Teorema della divergenza e teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$

Sia $\underline{F}: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, ove B è un aperto. Sia poi A un aperto, con $\bar{A} \subset B$, e tale che ∂A (la frontiera di A) sia sostegno di una superficie regolare o regolare a tratti.

Ricordiamo che

$$\operatorname{div} \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Teorema (della divergenza) Nelle ipotesi sopra dette,

$$\int_A \operatorname{div} \underline{F} \, dx\, dy\, dz = \int_{\partial A} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$$

ove $\underline{n}$ è il versore normale esterno ad A.

dim. omessa. □

Superfici con bordo.

Tutti abbiamo in testa la differenza fra una sfera (superficie chiusa, senza bordo) e una semisfera (superficie con bordo).

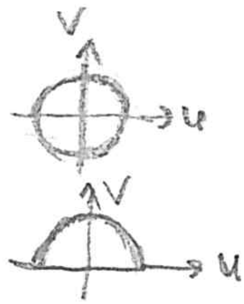
In genere i punti di una superficie regolare Σ si possono suddividere in due categorie (disgiunte): $\Sigma = i\Sigma \cup b\Sigma$.

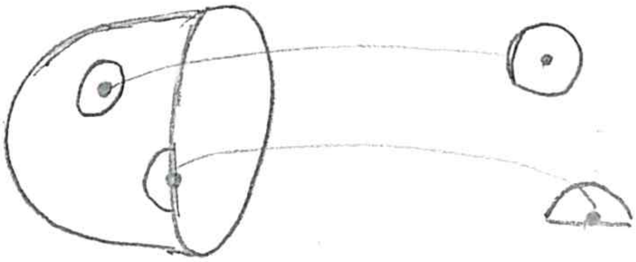
- $i\Sigma$ ("interno" di Σ) è l'insieme dei punti $\underline{x} \in \Sigma$ per i quali vi sono un intorno U di $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^3$ ed un'applicazione $\underline{\varphi}: B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \to U \cap \Sigma$, bigettiva e di classe C^1, tale che $\underline{\varphi}(\underline{0}) = \underline{x}$;

- $b\Sigma$ ("bordo" di Σ) è l'insieme dei punti $\underline{x} \in \Sigma$ per i quali vi sono un intorno U di $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^3$ ed un'applicazione $\underline{\varphi}: \overline{B^+(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^2 \to U \cap \Sigma$, bigettiva e di classe C^1, tale che $\underline{\varphi}(\underline{0}) = \underline{x}$ e $\underline{\varphi}(u,v) \in i\Sigma \cap U$ per $(u,v) \in B^+(0,1)$.

Ricordiamo che

$$B(0,1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\},$$
$$B^+(0,1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1,\ v > 0\}.$$





Si ha $i\Sigma \cap b\Sigma = \phi$, e se Σ è una superficie chiusa, come una sfera o un toro, allora $b\Sigma = \phi$. Si noti che la parola "bordo" non va intesa come "frontiera" in senso topologico: ogni superficie di $\mathbb{R}^3$ è un insieme privo di parte interna, e quindi coincide con la propria frontiera.

<u>Orientazione del bordo di una superficie</u>

Sia Σ una superficie con bordo, regolare, orientabile.

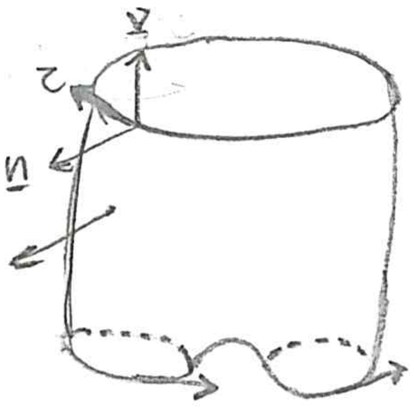
Vogliamo fissare su $b\Sigma$, che è sostegno di una curva regolare, un'<u>orientazione coerente</u> con quella che preventivamente abbiamo fissato su Σ.

Sia $\underline{n}$ il versore normale a Σ secondo tale orientazione.

Sia poi $\underline{\tau}$ il versore tangente a $b\Sigma$ secondo una sua orientazione.

<u>Definizione</u> Diciamo che l'orientazione indotta su $b\Sigma$ da $\underline{\tau}$ è <u>coerente</u> con quella indotta su Σ da $\underline{n}$, se si ha: posto $\underline{\nu} = \underline{\tau} \times \underline{n}$, il versore $\underline{\nu}$ (che è tangente a Σ e normale a $b\Sigma$) <u>ha verso uscente</u> da Σ: in altre parole

$$\det(\underline{\nu} | \underline{\tau} | \underline{n}) = 1.$$



Euristicamente: $\underline{\tau}$ e $\underline{n}$ hanno orientazioni coerenti se, percorrendo $b\Sigma$ (con la testa nel verso di $\underline{n}$) ci lasciamo Σ <u>alla nostra sinistra</u>.

Definiamo adesso il <u>rotore</u> di un campo vettoriale $\underline{F}$ di classe C^1:

$$\mathrm{rot}\,\underline{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Una buona regola mnemonica è

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}, \quad \text{ove } \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione Se $\underline{F}(x,y,z)$ è di classe C^2, si ha

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F} = 0 ;$$

se $f(x,y,z)$ è una funzione scalare di classe C^2, si ha

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0,$$

mentre $\operatorname{div} \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$. Inoltre, se $\underline{F}(x,y,z)$ è un campo conservativo, allora $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$.

Teorema (di Stokes, o del rotore) Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale di classe C^1, definito su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia Σ una superficie con bordo, orientabile, regolare o regolare a tratti, contenuta in A. Se le orientazioni di Σ e di $b\Sigma$ sono coerenti, allora

$$\int_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{b\Sigma} \langle \underline{F}, \tau \rangle_3 \, ds .$$

Dunque, il flusso del rotore attraverso Σ coincide con il lavoro compiuto da $\underline{F}$ lungo $b\Sigma$ (nella giusta direzione).
dim. omessa. □

Esempi (1) Calcoliamo

$$\int_{+C} [(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz],$$

ove $C=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0\}$, con versore $\underline{\tau}$ su C orientato in modo da andare da $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ e poi verso $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Si vede che C è un cerchio massimo della sfera unitaria.

Poichè C è bordo del disco

$$D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ x+y+z=0\},$$

si ha, posto $\underline{F}=(y+z,\ z+x,\ x+y)$:

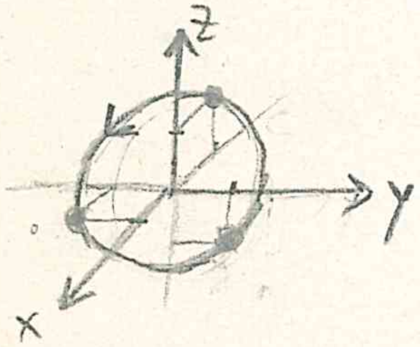
$$\int_{+C}\left[(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz\right]=\int_C \langle \underline{F},\underline{\tau}\rangle_3\, ds =$$

$$=\int_D \langle \operatorname{rot}\underline{F},\underline{n}\rangle_3\, d\sigma,$$

avendo scelto $\underline{n}$ in modo coerente con $\underline{\tau}$. Dato che

$$\operatorname{rot}\underline{F}=(0,0,0)$$

è inutile determinare $\underline{\tau}$ e $\underline{n}$, e l'integrale curvilineo è nullo. A titolo di esercizio, comunque, $\underline{\tau}$ percorre C



nel verso indicato in figura, e quindi

$$\underline{n}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right).$$

Osserviamo che $\underline{F}$ è conservativo, quindi l'integrale doveva essere nullo!

(2) Calcoliamo il flusso del campo vettoriale

$$\underline{G}(x,y,z)=\left(x^2,\ y^2,\ 1-z\right)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2 ,\ 0 \le z \le 1\},$$

orientata secondo la normale esterna al paraboloide.

Osserviamo che, detto Σ_1 il "tappo" di Σ, ossia

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : z = 1,\ x^2+y^2 \le 1\},$$

e posto

$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

si ha $\langle \underline{G}, \underline{n} \rangle_3 = 0$ su Σ_1, poiché $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su Σ_1: quindi

$$\int_\Sigma \langle \underline{G}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \langle \underline{G}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{\partial E} \langle \underline{G}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma =$$

$$= \int_E \operatorname{div} \underline{G} \, dx\,dy\,dz = \int_E (2x+2y-1)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} (\cancel{2r\cos\theta + 2r\sin\theta} - 1)\, r \, dr\,dz\,d\theta =$$

$$= -2\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr\,dz = -2\pi \int_0^1 \frac{z}{2}\, dz = -\frac{\pi}{2}.$$

Naturalmente si poteva anche fare il calcolo diretto:

$$\Sigma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 2r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\sigma}_r \times \underline{\sigma}_\theta = \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r\right);$$

Il vettore $\underline{\sigma}_r \times \underline{\sigma}_\theta$ punta verso l'interno del paraboloide. Quindi scegliamo il vettore normale $\underline{N}$ come

$$\underline{N} = \left(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, -r\right),$$

da cui

$$\int_\Sigma \langle \underline{G}, \underline{n} \rangle \, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^2\cos^2\theta\left(2r^2\cos\theta\right) + r^2\sin^2\theta\left(2r^2\sin\theta\right) - (1-r^2)\,r\right] dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\cancel{2r^4\cos^3\theta} + \cancel{2r^4\sin^3\theta} - r(1-r^2)\right] dr\,d\theta =$$

$$= -2\pi\int_0^1 (r - r^3)\,dr = -\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio Calcolare il flusso del rotore di

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(y + xz, 2x + 2yz, 3x + 4xy\right)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\},$$

con versore normale $\underline{n}$ tale che $n_3 \leq 0$.

Esercizi

- Sia Σ la parte del toro di equazione $z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ contenuta nell'insieme $\{(x,y,z):\ z\geq 0,\ y\geq x\geq 0\}$. Si calcoli

$$\int_\Sigma \frac{zx\ln y}{y}\,d\sigma.$$

- Sia Σ la parte della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ contenuta nel 1° ottante e delimitata dai tre piani di equazioni $\sqrt{3}y-x=0$, $y-\sqrt{3}x=0$, $z=0$, orientata secondo la normale esterna alla sfera. Si calcoli

$$\int_{+b\Sigma}\Big\{\left[x\,\mathrm{arctg}\,(x^2+y^2+1)+z\ln(1+xz)\right]dx-$$
$$-\left[y\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2+y^2+1}+yz\right]dy+\left[x\ln(1+xz)\right]dz\Big\}.$$

- Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva Γ di equazioni
$x=\pi+e^{-t}\cos t$, $z=e^{-t}\sin t$, $t\in[0,\infty[$.

- Calcolare

$$\int_{+\Gamma}\Big\{\left[\ln(1+x^2z^2)+(y+1)z\right]dx+\left[x^2z+y^3e^{-y^2}\right]dy+$$
$$+\left[yz-(\mathrm{arctg}\,z)^2+1\right]dz\Big\},$$

ove $+\Gamma$ è il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,\frac{1}{2},1)$ orientato secondo l'ordine dei vertici.

- Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq 1-(x^2+y^2)^{1/4}\}.$$