Superfici in $\mathbb{R}^3$

Una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ è una applicazione $\underline{\sigma}: T \to \mathbb{R}^3$, ove $T \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme tale che $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$, con A aperto di $\mathbb{R}^2$. La $\underline{\sigma}$ si suppone di classe C^1, con $D\underline{\sigma}$ (che è una matrice 3×2) di rango massimo in ogni punto di A. L'immagine $\Sigma = \underline{\sigma}(T)$ è il sostegno della superficie, vale a dire la superficie vera e propria.

I due vettori colonna di $D\underline{\sigma}$ sono $\underline{\sigma}_u$ e $\underline{\sigma}_v$, le derivate parziali di $\underline{\sigma}$ rispetto ai parametri $(u,v) \in T$; essi sono linearmente indipendenti e le loro direzioni sono tangenti a Σ in ogni punto: infatti, tenendo fisso v, l'applicazione $u \mapsto \underline{\sigma}(u,v)$ è una curva con sostegno $\subseteq \Sigma$, e con vettore tangente $\underline{\sigma}_u(u,v)$; lo stesso accade tenendo fisso u e considerando la curva $v \mapsto \underline{\sigma}(u,v)$. Dunque il piano generato da $\underline{\sigma}_u(u,v)$ e $\underline{\sigma}_v(u,v)$, passante per $\underline{\sigma}(u,v)$, è tangente a Σ in tale punto. Le sue equazioni parametriche sono (in forma vettoriale)

$$x = \underline{\sigma}(u,v) + s\,\underline{\sigma}_u(u,v) + t\,\underline{\sigma}_v(u,v), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

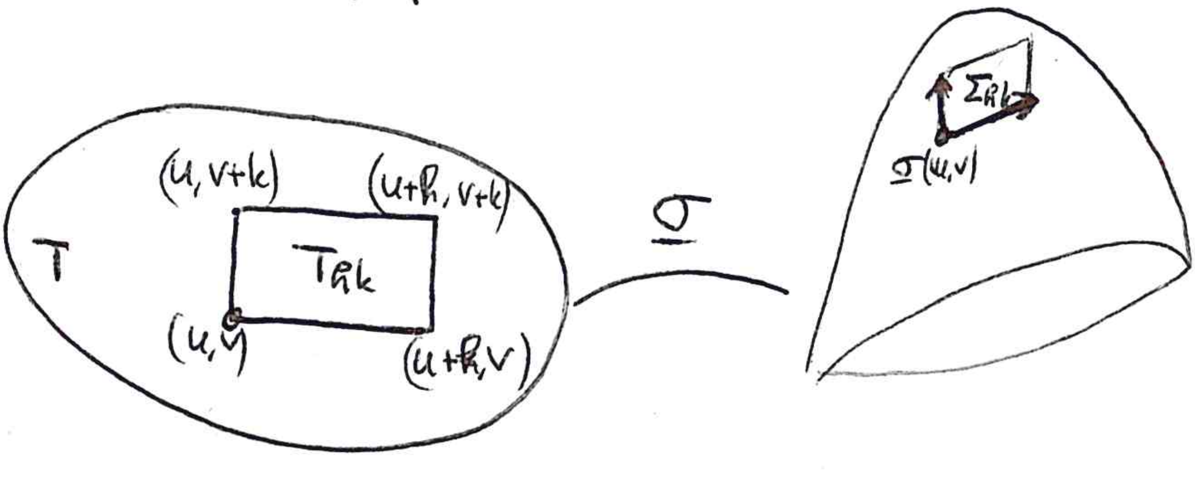
mentre la rappresentazione parametrica di Σ è ovviamente

$$x = \underline{\sigma}(u,v), \quad (u,v) \in T.$$

Dato che $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, vi è anche la retta normale a Σ in $\underline{\sigma}(u,v)$: essa è la retta per $\underline{\sigma}(u,v)$, la cui direzione è (l'unica) ortogonale a $\underline{\sigma}_u(u,v)$ e $\underline{\sigma}_v(u,v)$: essa è la direzione del prodotto vettoriale

$$\underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v).$$

Area di una superficie



Dato un rettangolo $T_{hk} = [u, u+h] \times [v, v+k]$ contenuto in T, sia Σ_{hk} il parallelogramma di vertice $\underline{\sigma}(u,v)$, generato dai vettori $h\,\underline{\sigma}_u(u,v)$, $k\,\underline{\sigma}_v(u,v)$. La sua area è

$$a(\Sigma_{hk}) = hk\,|\underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v)|_3 .$$

Ricoprendo T con un numero finito di T_{hk} adiacenti, la somma delle aree dei Σ_{hk} è una quantità che, come conseguenza della formula di Taylor al 1° ordine per $\underline{\sigma}(u,v)$, approssima l'integrale su T di $|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3$ al tendere di h e k a 0. D'altra parte, per $h, k \to 0$ i parallelogrammi Σ_{hk} sono sempre più adiacenti a Σ. Ne deriva la definizione seguente, che si rivela quella "giusta" nei casi pratici:

Definizione. Sia $\Sigma = \underline{\sigma}(T)$ una superficie regolare. L'**area** di Σ è il numero

$$a(\Sigma) = \int_T |\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3 \, du\, dv .$$

Osservazione. Posto

$$E = |\underline{\sigma}_u|_3^2, \quad G = |\underline{\sigma}_v|_3^2, \quad F = \langle \underline{\sigma}_u, \underline{\sigma}_v \rangle_3 ,$$

si ha

$$|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3^2 = |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 \sin^2\theta = |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 (1 - \cos^2\theta) =$$

$$= |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 - [\langle \underline{\sigma}_u, \underline{\sigma}_v \rangle_3]^2 = EG - F^2 .$$

Ciò permette un modo alternativo, spesso più facile, per calcolare l'integrando che dà l'area di una superficie: $a(\Sigma) = \int_T \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$.

Esempi (1) Sia σ la superficie sferica di raggio r e centro O:

$$\underline{\sigma}: \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta , \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi], \; \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Si ha

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} r \cos\theta \cos\varphi & -r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \sin\varphi & r \sin\theta \cos\varphi \\ -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$E = r^2, \; G = r^2 \sin^2\theta, \; F = 0, \; \sqrt{EG - F^2} = r^2 \sin\theta .$$

Perciò
$$a(\Sigma) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 4\pi r^2,$$
come era da aspettarsi.

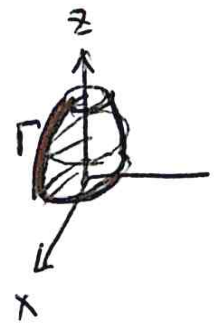
2) (Superfici di rotazione). Sia $\underline{\gamma}: I \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 contenuta nel semipiano xz con $x \geq 0$, di sostegno Γ. Ruotando Γ attorno all'asse z otteniamo una superficie di rotazione Σ, parametrizzata da

$$\sigma: \begin{cases} x = \alpha(t)\cos\vartheta \\ y = \alpha(t)\sin\vartheta \\ z = \beta(t), \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi],\ t \in I, \quad \text{ove} \quad \underline{\gamma}: \begin{cases} x = \alpha(t) \geq 0 \\ z = \beta(t), \end{cases} t \in I.$$

si ha
$$D\sigma = \begin{pmatrix} \alpha'(t)\cos\vartheta & -\alpha(t)\sin\vartheta \\ \alpha'(t)\sin\vartheta & \alpha(t)\cos\vartheta \\ \beta'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi
$$E = \alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2, \quad G = \alpha(t)^2, \quad F = 0, \quad \sqrt{EG - F^2} = \alpha(t)\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2},$$

da cui
$$a(\Sigma) = \int_I \int_0^{2\pi} \alpha(t)\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}\, d\vartheta\, dt = 2\pi \int_\Gamma x\, ds.$$



Dunque si integra lungo Γ "per circonferenze".

Ad esempio, l'area della superficie del toro

$$\underline{\sigma}: \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ z = R\sin\varphi, \end{cases} \quad \vartheta, \varphi \in [0, 2\pi],$$

è data da

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi)\, r \, d\varphi = (2\pi R)(2\pi r).$$

3) (Superfici cartesiane). Sia $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$ continua, con $f \in C^1(A)$ (cioè f deve essere differenziabile con continuità nei punti interni, ma continua fino alla frontiera). Il grafico di f è una superficie regolare:

$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y), \end{cases} \qquad (x,y) \in \bar{A};$$

$$D\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}, \quad E = 1 + f_x^2, \; G = 1 + f_y^2, \; F = f_x f_y;$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x^2 f_y^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

e infine

$$a(\Sigma) = \int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Ad esempio, sia $f(x,y) = x^2 - y^2$: se $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$, si ha

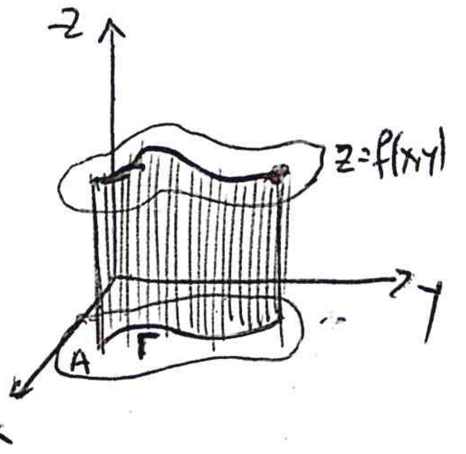
$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y,$$

e

$$a(\Sigma) = \int_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r \, dr\, d\theta =$$

$$[4r^2 = t] = \frac{1}{8} \cdot 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+t}\, dt = \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} \left[(1+t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right).$$

Siano: $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto, $f\in C^0(A)$ non negativa, $\Gamma\subseteq A$ sostegno di una curva regolare. Calcoliamo l'area della superficie Σ ottenuta tagliando verticalmente



il grafico di f lungo Γ. Si ha

$$\underline{\sigma}:\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t\in I, \\ z\in[0, f(\alpha(t),\beta(t))] \end{array}$$

ove naturalmente $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$ è a parametrizzazione di Γ. Si ha

$$D\underline{\sigma}=\begin{pmatrix}\alpha'(t) & 0\\ \beta'(t) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

quindi

$$E=\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2, \quad G=1, \quad F=0,$$

e pertanto

$$a(\Sigma)=\int_I\int_0^{f(\alpha(t),\beta(t))}\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\,dz\,dt=$$

$$=\int_I f(\alpha(t),\beta(t))\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\,dt=\int_\Gamma f\,ds \text{ (prevedibile!)}$$

<u>Integrali superficiali</u>

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto, sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione continua, sia $\Sigma=\underline{\sigma}(T)$ una superficie regolare contenuta in A. L'<u>integrale</u>

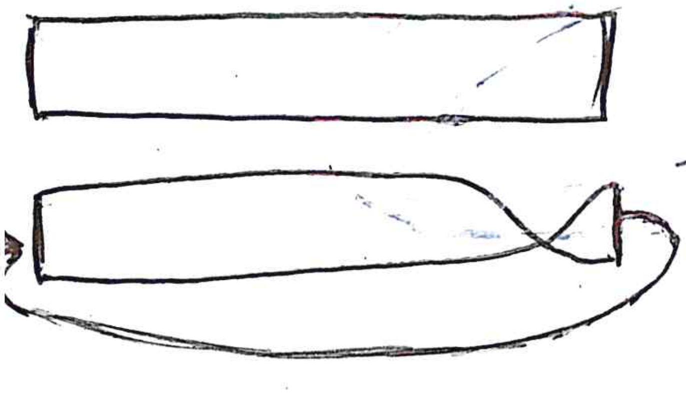
superficiale di f su Σ è definito così:

$$\int_\Sigma f\, d\sigma := \int_T f(\sigma(u,v))\, |\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)|_3\, du\, dv.$$

Si noti che $\int_\Sigma 1\, d\sigma = a(\Sigma)$ e che valgono le usuali proprietà di linearità, monotonia e additività rispetto alla superficie, se essa è suddivisa in due o più parti (si pensi al caso in cui Σ è il bordo di un parallelepipedo o di un poliedro).

Orientazione di una superficie

È naturale pensare che una superficie sia orientabile per mezzo del versore normale: ci sarà una faccia positiva (concorde con $\underline{n}$) e una negativa (quella opposta, concorde con $-\underline{n}$).
Purtroppo, o sorprendentemente, non è così: esistono superfici con una sola faccia. Un esempio è il nastro di Möbius: si prende un rettangolo lungo e stretto, e si attaccano i lati corti, dopo aver girato uno dei due di 180 gradi.



Questa superficie si parametrizza così:

$$\begin{cases} x = (2 + t\cos\theta/2)\cos\theta \\ y = (2 + t\cos\theta/2)\sin\theta \\ z = t\sin\theta/2, \end{cases} \quad t \in [-1,1],\ \theta \in [0,2\pi],$$

e si verifica che per $t=0$ e $\theta \in [0,2\pi]$ si ha

$$\underline{n}(0,\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, -\cos\frac{\theta}{2}\right), \text{ cosicché } \underline{n}(0,2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\underline{n}(0,0).$$

Per definire gli integrali di campi vettoriali lungo una superficie, occorre fare l'ipotesi che essa sia <u>orientabile</u>.

Se, dunque, Σ è una superficie orientabile, e

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

è un campo vettoriale continuo, definito su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ che contiene Σ, il <u>flusso di F attraverso la superficie orientata $+\Sigma$</u> è

$$\int_{+\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_T \langle F(\underline{\sigma}(u,v)), \underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v) \rangle_3 \, du\, dv,$$

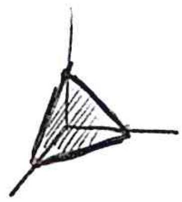
ove $\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v$ è supposto essere orientato nel verso di $+\underline{n}$.

Se la parametrizzazione scelta per rappresentare Σ corrispondesse al verso di $-\underline{n}$, occorrerebbe cambiare segno all'integrale.

<u>Esempi</u>. (1) Calcoliamo

$$\int_\Sigma x^2 z \, d\sigma, \qquad \text{ove } \Sigma = \text{triangolo di vertici } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).$$

Si ha



$$\underline{\sigma}: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1-x-y \end{cases}, \qquad (x,y) \in E,$$

con $E = \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [0,1-x]\}$. Dunque

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = 2, \quad G = 2, \quad F = 1, \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{3},$$

e pertanto

$$\int_\Sigma x^2 z \, d\sigma = \int_E x^2(1-x-y)\sqrt{3}\, dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2(1-x-y)\, dy\, dx = \frac{\sqrt{3}}{60}.$$

(2) Posto $\underline{F}(x,y,z) = (x,y,0)$, calcoliamo il flusso di $\underline{F}$ attraverso la superficie sferica $x^2+y^2+z^2=r^2$, orientata secondo la normale esterna. Si ha allora

$$\underline{\sigma}: \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi],$$

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\sigma}_\theta\times\underline{\sigma}_\varphi = (r^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ r^2\sin\theta\cos\theta)$$

e pertanto

$$\int_\Sigma \langle \underline{F},\underline{n}\rangle_3\, d\sigma =$$

$$= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left[(r\sin\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\cos\varphi)+(r\sin\theta\sin\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi)\right]d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^3\sin^3\theta\, d\varphi\, d\theta = 2\pi r^3\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi r^3\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta = 2\pi r^3\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi =$$

$$= 2\pi r^3\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right] = \frac{8\pi}{3}r^2.$$