CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Per gli integrali in una sola variabile, come si sa, se $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ è una funzione biiettiva e di classe C^1, e se $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, vale la formula

$$\int_c^d f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt & \text{se } \varphi(a) = c \text{ e } \varphi(b) = d, \\ \int_b^a f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt & \text{se } \varphi(a) = d \text{ e } \varphi(b) = c, \end{cases}$$

e dunque, in ogni caso (ossia, sia quando $\varphi'(t) > 0$ in $[a,b]$, sia quando $\varphi'(t) < 0$ in $[a,b]$) si ha

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Questa formula si generalizza al caso di N variabili nel modo seguente: siano A, B aperti di $\mathbb{R}^N$ e sia $g : A \to B$ una funzione invertibile tale che g, g^{-1} siano di classe C^1 e

$$J_g(x) := \det Dg(x) \neq 0 \quad \forall x \in A.$$

Valgono allora i seguenti teoremi:

Teorema 1 Se $E \subseteq A$ è misurabile, allora $g(E)$ è misurabile e

$$m_N(g(E)) = \int_E |J_g(x)|\,dx.$$

Teorema 2 Se $F \subseteq B$ è misurabile, e se f è integrabile su F, allora

$$\int_F f(y)\,dy = \int_{g^{-1}(F)} f(g(x))\,|J_g(x)|\,dx.$$

Il teorema 2 è facile conseguenza del teorema 1. Infatti, quest'ultimo, applicato a g^{-1}, dice che se $F \subseteq B$ è misurabile, allora $g^{-1}(F)$ è misurabile e, posto $E = g^{-1}(F)$, ed estesa la funzione $J_g(x)$ a 0 fuori di A,

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_F(y)\,dy = m_N(F) = \int_E |J_g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} I_E(g(x))\,|J_g(x)|\,dx.$$

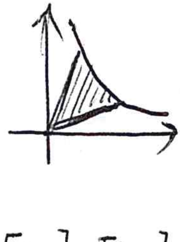
Questa formula si estende, per linearità, a tutte le funzioni $\varphi \in S_0$. Poi, utilizzando il teorema di B. Levi, otteniamo la formula per tutte le funzioni f misurabili e non negative. Infine, per differenza $f^+ - f^-$, si stabilisce la formula per ogni f integrabile su F, nulla fuori di F.

Il teorema 1 invece ha una dimostrazione assai laboriosa, che omettiamo.

<u>Esempio</u> Consideriamo l'integrale

$$\int_A \ln(1+xy)\,dx\,dy, \quad A = \{(x,y) : 0 \le xy \le 2,\ y \le 2x,\ 2y \ge x\}.$$

L'insieme A è contenuto nel 1° quadrante, perchè per x e y negativi le relazioni $y \le 2x$ e $2y \ge x$ sono incompatibili.



Dato che le quantità $(xy, \frac{y}{x})$ si muovono in $[0,2] \times [\frac{1}{2}, 2]$, siamo indotti al cambiamento di variabili $\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$.

Secondo le notazioni del teorema 2, queste relazioni definiscono l'applicazione $(u,v) = g^{-1}(x,y)$, e con $(x,y) = g(u,v)$. Allora ci sono 2 strade equivalenti:

(A) ricavare g e calcolare $J_g(u,v)$; (B) calcolare $J_{g^{-1}}(x,y)$ e poi ricavare $J_g(u,v)=\dfrac{1}{J_{g^{-1}}(g(u,v))}$. Le percorriamo entrambe:

(A) $\begin{cases} xy=u \\ \frac{y}{x}=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=u \\ y=vx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} vx^2=u \\ y=vx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$, cioè $g(u,v)=\begin{pmatrix} \sqrt{u/v} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix}$,

da cui

$$J_g(u,v)=\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}=\frac{1}{2v};$$

(B) $J_{g^{-1}}(x,y)=\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}=\frac{2y}{x}$, da cui $J_g(u,v)=\dfrac{1}{2\frac{y}{x}}=\dfrac{1}{2v}$.

In definitiva

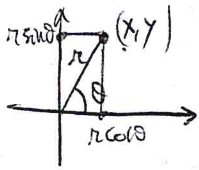
$$\int_A \ln(1+xy)\,dx\,dy=\int_0^2\left[\int_{\frac{1}{2}}^2 \ln(1+u)\,\frac{1}{2v}\,dv\right]du=\int_0^2 \ln(1+u)\left[\frac{1}{2}\ln v\right]_{1/2}^2 du=$$

$$=(\ln 2)\int_0^2 \ln(1+u)\,du=(\ln 2)\left(\left[(1+u)\ln(1+u)\right]_0^2-\int_0^2 1\,du\right)=$$

$$=(\ln 2)(3\ln 3-2).$$

<u>Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$</u> Per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ poniamo

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, ossia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=g\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$;



ove $\theta\in[0,2\pi]$, $r\geq 0$. Il problema di questa g è che essa è surgettiva da $[0,\infty[\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, ma non è iniettiva perchè $g(0,\theta)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $\theta\in[0,2\pi]$, e $g(r,0)=g(r,2\pi)$ per ogni $r\geq 0$. Dunque g non è bigettiva. Tuttavia, considerando $A=\{(r,\theta): r>0,\ 0<\theta<2\pi\}$ e $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): x\geq 0, y=0\}$, l'applicazione g è bigettiva e di classe C^1 da A in B, con

$$J_g(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r \quad \forall (r,\theta) \in A;$$

l'inversa g^{-1} esiste globalmente da B ad A, e nel primo quadrante vale $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = g^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$. (questa formula si estende a tutto B, opportunamente).

Quindi, per ogni f integrabile su B, vale la formula

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta .$$

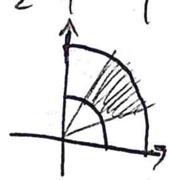
Ma poiché $B^c = \{(x,y) : x \geq 0,\ y = 0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$, così come $([0,\infty[\times [0,2\pi]) \setminus A$ ha misura nulla in $[0,\infty[\times [0,2\pi]$, possiamo rimpiazzare nei due membri della relazione precedente B con $\mathbb{R}^2$ e A con $[0,\infty[\times [0,2\pi[$, poiché i due integrali non cambiano. Pertanto:

<u>Proposizione</u> Sia $F \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile e sia f integrabile su F. Posto $E = g^{-1}(F) = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in F\}$, si ha

$$\int_F f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta .$$

<u>Esempi</u>. (1) $\int_F x\,dx\,dy$, $F = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\right\}$.

Si ha $F = g(E)$ ove $E = \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2,\ \frac{1}{2} \leq \operatorname{tg}\theta \leq 2\right\}$.



Dunque $\int_F x\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} r\cos\theta\,d\theta\right] r\,dr =$

$= \left[\sin\theta\right]_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 =$ (essendo $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ per $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$) $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{3}$.