotte nel lemma 11.6.1. Allora esiste una funzione* $G \in C([a,b] \times [a,b])$ *reale e simmetrica, tale che per ogni* $g \in C[a,b]$ *il problema*

$$\begin{cases} Lf = g \quad \text{in } [a,b] \\ B_1f = B_2f = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)g(y)\,dy, \qquad x \in [a,b].$$

Dimostrazione Cerchiamo una soluzione dell'equazione $Lf = g$ con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie: cerchiamo dunque una soluzione del tipo

$$f(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x),$$

ove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0 \\ c_1'u_1' + c_2'u_2' = -\dfrac{g}{\psi} . \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è $u_1u_2' - u_1'u_2 = -1/\psi \neq 0$, quindi con facili calcoli si ottiene

$$c_1' = -u_2 g, \qquad c_1' = u_1 g$$

e pertanto si può scegliere

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y)g(y)\,dy, \qquad c_2(x) = \int_a^x u_1(y)g(y)\,dy.$$

Ne segue

$$f(x) = u_1(x)\int_x^b u_2(y)g(y)\,dy + u_2(x)\int_a^x u_1(y)g(y)\,dy = \int_a^b G(x,y)g(y)\,dy,$$

avendo posto

$$G(x,y) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) & \text{se } x \leq y \\ u_1(y)u_2(x) & \text{se } x \geq y. \end{cases}$$

È chiaro che G è continua in $[a,b]\times[a,b]$ e che è reale e simmetrica. Si verifica allora facilmente che la funzione f appartiene a $C^2[a,b]$, verifica $B_1 f = B_2 f = 0$ e risolve l'equazione $Lf = g$.

Infine, se f_1 è un'altra soluzione del problema, allora la funzione $f - f_1$ verifica

$$\begin{cases} L(f - f_1) = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ B_1(f - f_1) = B_2(f - f_1) = 0, \end{cases}$$

e quindi $f - f_1 = 0$, dato che 0 non è autovalore per L. $\square$

Osservazioni 11.6.4 (1) Dal teorema precedente segue che l'operatore integrale $g \mapsto Gg$, definito da

$$Gg(x) = \int_a^b G(x,y)g(y)\,dy, \qquad x \in [a,b],$$

ove $G(x,y)$ è la funzione sopra definita, agisce su $R(L) = C[a,b]$ a valori in D; inoltre $GL = I_D$, $LG = I_{C[a,b]}$, ossia $G = L^{-1}$.

(2) La funzione G, oltre che continua in $[a,b]\times[a,b]$, è di classe C^2 fuori della diagonale $a \leq x = y \leq b$. Si può dimostrare (esercizio 11.6.1) che la derivata parziale $G_x(x,y)$ ha un salto pari a $-1/\psi'(y)$ per $x \to y$.

Esercizi 11.6

1. Sia $G(\cdot,\cdot)$ la funzione definita nella dimostrazione del teorema 11.6.3. Si provi che:

   (i) G è continua in $[a,b]\times[a,b]$ ed è di classe C^2 per $x\neq y$;

   (ii) $\displaystyle\lim_{x\to y^+}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)-\lim_{x\to y^-}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{\psi'(y)}$ per ogni $y\in[a,b]$;

   (iii) $B_1G(\cdot,y)=B_2G(\cdot,y)=0$ per ogni $y\in[a,b]$;

   (iv) $[LG(\cdot,y)](x)=0$ per $x\in[a,b]\setminus\{y\}$, per ogni $y\in[a,b]$.

11.7 Rappresentazione delle soluzioni

Analizziamo adesso le proprietà dell'operatore G, introdotto nell'osservazione 11.6.4 (1), pensandolo come un operatore integrale su $L^2(a,b)$. Ricordiamo che il suo nucleo $G(x,y)$ è la funzione

$$G(x,y)=\begin{cases} u_1(x)u_2(y) & \text{se } x\le y\\ u_1(y)u_2(x) & \text{se } x\ge y,\end{cases}$$

ove u_1 e u_2 sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} Lu_1=0 \quad \text{in } [a,b]\\ u_1(a)=\beta_1\\ u_1'(a)=-\alpha_1\,,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} Lu_2=0 \quad \text{in } [a,b]\\ u_2(b)=\beta_2\\ u_2'(b)=-\alpha_2\,,\end{cases}$$

e verificano la relazione

$$\psi(x)(u_1(x)u_2'(x)-u_1'(x)u_2(x))=-1 \qquad \forall x\in[a,b].$$

Proposizione 11.7.1 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per L. Allora l'operatore G è compatto e autoaggiunto in $L^2(a,b)$.*

Dimostrazione L'operatore G è compatto per l'esempio 10.4.6 (2) e l'esercizio 11.2.9. Inoltre, in virtù del teorema 11.6.3, per ogni $g_1,g_2\in C[a,b]$ esistono uniche $f_1,f_2\in D$ tali che $Lf_1=g_1$ e $Lf_2=g_2$. Pertanto, essendo L autoaggiunto,

$$(g_1,Gg_2)_{L^2(a,b)}=(Lf_1,f_2)_{L^2(a,b)}=(f_1,Lf_2)_{L^2(a,b)}=(Gg_1,g_2)_{L^2(a,b)}\,.$$

Dalla densità di $C[a,b]$ in $L^2(a,b)$ segue la tesi. $\square$

Proposizione 11.7.2 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per L. Se $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, allora λ è autovalore per G, e $g\in L^2(a,b)$ è un autovettore per G relativo a λ, se e solo se $1/\lambda$ è autovalore per L e g è un autovettore per L relativo a $1/\lambda$. In particolare gli autovalori di G sono reali, non nulli e di molteplicità* 1*, e gli autovettori di G appartengono a D.*

Dimostrazione Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $Gg = \lambda g$ con $g \in L^2(a,b) \setminus \{0\}$. Poiché $G(x,y)$ è continua, si ha $g = \frac{1}{\lambda} Gg \in C[a,b]$ e di conseguenza $Gg \in D$, da cui $g \in D$. Applicando L si trova $Lg = \frac{1}{\lambda} g$. In particolare, dalla proposizione 11.5.2 (i) segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Viceversa, se $f \in D$ e $Lf = \frac{1}{\lambda} f$, allora in particolare $f \in C[a,b]$, e applicando G si deduce $\lambda f = Gf$.
Resta da far vedere che 0 non è autovalore per G. Supponiamo che $g \in L^2(a,b)$ sia tale che $Gg = 0$: dobbiamo provare che $g = 0$. Ricordando la definizione di $G(x,y)$, si vede immediatamente che deve essere

$$c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

ove

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y)g(y)\,dy, \qquad c_2(x) = \int_a^x u_1(y)g(y)\,dy.$$

Osservato che $c_1, u_1, c_2, u_2 \in AC[a,b]$, derivando si ottiene

$$c_1u_1' + c_2u_2' + (c_1'u_1 + c_2'u_2) = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b];$$

ricordando che

$$\begin{cases} c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0 \\ c_1'u_1' + c_2'u_2' = -\dfrac{g}{\psi}\,, \end{cases}$$

si deduce

$$c_1u_1' + c_2u_2' = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b].$$

Poiché $c_1, c_2, u_1', u_2' \in AC[a,b]$, derivando una seconda volta si trova

$$c_1u_1'' + c_2u_2'' + (c_1'u_1' + c_2'u_2') = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b]$$

e moltiplicando per ψ

$$\psi u_1''c_1 + \psi u_2''c_2 - g = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b].$$

Tenendo conto delle relazioni $Lu_1 = Lu_2 = 0$ si ricava

$$(\varphi u_1 - \psi' u_1')c_1 + (\varphi u_2 - \psi' u_2')c_2 - g = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b],$$

cioè, finalmente,

$$\varphi(c_1u_1 + c_2u_2) - \psi'(c_1u_1' + c_2u_2') - g = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b]$$

ovvero $g = 0$ q.o. in $[a,b]$. $\square$

Corollario 11.7.3 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, supponiamo inoltre che 0 non sia autovalore per L. Allora gli autovalori di G formano una successione reale $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ tale che $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e $\lambda_k \to 0$ per $k \to \infty$; inoltre ogni autovalore ha molteplicità 1, ed esiste un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq D$, il quale è completo in $L^2(a,b)$.*

Dimostrazione La tesi è conseguenza del teorema spettrale (teorema 11.3.6) e delle proposizioni 11.7.1 e 11.7.2. □

Proposizione 11.7.4 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, gli autovalori di L formano una successione reale $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, tale che $|\mu_k| \to +\infty$ per $k \to \infty$; inoltre ogni autovalore ha molteplicità* 1 *ed esiste un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq D$, il quale è completo in $L^2(a,b)$.*

Si noti che non si fa l'ipotesi che 0 non sia autovalore per L.

Dimostrazione Se 0 non è autovalore per L, la tesi segue dal corollario 11.7.3 e dalle proposizioni 11.7.2 e 11.5.2. Se invece 0 è autovalore per L, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non sia autovalore per L (esso esiste per la proposizione 11.5.2): posto $L_0 = L - \mu_0 I$, L_0 è un operatore di Sturm-Liouville che non ha 0 come autovalore. Sia G_0 l'operatore integrale che inverte L_0: indicata con $\{\mu_k\}$ la successione degli autovalori di L (reali e di molteplicità 1 in virtù delle proposizioni 11.5.2 e 11.5.4), gli autovalori di G_0 sono i mumeri $\{\frac{1}{\mu_k-\mu_0}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, e i relativi autovettori sono esattamente gli autovettori $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ di L relativi ai $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$. La tesi segue applicando a G_0 il corollario 11.7.3. □

Le proposizioni precedenti, insieme col teorema spettrale, forniscono una rappresentazione delle soluzioni del problema di Sturm-Liouville. La situazione è chiarita dal seguente

Teorema 11.7.5 *Nelle ipotesi della proposizione 11.5.2, valgono i seguenti fatti.*

(i) *Se* 0 *non è autovalore per L, allora il problema*

$$\begin{cases} Lf = g \in C[a,b] \\ B_1 f = B_2 f = 0 \end{cases}$$

è univocamente risolubile in $C^2[a,b]$ per ogni $g \in C[a,b]$, e la soluzione f è somma in $L^2(a,b)$ della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)} u_k \,,$$

dove $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori di L e $\{u_k\}$ è un corrispondente sistema ortonormale completo di autovettori.

(ii) *Se* 0 *è autovalore per L, allora il problema sopra scritto è risolubile (non univocamente) se e solo se $g \in (\ker L)^\perp$; in tal caso le soluzioni sono tutte e sole le funzioni f della forma*

$$f(x) = cu_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)} u_k(x),$$

ove $c \in \mathbb{C}$, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori non nulli di L, $\{u_k\}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori, completo in $(\ker L)^\perp$, e u_0 è un arbitrario versore di $\ker L$, *il quale è un sottospazio* 1*-dimensionale di $L^2(a,b)$; la serie converge nel senso di $L^2(a,b)$.*

In effetti si può dimostrare (esercizio 11.7.2) che le serie sopra scritte convergono assolutamente e uniformemente in $[a, b]$.

Dimostrazione (i) Per il teorema spettrale (teorema 11.3.6)

$$f = Gg = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)} u_k \qquad \text{in } L^2(a, b),$$

da cui la tesi.

(ii) Sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non sia autovalore per L. Allora $L_0 = L - \mu_0 I$ non ha 0 come autovalore. Sia $G_0 = (L_0)^{-1}$: l'equazione $Lf = g$ equivale a $f + \mu_0 G_0 f = G_0 g$. Quest'ultima equazione, per il teorema di Fredholm (teorema 11.4.1) e per l'osservazione 11.4.2, è risolubile se e solo se $G_0 g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp$. D'altra parte, in virtù della relazione

$$(g, v)_{L^2(a,b)} = -(g, \mu_0 G_0 v)_{L^2(a,b)} = -\mu_0 (G_0 g, v)_{L^2(a,b)} \qquad \forall v \in \ker(I + \mu_0 G_0),$$

risulta

$$G_0 g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp \quad \iff \quad g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp.$$

Inoltre, grazie all'invertibilit'a di G_0 si ha

$$\ker(I + \mu_0 G_0) = \ker L$$

in quanto

$$v + \mu_0 G_0 v = 0 \quad \iff \quad (G_0)^{-1} v + \mu_0 v = 0 \quad \iff \quad Lv = 0.$$

Si conclude che l'equazione $Lf = g$ ha soluzione se e solo se $g \in (\ker L)^\perp$.
Sia ora $g \in (\ker L)^\perp$ e sia $f \in D(L)$ tale che $Lf = g$: allora, fissato un versore $u_0 \in \ker L$, possiamo scrivere $f = (f, u_0)_{L^2(a,b)}\, u_0 + f_1$, dove $f_1 \in (\ker L)^\perp$ è univocamente determinata dalla f scelta. Inoltre

$$\begin{aligned}(g, u_k)_{L^2(a,b)} &= (Lf, u_k)_{L^2(a,b)} = (Lf_1, u_k)_{L^2(a,b)} = \\ &= (f_1, Lu_k)_{L^2(a,b)} = \mu_k (f_1, u_k)_{L^2(a,b)} \qquad \forall k \in N^+,\end{aligned}$$

e quindi

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k \qquad \text{in } L^2(a, b),$$

da cui la tesi. $\square$

Esempi 11.7.6 **(1)** Sia

$$D = \{u \in C^2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}, \qquad Lu = -u''.$$

Si scelgono quindi $\psi \equiv 1$ e $\varphi \equiv 0$, e nelle condizioni agli estremi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Cerchiamo gli autovalori e i corrispondenti autovettori: la soluzione generale dell'equazione $-u'' + \mu u = 0$ è

$$u(x) = a \cos \sqrt{\mu}\, x + b \sin \sqrt{\mu}\, x, \qquad a, b \in \mathbb{C},$$

e le condizioni agli estremi implicano $a = 0$, $\mu = \mu_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}^+$. In particolare, 0 non è autovalore. Il corrispondente sistema ortonormale di autovettori è $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx\right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Andiamo a costruire il nucleo $G(x, y)$ dell'operatore $G = L^{-1}$. Le funzioni $u_1(x) = cx$ e $u_2(x) = c(\pi - x)$ verificano rispettivamente

$$\begin{cases} -u_1'' = 0 \\ u_1(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_2'' = 0 \\ u_2(\pi) = 0, \end{cases}$$

e si ha

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Quindi il nucleo di G è

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi - y)}{\pi} & \text{se } x \le y \\ \dfrac{y(\pi - x)}{\pi} & \text{se } x \ge y. \end{cases}$$

Perciò se $g \in C[0, \pi]$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} -f'' = g & \text{in } [a, b] \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

è la funzione

$$f(x) = \int_0^\pi G(x, y) g(y)\, dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \left(\int_0^\pi g(t) \sin kt\, dt \right) \sin kx.$$

(2) Sia $D = \{u \in C^2[0, \pi] : u'(0) = u'(\pi) = 0\}$, $Lu = -u''$. In questo caso $\psi \equiv 1$, $\varphi \equiv 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Gli autovalori sono $\mu_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$; in particolare 0 è autovalore per L. Il corrispondente sistema ortonormale di autovettori è $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx\right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Si ha

$$\ker L = \{c\}_{c \in \mathbb{C}}, \qquad (\ker L)^\perp = \left\{ u \in L^2(a, b) : \int_0^\pi u(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Perciò se $g \in C[a, b] \cap (\ker L)^\perp$ le soluzioni del problema

$$\begin{cases} -f'' = g & \text{in } [a, b] \\ f'(0) = f'(\pi) = 0 \end{cases}$$

sono date dalla famiglia $\{f_c\}_{c\in\mathbb{C}}$, ove

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\int_0^{\pi} g(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx + c.$$

Si noti che in questi due esempi le serie convergono assolutamente e uniformemente in $[0,\pi]$; inoltre esse sono derivabili termine a termine e le serie delle derivate convergono ancora assolutamente e uniformemente in $[0,\pi]$. Invece le serie delle derivate seconde convergono soltanto in $L^2(a,b)$.

Esercizi 11.7

1. Si definisca
$$H = \{f \in C^1[a,b] : f' \in AC[a,b], f'' \in L^2(a,b)\},$$
e sia L l'operatore definito da
$$D(L) = \{f \in H : B_1 f = B_2 f = 0\}, \qquad Lf = (-\psi f')' + \varphi f,$$
ove $\psi \in C^1[a,b]$ con $\psi > 0$, $\varphi \in C[a,b]$ e le condizioni agli estremi $B_1 f$ e $B_2 f$ sono definite nel modo usuale. Si provi che L è autoaggiunto.
[**Traccia:** per provare che $D(L^*) \subseteq D(L)$, si supponga dapprima che 0 non sia autovalore per L. Se $v \in D(L^*)$, si verifichi che GL^*v è un ben definito elemento di H e si osservi che per ogni $u \in D(L)$ si ha $u = GLu$ e quindi $(Lu,v)_{L^2(a,b)} = (u,L^*v)_{L^2(a,b)} = (GLu,L^*v)_{L^2(a,b)} = (Lu,GL^*v)_{L^2(a,b)}$; se ne deduca che $v = GL^*v \in H$. Integrando per parti si ricavi, per ogni $u \in D(L)$, che $(Lu,v)_{L^2(a,b)} = \left[-\psi u'\overline{v} + \psi u\overline{v'}\right]_a^b + (u,Lv)_{L^2(a,b)}$; si concluda che, affinché $u \mapsto (Lu,v)_{L^2(a,b)}$ sia continua nella norma di $L^2(a,b)$, deve aversi $B_1 v = B_2 v = 0$, cioè $v \in D(L)$. Si passi infine al caso generale…]

2. Siano $\varphi \in C[a,b]$ e $\psi \in C^1[a,b]$ con $\varphi \geq 0$ e $\psi > 0$, e sia L definito da
$$D(L) = \{f \in H : f(a) = f(b) = 0\}, \qquad Lf = (-\psi f')' + \varphi f,$$
essendo H lo spazio introdotto nell'esercizio precedente. Indichiamo con $\{\lambda_k\}$ gli autovalori di L, necessariamente positivi (perché?), con $\{u_k\}$ un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti e con $G(x,y)$ il nucleo dell'operatore integrale $G = L^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. Si provino i seguenti fatti:

   (i) si ha $Lf = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k (f,u_k)_{L^2(a,b)} u_k$ in $L^2(a,b)$ per ogni $f \in D(L)$;

   (ii) si ha $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k |(f,u_k)_{L^2(a,b)}|^2 = \int_a^b [\psi|f'|^2 + \varphi|f|^2]dx$ per ogni $f \in D(L)$;

   (iii) si ha $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k (f,u_k)_{L^2(a,b)}\overline{(g,u_k)_{L^2(a,b)}} = \int_a^b [\psi f'\overline{g'} + \varphi f\overline{g}]dx$ per ogni $f,g \in D(L)$;

   (iv) risulta $(Gf,f)_{L^2(a,b)} \geq 0$ per ogni $f \in D(L)$ e $G(x,x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$;

(v) la funzione $G_n(x,y) = G(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x)\overline{u_k(y)}$ è ben definita e continua in $[a,b] \times [a,b]$, il corrispondente operatore integrale G_n è compatto e autoaggiunto in $L^2(a,b)$, e si ha $G_n f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}(f,u_k)_{L^2(a,b)} u_k$ in $L^2(a,b)$ e $(G_n f, f)_{L^2(a,b)} \geq 0$ per ogni $f \in L^2(a,b)$;

(vi) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ converge per ogni $x \in [a,b]$ e, di conseguenza, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x)\overline{u_k(y)}$ converge assolutamente in $[a,b] \times [a,b]$, con somma uguale a $G(x,y)$;

(vii) le serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x)\overline{u_k(y)}$ convergono uniformemente in $[a,b]$ e in $[a,b] \times [a,b]$ rispettivamente;

(viii) si ha $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_a^b G(x,x)dx < +\infty$;

(ix) per ogni $f \in D(L)$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (f,u_k)_{L^2(a,b)} u_k(x)$ converge a $f(x)$ assolutamente e uniformemente in $[a,b]$;

(x) (*teorema di Mercer*) per ogni $g \in C[a,b]$ l'equazione $Lf = g$ ha soluzione unica $f \in D(L)$ data da $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(g,u_k)_{L^2(a,b)} u_k(x)$, e la serie converge assolutamente e uniformemente in $[a,b]$.

[**Traccia:** per provare (vii) si dimostri dapprima il *lemma del Dini*: se $\{f_n\} \subset C[a,b]$, se $f \in C[a,b]$ e se $f_n(x) \nearrow f(x)$ per $n \to \infty$, allora $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$.]

Bibliografia

[1] G. Bachman, L. Narici, Functional analysis, Academic Press, New York 1973.

[2] J. J. Benedetto, Real variable and integration, B. G. Teubner, Stuttgart 1967.

[3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, Paris 1983.

[4] F. Conti, Appunti di istituzioni di analisi superiore (manoscritto), Pisa 1980.

[5] G. de Barra, Teoria della misura e dell'integrazione, L'Arciere, Cuneo 1987.

[6] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience Publ., New York 1958.

[7] R. E. Edwards, Fourier series: a modern introduction, vol.1 e vol. 2, Holt, Rinehart and Winston inc., New York 1967.

[8] R. E. Edwards, Functional analysis. Theory and applications, Holt, Rinehart and Winston inc., New York 1965.

[9] C. C. Evans, R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, Boca Rabon 1992.

[10] E. Hewitt, K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer Verlag, Berlin 1965.

[11] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale, Mir, Mosca 1980.

[12] E. R. Lorch, Spectral theory, Oxford Univ. Press, New York 1962.

[13] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1970.

[14] H. L. Royden, Real analysis, MacMillan, New York 1968.

[15] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw Hill, New York 1987.

[16] M. Schechter, Principles of functional analysis, Academic Press, New York 1971.

[17] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, J. Wiley, New York 1961.

[18] R. L. Wheeden, A. Zygmund, Measure and integral: an introduction to real analysis, Marcel Dekker, New York 1977.

[19] H. Widom, Lectures on integral equations, notes by D. Drasin and A. Tromba, Van Nostrand-Reinhold Co., New York 1969.

[20] A. C. Zaanen, Integration, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1967.

[21] A. Zygmund, Trigonometric series, vol. 1 e vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1959.

Indice analitico