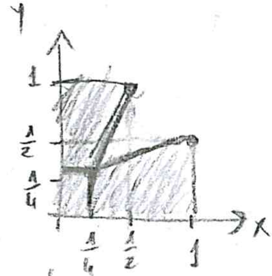
Esercizi sugli integrali

- $\int_E xy^2\,dx\,dy$, E descritto in figura:



L'insieme E non è normale né rispetto all'asse x, né rispetto all'asse x. Conviene decomporre E in 3 parti:

$E_1 = [0,\frac{1}{4}]\times[0,\frac{1}{4}]$,

$E_2 = \left\{(x,y):\ \frac{1}{4}\le x\le 1,\ \ 0\le y\le \frac{x}{3}+\frac{1}{6}\right\}$,

$E_3 = \left\{(x,y):\ \frac{1}{4}\le y\le 1,\ \ 0\le x\le \frac{y}{3}+\frac{1}{6}\right\}$;

infatti la retta per $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ e $(1,\frac{1}{2})$ ha equazione $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$, mentre la retta per $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ e $(\frac{1}{2},1)$ ha equazione $y=3x-\frac{1}{2}$, ovvero $x=\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$.

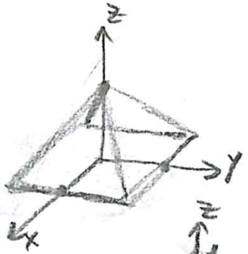
Allora:

$$\int_{E_1} xy^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac14} x\,dx \int_0^{\frac14} y^2\,dy = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{96},$$

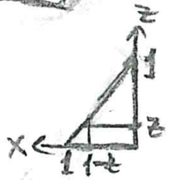
$$\int_{E_2} xy^2\,dx\,dy = \int_{1/4}^{1}\left(\int_0^{\frac{x}{3}+\frac{1}{6}} xy^2\,dy\right)dx = \frac{1}{3}\int_{1/4}^{1} x\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{6}\right)^3 dx = \cdots\cdots$$

$$\int_{E_3} xy^2\,dx\,dy = \int_{1/4}^{1}\left(\int_0^{\frac{y}{3}+\frac{1}{6}} xy^2\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_{1/4}^{1} y^2\left(\frac{y}{3}+\frac{1}{6}\right)^2 dy = \cdots\cdots$$

• $\int_P z^2\,dx\,dy\,dz$, P = piramide di base il quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$ del piano $z=0$ e vertice il punto $(0,0,1)$.



La sezione $E_z=\{(x,y):\ (x,y,z)\in P\}$ è il quadrato di lato $2(1-z)$.



Quindi, integrando per fette orizzontali,

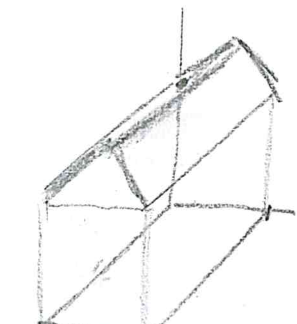
$$\int_P z^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 z^2\left(\int_{-1+z}^{1-z}\left(\int_{-1+z}^{1-z}dx\right)dy\right)dz=$$

$$=\int_0^1 4z^2(1-z)^2\,dz=\int_0^1\left(4z^2-8z^3+4z^4\right)dz=$$

$$=\frac{4}{3}-2+\frac{4}{5}=\frac{2}{15}.$$

• $\int_C zx^2y\,dx\,dy\,dz$, $C=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 4-|1-y|\}$.

L'integrale è uguale a



$$\int_0^4\left[\int_0^2\left(\int_0^{4-|1-y|} zx^2y\,dz\right)dy\right]dx=$$

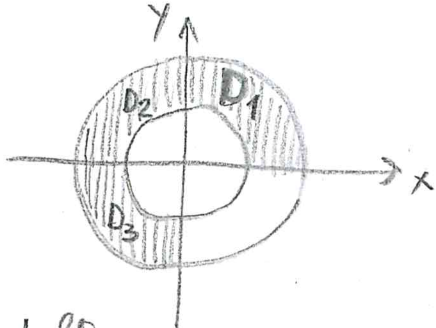
$$=\int_0^4 x^2\left[\int_0^2 y\left(\frac{(4-|1-y|)^2}{2}\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 x^2\,dx\cdot\left[\int_0^2 y\left(16+(1-y)^2\right)dy-\int_0^1 8y(1-y)\,dy-\int_1^2 8y(y-1)\,dy\right]=\dots\dots$$

- $\int_D (x+y)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}\cup\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4,\ xy\ge 0\}$

Osserviamo che, scritto

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$,



gli insiemi D_1, D_2, D_3 sono disgiunti (o meglio: le loro intersezioni hanno misura nulla). Inoltre

$$\int_{D_1} (x+y)\,dx\,dy = -\int_{D_3} (x+y)\,dx\,dy,$$

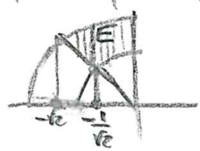
dunque

$$\int_D (x+y)\,dx\,dy = \int_{D_2} (x+y)\,dx\,dy.$$

Questo integrale è nullo, perché D_2 è simmetrico rispetto alla retta $x+y=0$, e l'integrando è appunto $x+y$: il contributo della parte negativa di $x+y$ uguaglierà quello della parte positiva.

Calcoliamo, per esercizio, l'integrale di $\max\{x+y, 0\}$ su D_2.

Posto $E=\{(x,y)\in D_2:\ x+y>0\}$, si ha



$E = E_1 \cup E_2$, ove

$E_1=\{(x,y):\ -\sqrt{2}\le x\le -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -x\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$,

$E_2=\{(x,y):\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 0,\ \sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$.

Allora:

$$\int_{E_1} (x+y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\right] dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x\sqrt{4-x^2} + \cancel{x^2} + 2 - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) dx +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \left(x\sqrt{4-x^2} + 2 - \cancel{\frac{x^2}{2}} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + 2x\right]_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + \frac{3x}{2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^{3/2}} - \sqrt{2} + \frac{2^{3/2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^{3/2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} =$$

$$= \frac{7}{2\sqrt{2}} - \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\left(2^{3/2} - 2^{-3/2}\right).$$