Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$

Iniziamo con una questione che sembra entrarci poco.

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{siano continue in } A.$$

Siano $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che $\alpha, \beta \in C^1([a,b])$ e

$$(x, \alpha(x)),\ (x, \beta(x)) \in A \qquad \forall x \in [a,b].$$

Allora è definita la funzione

$$G : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$$

<u>Teorema</u> Nelle ipotesi fatte, si ha $G \in C^1([a,b])$ e

$$G'(x) = f(x, \beta(x))\,\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

<u>dim</u>. Sia B l'aperto di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$B = \{(x,u,v) : (x,u), (x,v) \in A\}.$$

Poniamo

$$F(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)\,dy \qquad \forall (x,u,v) \in B.$$

Allora $F \in C^1(B)$, con

$$F_x(x,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \quad \text{(convergenza dominata)}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_u(x,u,v) = -f(x,u) \\ F_v(x,u,v) = +f(x,v) \end{array}\right\} \text{(teorema fondamentale del calcolo integrale).}$$

A questo punto basta osservare che

$$G(x) = F(x, \alpha(x), \beta(x))$$

ed applicare il teorema di derivazione delle funzioni composte, per avere la tesi $\square$

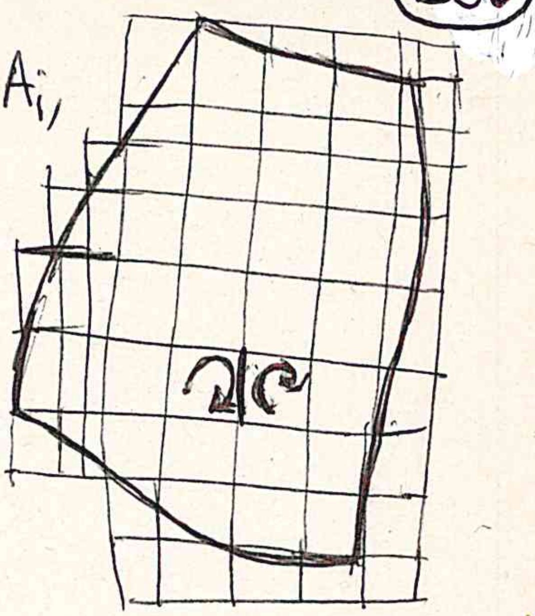
Definiamo ora le curve regolari a tratti. Una curva $\underline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^N$ è regolare a tratti, se esistono $\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_k$, curve regolari, tali che $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 \vee \underline{\varphi}_2 \vee \dots \vee \underline{\varphi}_k$.

Ricordiamo che le curve regolari sono le curve di classe C^1, la cui derivata è un vettore sempre diverso da $\underline{0}$.

Teorema (di Gauss-Green) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato, con frontiera ∂A sostegno di una curva regolare a tratti. Sia $\underline{n}$ il versore normale esterno ad A (ben definito nei punti di ∂A, salvo al più un numero finito di essi). Se $f \in C^1(B)$, con B aperto contenente $\overline{A}$, allora:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial A} f n_1\, ds = \int_{+\partial A} f\, dy \quad \text{(orientazione antioraria)}$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial A} f n_2\, ds = \int_{-\partial A} f\, dx \quad \text{(orientazione oraria)}.$$



dim. Possiamo decomporre A in un numero finito m di insiemi normali A_i, delimitati da grafici di funzioni C^1.

Chiaramente, si avrà

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,,$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,.$$

Ma anche gli integrali sul bordo sono additivi,

$$\int_{\partial A} f n_1\,ds = \sum_{i=1}^m \int_{\partial A_i} f n_1\,ds\,, \quad \int_{\partial A} f n_2\,ds = \sum_{i=1}^m \int_{\partial A_i} f n_2\,ds\,.$$

Infatti i tratti di bordo di A_i che sono interni ad A, sono percorsi, nella somma, due volte in senso inverso, come suggerisce la figura. Quindi basta provare che la tesi vale per un singolo A_i, cioè per un insieme normale della forma

$$E = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

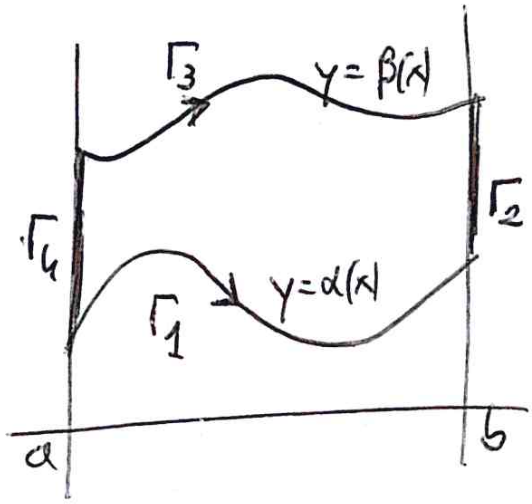
con $\alpha, \beta \in C^1$. Si ha per questo insieme

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,dx\,, \quad \int_E \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx.$$

Cominciamo col secondo integrale, che è il più semplice.

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[f(x,\beta(x)) - f(x,\alpha(x))\right]dx =$$

$$= \int_a^b f(x,\beta(x))\,dx - \int_a^b f(x,\alpha(x))\,dx .$$



Analizziamo adesso $+\partial E$ (verso antiorario). Esso è fatto da 4 pezzi:

$$+\Gamma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = \alpha(x), \end{cases} \quad x \in [a,b] ;$$

$$+\Gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = y, \end{cases} \quad y \in [\alpha(b), \beta(b)] ;$$

$$-\Gamma_3 : \begin{cases} x = x \\ y = \beta(x), \end{cases} \quad x \in [a,b] ; \qquad -\Gamma_4 : \begin{cases} x = a \\ y = y, \end{cases} \quad y \in [\alpha(a), \beta(a)] .$$

Si ha dunque

$$\int_{-\partial E} f\,dx = \sum_{j=1}^{4} \int_{-\Gamma_j} f\,dx = -\sum_{j=1}^{4} \int_{+\Gamma_j} f\,dx =$$

$$= -\int_a^b f(x,\alpha(x))\,dx + 0 + \int_a^b f(x,\beta(x))\,dx + 0 .$$

Ciò prova la 2ª formula nel 2° caso.

Vediamo ora il primo integrale:

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\,dx ;$$

utilizzando il teorema provato all'inizio, si ha

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy = \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy - f(x,\beta(x))\,\beta'(x) + f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x),$$

e quindi

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_a^b \Big[\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy - f(x,\beta(x))\,\beta'(x) + f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) =$$

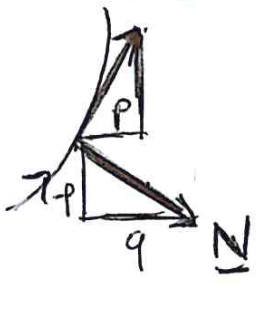
$$= \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b,y)\,dy - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a,y)\,dy - \int_a^b f(x,\beta(x))\,\beta'(x)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx.$$

Analizziamo l'integrale nel bordo: come prima si ha

$$\int_{+\partial E} f\,dy = \sum_{j=1}^{4} \int_{+\Gamma_j} f\,dy =$$

$$= \int_a^b f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b,y)\,dy - \int_a^b f(x,\beta(x))\,\beta'(x)\,dx - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a,y)\,dy,$$

e ciò prova la 2ª formula nel 1° caso. Per provare la 1ª formula, infine, osserviamo che se il vettore tangente è $\underline{\tau} = (p, q)$, allora il vettore normale esterno è $\underline{n} = (q, -p)$.



Ne segue che

$$n_1 = \begin{cases} \alpha'(x) & \text{su } \Gamma_1 \\ 1 & \text{su } \Gamma_2 \\ -\beta'(x) & \text{su } \Gamma_3 \\ -1 & \text{su } \Gamma_4 \end{cases}, \qquad n_2 = \begin{cases} -1 & \text{su } \Gamma_1 \\ 0 & \text{su } \Gamma_2 \\ 1 & \text{su } \Gamma_3 \\ 0 & \text{su } \Gamma_4 \end{cases}.$$

e dunque $\displaystyle\int_{+\partial E} f\,dy = \int_{\partial E} f\,n_1\,ds$, $\displaystyle\int_{-\partial E} f\,dx = \int_{\partial E} f\,n_2\,ds$. □

Corollario (teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$).

Nelle ipotesi del teorema di Gauss-Green, se $\underline{F} : B \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^1 su un aperto $B \supseteq \bar{A}$, allora, posto

$$\operatorname{div} \underline{F} = \text{divergenza di } \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

si ha

$$\int_A \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy = \int_{+\partial A} (F_1\,dy - F_2\,dx) = \int_{\partial A} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_2 \, ds.$$

__dim.__ Basta applicare la 1ª formula del teorema di Gauss-Green a $f = F_1$, e la 2ª formula a $f = F_2$, e poi sommare: infatti

$$\int_A \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy = \int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$= \int_{+\partial A} (F_1\,dy - F_2\,dx) =$$

$$= \int_{\partial A} (F_1 n_1 + F_2 n_2)\, ds =$$

$$= \int_{\partial A} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_2 \, ds. \quad \square$$

Conseguenze del teorema di Gauss-Green:

- Formula di integrazione per parti.

Siano $f, g \in C^1(B)$, con B aperto $\supseteq \overline{A}$, e A aperto con ∂A sostegno di una curva regolare a tratti. Allora

$$\int_A f_x(x,y)\, g(x,y)\, dx\,dy = \int_{\partial A} f g\, n_1\, ds - \int_A f(x,y)\, g_x(x,y)\, dx\,dy,$$

$$\int_A f_y(x,y)\, g(x,y)\, dx\,dy = \int_{\partial A} f g\, n_2\, ds - \int_A f(x,y)\, g_y(x,y)\, dx\,dy.$$

[Segue dal teorema di Gauss-Green applicato a $\frac{\partial}{\partial x}(fg)$ e $\frac{\partial}{\partial y}(fg)$.]

Introducendo il Laplaciano di u, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, si ha anche questa formula, valida per $u, v \in C^2(B)$, $B \supseteq \overline{A}$:

$$\int_A [u\Delta v - v\Delta u]\, dx\,dy = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial v}{\partial \underline{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right) ds,$$ $\underline{n}$ vettore normale este

Infatti, per la formula di integrazione per parti,

$$\int_A [u\Delta v - v\Delta u]\, dx\,dy = \int_A [u(v_{xx}+v_{yy}) - v(u_{xx}+u_{yy})]\, dx\,dy =$$

$$= \int_{\partial A} [u v_x n_1 + u v_y n_2 - v u_x n_1 - v u_y n_2]\, ds -$$

$$- \int_A [\cancel{u_x v_x} + \cancel{u_y v_y} - \cancel{v_x u_x} - \cancel{v_y u_y}]\, dx\,dy = \int_{\partial A} \left[u \frac{\partial v}{\partial \underline{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right] ds.$$

- <u>Area di insiemi piani</u>.

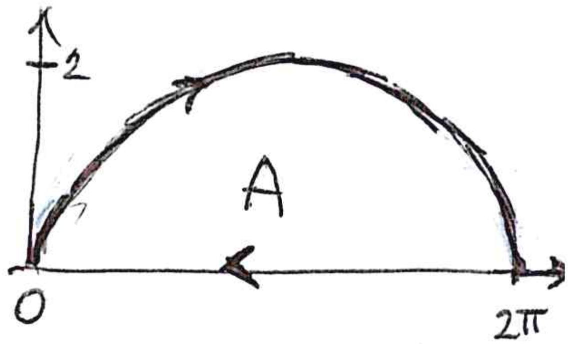
Se nelle formule di Gauss-Green scegliamo $f(x,y)=x$ e $g(x,y)=y$, otteniamo $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=1$, e quindi

$$m_2(A)=\int_{+\partial A} x\,dy=\int_{-\partial A} y\,dx\,,$$

ed anche, volendo,

$$m_2(A)=\frac{1}{2}\int_{+\partial A}(x\,dy-y\,dx)\,.$$

Ad esempio, se A è la regione delimitata dall'asse x e dalla cicloide $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $t\in[0,2\pi]$, si ha (il verso di $-\partial A$ è orario)



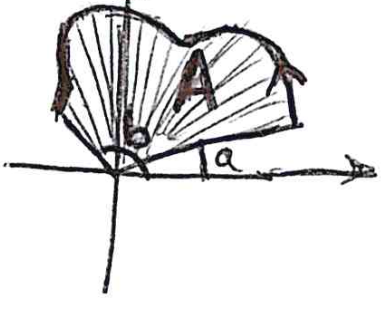
$$m_2(A)=\int_{-\partial A} y\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)\,dt=3\pi$$

(si noti che lungo il segmento di base $y=0$).

- <u>Area in coordinate polari</u>:

Sia $A=\{(r,\theta):\ r\le g(\theta),\ \theta\in[a,b]\}$, $[a,b]\subseteq[0,2\pi]$.



Allora $m_2(A)=\int_a^b g(\theta)^2\,d\theta$.

Infatti il bordo di A, $+\partial A$, dato dai due segmenti $+S_1=\{(r,\theta):\ \theta=a,\ 0\le r\le g(a)\}$,

$$-S_2 = \{(r,\theta) : \theta = b,\ 0 \le r \le g(b)\},$$

e dalla curva

$$+\Gamma = \{(r,\theta) : r = g(\theta),\ a \le \theta \le b\}.$$

Siccome

$$+S_1 : \begin{cases} x = r\cos a \\ y = r\sin a, \end{cases} \quad 0 \le r \le g(a), \qquad \begin{cases} x' = \cos a \\ y' = \sin a \end{cases}$$

$$+S_2 : \begin{cases} x = r\cos b \\ y = r\sin b, \end{cases} \quad 0 \le r \le g(b), \qquad \begin{cases} x' = \cos b \\ y' = \sin b \end{cases}$$

$$+\Gamma : \begin{cases} x = g(\theta)\cos\theta \\ y = g(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad a \le \theta \le b, \qquad \begin{cases} x' = g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta \\ y' = g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

otteniamo

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_{+S_1}(x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{2}\int_{-S_2}(x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{2}\int_{+\Gamma}(x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{g(a)} \left[(r\cos a)\sin a - (r\sin a)\cos a\right] dr -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{g(b)} \left[(r\cos b)\sin b - (r\sin b)\cos b\right] dr +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b \left[g(\theta)\cos\theta\left(\cancel{g'(\theta)\sin\theta} + g(\theta)\cos\theta\right) - g(\theta)\sin\theta\left(\cancel{g'(\theta)\cos\theta} - g(\theta)\sin\theta\right)\right] d\theta$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\int_a^b g(\theta)^2\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b g(\theta)^2\,d\theta.$$

<u>Es.</u> area delimitata da $r = \sin 3\theta$, $0 \le \theta \le \pi/3$:

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{12}.$$