Risoluzione degli esercizi di pag. 291

1. La superficie Σ si parametrizza in coordinate cilindriche: l'equazione del toro diventa $z^2 + \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; le condizioni $z \geq 0$, $y \geq x \geq 0$ diventano $\sin\theta \geq \cos\theta \geq 0$, dunque $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, mentre $\left(r - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, ossia $1 \leq r \leq 2$. In definitiva:

$$\underline{\sigma} : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(r - \frac{3}{2}\right)^2} \end{cases} \qquad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 1 \leq r \leq 2.$$

Perciò

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ -\frac{r - 3/2}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(r - \frac{3}{2}\right)^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = 1 + \frac{(r - 3/2)^2}{\frac{1}{4} - \left(r - \frac{3}{2}\right)^2}, \qquad G = r^2, \qquad F = 0.$$

Ne segue $\sqrt{EG - F^2} = \frac{r}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(r - \frac{3}{2}\right)^2}}$, da cui

$$\int_\Sigma \frac{z x \ln y}{y} \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ln(r\sin\theta) \, d\theta \, dr =$$

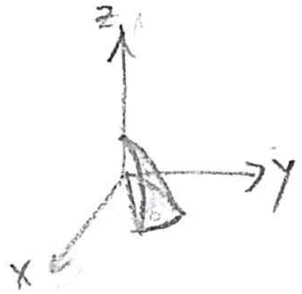
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 r \ln r \, dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_1^2 r \, dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ln\sin\theta \, d\theta =$$

$$= \cdots = \frac{13}{32} (\ln 2)^2 - \frac{3}{16} \ln 2.$$

2. La superficie Σ è la parte di sfera delimitata dai piani verticali $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$, e dal piano orizzontale $z = 0$.

In coordinate sferiche si ha

$$\begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta, \end{cases} \quad , \operatorname{tg}\varphi \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right] \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
$$\iff \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$



Il bordo $b\Sigma$ è formato da tre archi di cerchio. L'integrando è complicato. Però, indicando con F_1, F_2, F_3 i coefficienti di dx, dy, dz, si ha

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\int_{+b\Sigma} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \int_{+b\Sigma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3\, ds = \int_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \underline{F}, \underline{n} \rangle_3\, d\sigma.$$

Dato che solo la 1^a componente di $\operatorname{rot}\underline{F}$ è diversa da 0, calcoliamo la 1^a componente di $\underline{n}$. Essendo

$$D\sigma: \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{si ha } n_1 = \sin^2\theta\cos\varphi,$$

e perciò

$$\int_{\Sigma} \langle \operatorname{rot}\underline{F}, \underline{n} \rangle_3\, d\sigma = \int_{\Sigma} y\, n_1\, d\sigma = \ldots = \frac{1}{6}.$$

3. L'area della superficie ottenuta ruotando una curva Γ nel piano xz con $x \geq 0$ è data da

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_\Gamma x \, ds .$$

Nel nostro caso

$$x = \pi + e^{-t}\cos t , \quad ds = \sqrt{2e^{-2t}}\, dt ,$$

e dunque

$$a(\Sigma) = 2\pi\sqrt{2} \int_0^\infty \left(\pi e^{-t} + \cos t \, e^{-2t}\right) dt =$$

$$= 2\pi^2\sqrt{2} + 2\pi\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-2t}\cos t \, dt =$$

$$= 2\pi^2\sqrt{2} + \frac{4}{5}\pi\sqrt{2} .$$

4. Anche qui conviene utilizzare la formula di Stokes. La curva Γ è il bordo di un triangolo del piano zy.

Scegliamo come Σ la parte del piano $x=0$ delimitata dal triangolo. Il versore normale a Σ, coerente con l'orientazione del bordo, è $n = (1,0,0)$. Calcoliamo il rotore del campo $\underline{F}$:

$$\text{rot}\,\underline{F} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - x^2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} ,$$

e ci interessa solo la 1ª componente. Si ha allora

$$\int_{\partial\Sigma} \langle F, \underline{T} \rangle ds = \int_\Sigma \langle \text{rot}\,\underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \iint_\Sigma (z - x^2)\, dy\, dz = \int_\Sigma z \, dy\, dz = \ldots = \frac{1}{6}$$

5. Si ha, posto $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)^{1/4}$,

$$a(\Sigma) = \int_B \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\,dy, \qquad B = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\},$$

e poiché

$$f_x = -\frac{x}{2}(x^2+y^2)^{-3/4}, \quad f_y = -\frac{y}{2}(x^2+y^2)^{-3/4},$$

si trova

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^{-1/2},$$

e dunque

$$a(\Sigma) = \int_B \sqrt{1+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{-1/2}}\, dx\,dy$$

e in coordinate polari

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4r}}\; r\, dr = \pi \int_0^1 \sqrt{r}\sqrt{4r+1}\, dr;$$

con la sostituzione $4r = \sinh^2 t$ si arriva a

$$a(\Sigma) = \frac{\pi}{4}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sinh^2 t \cosh^2 t\, dt =$$

$$= \frac{9}{16}\pi\sqrt{5} - \frac{\pi}{32}\ln(2+\sqrt{5}).$$

Risposte finali agli esercizi delle scorse lezioni

pag. 267-268

1. (a) $\underline{x}=\begin{pmatrix}5/8\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\2\\1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; (b) 9.

2. (a) $\underline{x}=\begin{pmatrix}e/2\\3e/2\\e\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2e\\6e\\4e\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; $2e\left(x-\frac{e}{2}\right)+6e\left(y-\frac{3e}{2}\right)+4e(z-e)=0$;

   (b) $e^2\sqrt{14}$.

3. (a) $t=1$, $B=\left(\frac{5}{3},\frac{3}{2}\right)$; (b) $\underline{x}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$; $\underline{x}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

4. (a) $\frac{(2+4\pi^2)^{3/2}-2^{3/2}}{3}$; (b) $-(x+\pi)-\pi y+z-\pi=0$.

5. 1; $\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, ovvero $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(x-1)$.

6. $f(x,y,z)=e^{xz}+y+z^2\sin y$.

7. (a) sì, con $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+5xy^2$; (b) $-3-\sqrt{2}$.

8. 3

9. (a) $\frac{80+16\sqrt{17}}{3}$, (b) $-\frac{1}{3}-\frac{25}{2}$.

10. (a) $\frac{3}{2}\pi$, (b) $\frac{3}{8}\pi$, (c) $2-\frac{\pi}{2}$, (d) $\frac{\pi}{4}$.

pag. 269 - 270

1. $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2\pi}$.

2. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{13}{14}$.

3. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

4. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{6}$.

5. 0 (per simmetria).

6. $2\left[\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1\right]$.

7. $-2 - 2\ln 2$.

8. $\frac{\pi\sqrt{e}}{8}(1 - e^{-2})$

9. $\frac{2}{3}(e-2)$.

10. (a) $t_0 = 0$, (b) $t_1 = \ln 3$, (c) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,
$x - 1 + y + \sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0$.

11. (a) $y = 0$, (b) $\frac{1}{6}(5^{3/2} - 1)$.

12. (a) $\underline{\tau}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\underline{\tau}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)$, $\underline{\tau}(\pi) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; (b) $-\frac{8}{3}\pi$.

13. (a) -8π, (b) 0.

14. $\frac{50}{3} + 15 \operatorname{arctg} 2$.

pag. 271

15. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}$.

16. 1.

17. $\frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}$.

18. $\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})$.

19. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 - y^2 + 2z} + \frac{x^2 z}{2} + \frac{z^3}{6} - \sqrt{2} - \frac{1}{6}$.

20. $f(z) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$, $g(x) = 2\ln(1+x^2) - \frac{2x^2}{1+x^2}$,

potenziale: $f(x,y,z) = \frac{y^2}{1+y^2}\left[2\ln(1+x^2) - \frac{2x^2}{1+x^2}\right] + \frac{xz^2}{1+z^2}$.