Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Anzitutto, diciamo che una proprietà $p(x)$ è vera quasi ovunque in D, $D \in \mathcal{M}_N$, se, detto

$$P = \{x \in D : p(x) \text{ è vera}\},$$

si ha $m_N(D \setminus P) = 0$ (e dunque $P \in \mathcal{M}_N$). Si scrive "$p(x)$ q.o. in D".

Esempi (1) Se f è misurabile su D e $g: D \to \overline{\mathbb{R}}$ verifica

$$g(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } D,$$

allora sappiamo che anche g è misurabile su D.

(2) Se $f \geq 0$ in D, f è sommabile su D, e se in un sottoinsieme misurabile $K \subseteq D$ si ha $\int_K f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) \equiv 0$ q.o. in K.

Infatti, posto $K_n = \{x \in K : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$, si ha

$$0 = \int_K f(x)\,dx \geq \int_{K_n} f(x)\,dx \geq \frac{1}{n} m_N(K_n) ;$$

ne segue $m_N(K_n) = 0$ per ogni n, da cui $\{x \in K : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ha anch'esso misura nulla.

(3) Se D è misurabile, $K \subset D$ ha misura nulla, e $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile, allora

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D\setminus K} f(x)\,dx.$$

Infatti

$$\int_K f^+(x)\,dx = \int_K f^-(x)\,dx = 0,$$

dato che per ogni funzione semplice $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}$, essendo $m_N(K)=0$, si ha $\int_K \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) I_K(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, m_N(D_j \cap K) = 0$.

Quindi

$$\int_K f(x)\,dx = 0,$$

da cui

$$\int_{D\setminus K} f(x)\,dx = \int_{D\setminus K} f(x)\,dx + \int_K f(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx.$$

<u>Teorema</u> (<u>di Beppo Levi o della convergenza monotona</u>) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili, tali che $0 \le f_n \le f_{n+1}$ q.o. in D.

Allora

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ q.o. in D,

(ii) $\exists \lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$.

dim. Poniamo $P_n = \{f_n < 0\}$, $Q_n = \{f_n > f_{n+1}\}$: si ha $m_N(P_n) = m_N(Q_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} (P_n \cup Q_n)$ ha misura nulla e

$$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \forall x \in D\setminus P,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi, in $D \setminus P$ esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ed è una funzione misurabile non negativa, che estendiamo a D ponendola uguale a
Allora,

$$\int_D f_n(x)\,dx = \int_{D\setminus P} f_n(x)\,dx, \qquad \int_D f(x)\,dx = \int_{D\setminus P} f(x)\,dx,$$

quindi ragionare su D o su $D\setminus P$ è la stessa cosa. Inoltre, per monotonia, $\exists \lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx \le \int_D f(x)\,dx$.
Dunque occorre provare solo la disuguaglianza opposta.
Sia $\varphi \in S_0$ tale che $0 \le \varphi \le f I_D$ e fissiamo $\beta \in]0,1[$. Allora

$$0 \le \beta\varphi(x) < f(x) \qquad \text{se } f(x) > 0$$

$$0 = \beta\varphi(x) = f(x) \qquad \text{se } f(x) = 0.$$

Poichè $0 \le f_n \le f$ e $f_n(x) \to f(x)$, si avrà definitivamente in entrambi i casi

$$0 \le \beta\varphi(x) \le f_n(x) \le f(x) \quad \forall x \in D.$$

Quindi, ponendo

$$A_n = \{\beta\varphi \le f_n\},$$

si ha

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D$$

Perciò

$$\beta \int_{A_n} \varphi(x)\,dx = \int_{A_n} \beta\varphi(x)\,dx \le \int_{A_n} f_n(x)\,dx \le \int_D f_n(x)\,dx \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Poiché $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = D$, il primo membro converge a $\beta\int_D \varphi(x)dx$. Quindi per $n\to\infty$ si ottiene

$$\beta\int_D \varphi(x)dx \le \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx.$$

Passando all'estremo superiore rispetto a φ, per definizione di integrale,

$$\beta\int_D f(x)dx \le \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx,$$

e per $\beta\to 1^-$ si ottiene la tesi. $\square$

<u>Osservazione</u> L'enunciato del teorema di B. Levi diventa falso se togliamo anche soltanto una delle ipotesi:

(i) con la sola condizione $f_n \le f_{n+1}$, senza supporre $f_n \ge 0$, si prenda in $\mathbb{R}$ la successione $\{f_n\}$, con $f_n(x) = -I_{[n,\infty[}(x)$: allora $f_n \le f_{n+1} \le 0$, $f_n(x)\to f(x)\equiv 0$, ma

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = -\infty < 0 = \int_0^\infty f(x)dx;$$

(ii) con la sola condizione $f_n \ge 0$, senza supporre $f_n\le f_{n+1}$, si consideri in $\mathbb{R}$ la successione $\{f_n\}$, con $f_n(x) = I_{[n,n+1[}(x)$: allora si ha $f_n\ge 0$, $f_n(x)\to f(x)\equiv 0$, ma

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = 1 > 0 = \int_0^\infty f(x)dx. \ \square$$

Se manca la convergenza puntuale, ma le f_n sono non negative, vale un risultato più debole, ma comunque importante.

Lemma (di Fatou) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili, tali che $f_n \geq 0$ q.o. in D. Allora

$$\int_D \min\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx.$$

dim. Si ha

$$\min\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} f_m(x);$$

quindi, posto

$$g_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$$

le g_n verificano

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} \text{ q.o. in } D, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \min\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dal teorema di B. Levi

$$\int_D \min\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n(x)\,dx \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx \quad \square$$

Teorema (di Lebesgue, o della convergenza dominata) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili.
Supponiamo che

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ q.o. in D,

(ii) $\exists\, g: D \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile, tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. in D, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx,$$

ed anzi, di più,

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

dim Consideriamo le funzioni q.o. non negative $g+f_n$, $g-f_n$.
Poichè $g+f_n \to g+f$ puntualmente q.o. in D, e $g-f_n \to g-f$ puntualmente q.o. in D, dal lemma di Fatou ricaviamo

$$\int_D [g(x)+f(x)]\,dx \le \min\lim_{n\to\infty}\left[\int_D [g(x)+f_n(x)]\,dx = \int_D g(x)\,dx + \min\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx,\right.$$

$$\int_D [g(x)-f(x)]\,dx \le \min\lim_{n\to\infty}\left[\int_D [g(x)-f_n(x)]\,dx = \int_D g(x)\,dx - \max\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx.\right.$$

Semplificando la quantità finita $\int_D g(x)\,dx$, si deduce

$$\max\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx \le \int_D f(x)\,dx \le \min\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx,$$

e quindi

$$\exists \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx.$$

Infine, applicando il teorema a $|f_n-f|$, che tende puntualmente a 0 ed è maggiorata da $2g$, si ottiene il secondo enunciato. □

Esercizi

1. Se $f_n \ge 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty}\int_D f_n(x)\,dx = \int_D \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty}\int_D |f_n(x)|\,dx < \infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty}\int_D f_n(x)\,dx = \int_D \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$.
3. Se f è sommabile in D, allora si ha $\lim_{n\to\infty}\int_D |f(x)|^{\frac{1}{n}}\,dx = m_N\{f\neq 0\}$.
4. Provare che $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}$ $\forall p,q>0$; analizzare i casi $q=1$, $p=1,2,3$.