ANALISI 2 | ma 12/11/19

2° facsimile di compitino

Esercizio 1 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \text{ove } f_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x\in[n,n+1[\\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si analizzino i 4 tipi di convergenza.

Esercizio 2 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = u - v - 3w \\ u(0)=1, \ v(0)=0, \ w(0)=0. \end{cases}$$

Esercizio 3 Sia $F(x,y)=e^{3x+y}+\sin(x-y)-1$. Provare che $F(0,0)=0$ e che in un intorno dell'origine l'insieme $\{F(x,y)=0\}$ è grafico di una funzione che ha un massimo locale nel punto 0.

Risoluzione

Esercizio 1 Se $x<1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=0$. Se $x\geq 1$ vi è un solo indice $k\in\mathbb{N}^+$, tale che $x\in[k,k+1[$; dunque $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\frac{1}{k}$.

Pertanto la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, con somma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{k} & \text{se } x \in [k, k+1[, \; k \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Poichè tutte le f_n sono non negative, la convergenza assoluta della serie è equivalente alla puntuale.

Per la convergenza uniforme, dobbiamo verificare se

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \geq 0} \sum_{k=N}^{\infty} f_k(x) = 0$$

In effetti,

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{k=N}^{\infty} f_k(x) = \frac{1}{N}$$

perchè

- se $0 \leq x \leq N$ tutti gli $f_k(x)$ sono nulli,
- se $N \leq x$, e $x \in [k, k+1[$, è non nulla solo $f_k(x) = \frac{1}{k}$.

Ne segue che il sup cercato è il $\max_{k \geq N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N}$.

Per lo stesso motivo si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

Non si ha convergenza totale in alcuna semiretta del tipo $[a, \infty[$ con $a \in \mathbb{R}$, perchè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{[a,\infty[} f_n(x) = \sum_{n \geq a} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Invece si ha convergenza totale in $]-\infty, b]$ per ogni $b \in \mathbb{R}$,

perché
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \le b} f_n(x) = \sum_{n<b} \frac{1}{n} < \infty .$$

Esercizio 2 Il sistema è omogeneo:
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$ L'equazione
$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$ ha una
soluzione $\lambda = -1$, poiché $1-3+1+1=0$. Dato che
$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda-1),$$
e le radici di $\lambda^2+2\lambda-1$ sono $-1 \pm \sqrt{2}$, abbiamo i 3 autovalori
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1+\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = -1-\sqrt{2}.$$
Gli autovettori corrispondenti so
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 2\sqrt{2}-3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -(1+\sqrt{2}) \\ 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
Dunque
$$V_0 = \left\{ c_1 e^{-t} \underline{v}_1 + c_2 e^{-(\sqrt{2}+1)t} \underline{v}_2 + c_3 e^{-(\sqrt{2}-1)t} \underline{v}_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$
Imponendo le condizioni di Cauchy si trova
$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$c_1 = -\frac{1}{4-\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}-2}, \quad c_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}},$$

e dunque

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4-\sqrt{2}} e^{-t} \underline{v}_1 + \frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}-2} e^{-(\sqrt{2}+1)t} \underline{v}_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}} e^{-(\sqrt{2}-1)t} \underline{v}_3 .$$

<u>Esercizio 3</u> Ovviamente, $F(0,0) = 1+0-1 = 0$. Inoltre

$$F_x = 3e^{3x+y} + \cos(x-y), \quad F_x(0,0) = 4,$$

$$F_y = e^{3x+y} - \cos(x-y), \quad F_y(0,0) = 0.$$

Dunque vi è un intorno di $(0,0)$ tale che la curva di livello $\{F(x,y)=0\}$ è, in quell'intorno, grafico di una funzione $x = h(y)$, con $h \in C^\infty$ (perchè $F \in C^\infty$). Risulta $h(0)=0$ e

$$h'(0) = -\frac{F_y(0,0)}{F_x(0,0)} = 0;$$

inoltre si ha

$$F_{xx} = 9e^{3x+y} - \sin(x-y), \quad F_{xx}(0,0) = 0,$$

$$F_{xy} = 3e^{3x+y} + \sin(x-y), \quad F_{xy}(0,0) = 3,$$

$$F_{yy} = e^{3x+y} + \sin(x-y), \quad F_{yy}(0,0) = 1.$$

Allora, derivando l'identità $F(h(y),y)=0$, si ha

$$F_x h' + F_y = 0$$

$$F_{xx}(h')^2 + F_{xy} h' + F_x h'' + F_{yx} h' + F_{yy} = 0,$$

e dunque, calcolando in $y=0$ e ricordando che $h(0)=h'(0)=0$,

$$4 h''(0) + 1 = 0,$$

ossia $h''(0) = -\frac{1}{4}$. Essendo $h'(0)=0$ e $h''(0)<0$, il punto $y=0$ è di massimo relativo.

3° facsimile di compito

Esercizio 1 Stabilire in quali intervalli di $[0,\infty[$ la successione

$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{1+nx^2}}{(1+nx)^2}$$

converge puntualmente o uniformemente

Esercizio 2 Sia $F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$. Provare che $F(0,e,2)=0$, e che vi è un intorno U di $(0,e,2)$ tale che $U \cap \{F(x,y,z)=0\}$ è grafico di una funzione $z = h(x,y)$, e scrivere la matrice Hessiana di h in $(0,e,2)$.

Esercizio 3 Trovare il massimo ed il minimo di

$$f(x,y) = (3y+1)\,|x+y|$$

nell'insieme

$$E = [-1,1] \times [-1,1].$$

Risoluzione

Esercizio 1 Poiché per $x>0$ si ha

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}{n^2\left(x+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^2}$$

si vede subito che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ +\infty & \text{se } x=0. \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo del quale 0 sia punto d'accumulazione, perché il limite delle f_n è discontinuo in 0.

Sulle semirette $[a,+\infty[$, con $a>0$, si ha invece, per n grande,

$$0 \le f_n(x) \le \frac{n\sqrt{2nx^2}}{n^2x^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{|x|}{x^2} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}\,a},$$

e dunque

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge a} f_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{n}} = 0.$$

Esercizio 2 Si ha ovviamente

$$F(0,e,2) = e^2+4-e^2-4 = 0.$$

Poi,

$F_x = z,\ \ F_x(0,e,2)=2;$

$F_y = 2y,\ \ F_y(0,e,2)=2e;$

$F_z = x+2z-e^z,\ \ F_z(0,e,2)=2e-e^2<0.$

Dunque esiste una funzione $z=h(x,y)$ che descrive la curva di livello $\{F(x,y,z)=0\}$ in un intorno di $(0,e,2)$.

Si ha $h(0,e)=2$, e derivando l'identità $F(x,y,h(x,y))=0$

troviamo

$$\begin{cases} F_x + F_z h_x = 0 \\ F_y + F_z h_y = 0 \end{cases} \qquad h_x(0,e) = \frac{-2}{e^2-2e}$$

$$h_y(0,e) = \frac{2}{e-2}.$$

Derivando ancora, dalla 1ª equazione del sistema si ha

$$\begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{array} \begin{cases} F_{xx} + 2F_{xz} h_x + F_{zz}(h_x)^2 + F_z h_{xx} = 0 \\ F_{xy} + F_{xz} h_y + F_{zy} h_x + F_{zz} h_y \cdot h_x + F_z h_{xy} = 0 \end{cases}$$

mentre dalla 2ª si ha

$$\begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{array} \begin{cases} F_{yx} + F_{yz} h_x + F_{zx} h_y + F_{zz} h_x \cdot h_y + F_z h_{yx} = 0 \\ F_{yy} + 2F_{yz} h_y + F_{zz}(h_y)^2 + F_z h_{yy} = 0. \end{cases}$$

Abbiamo 4 equazioni, però la 2ª e la 3ª sono uguali. Essendo

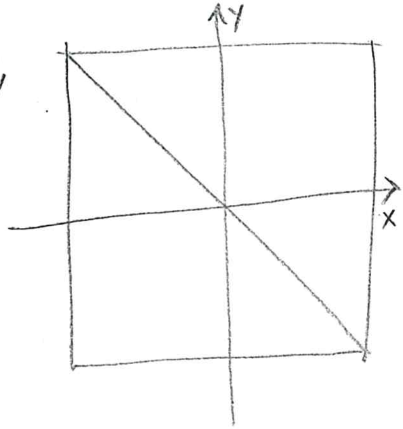
$F_{xx} = 0$, $F_{xy} = 0$, $F_{xz} = 1$,
$F_{yx} = 0$ $F_{yy} = 2$, $F_{yz} = 0$,
$F_{zx} = 1$, $F_{zy} = 0$, $F_{zz} = 2 - e^z$, con $F_{zz}(0,e,2) = 2 - e^2$,

si ricava con qualche calcolo

$$h_{xx}(0,e) = \frac{8(1+e-e^2)}{e^3(e-2)^3}, \quad h_{xy}(0,e) = \frac{4(e^2-2)}{e^2(e-2)^3}, \quad h_{yy}(0,e) = \frac{16-8e-2e^2}{e(e-2)^3},$$

e da qui è immediato scrivere la matrice Hessiana.

Esercizio 3   La f non è differenziabile sulla retta $y+x=0$, dove comunque f è nulla...



Sul triangolo superiore, dove $y+x>0$,

si ha

$$f(x,y)=(3y+1)(x+y)$$

quindi, dal sistema

$$\begin{cases} f_x = 3y+1=0 \\ f_y = 3x+6y+1=0 \end{cases}$$

troviamo il punto stazionario $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ che però non è interno, e del resto si sa che $f\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=0$.

Sui lati del triangolo superiore:

- vertice $(1,1)$, con $f(1,1)=8$;
- lato verticale, $f(1,y)=(3y+1)(1+y)$, derivata $6y+4=0$ per $y=-\frac{2}{3}$, con $f\left(1,-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$;
- lato orizzontale, $f(x,1)=4(x+1)$, derivata $4\neq 0$, nessun punto da considerare.

Sul triangolo inferiore, dove $y+x<0$, si ha

$$f(x,y)=-(3y+1)(x+y),$$

quindi procedendo analogamente si trova il punto stazionario

non interno $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, nel quale f è nullo; sui lati del triangolo inferiore avremo:

- vertice $(-1,-1)$, con $f(-1,-1) = -4$,
- lato verticale, $f(-1,y) = (3y+1)(y-1)$, derivata $6y-2=0$ per $y=\frac{1}{3}$, con $f\left(-1,\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$,
- lato orizzontale, $f(x,-1) = 2(x-1)$, derivata $2 \neq 0$, nessun punto da considerare.

In definitiva, confrontando i valori,

$$\max_E f = f(1,1) = 8, \qquad \min_E f = f(-1,-1) = -4.$$