Facsimile di compito

Esercizio 1 Sia $F(x,y) = y + x^2 \sin y + x \cos y + xy$.

Posto $Z = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$, si verifichi che $(0,0) \in Z$ e che in tale punto valgono le ipotesi del teorema del Dini e che, in particolare, vi è un intorno U di $(0,0)$ tale che $Z \cap U$ è il grafico di una funzione $y = f(x)$. Si calcoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + x}{x^2}$$

Esercizio 2 Si trovi il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ sull'insieme

$$D = \left\{ (x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1, \ \ x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x+|x|}{2}\right)^n e^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) In quali intervalli I vi è convergenza assoluta?

(ii) In quali intervalli I vi è convergenza puntuale?

(iii) In quali intervalli I vi è convergenza totale?

(iv) In quali intervalli I vi è convergenza uniforme?

Risoluzione

Esercizio 1 È evidente che $F(0,0)=0$. Inoltre $F\in C^\infty$ e

$$F_x(x,y)=2x\sin y+\cos y+y,\quad F_y(x,y)=1+x^2\cos y-x\sin y+x,$$

quindi $F_x(0,0)=1$, $F_y(0,0)=1$. Dunque per il teorema del Dini esiste un intorno U di $(0,0)$ tale che $Z\cap U$ è grafico di una funzione $y=f(x)$ invertibile e di classe C^∞. Si ha

$$f'(0)=-\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)}=-1.$$

Derivando la relazione $F_y(x,f(x))\,f'(x)+F_x(x,f(x))=0$, si ottiene

$$F_{yx}f'+F_{yy}f'^2+F_yf''+F_{xx}+F_{xy}f'=0,$$

da cui

$$f''(0)=-\frac{1}{F_y(0,0)}\left[2F_{xy}(0,0)f'(0)+F_{xx}(0,0)+F_{yy}(0,0)f'(0)^2\right].$$

Essendo

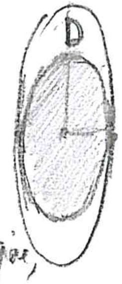
$$F_{xx}=2\sin y,\quad F_{xy}=2x\cos y-\sin y+1,\quad F_{yy}=-x^2\sin y-x\cos y,$$

si ottiene

$$f''(0)=-\left[2(-1)+0+0\right]=2$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0-x+x^2+o(x^2)+x}{x^2}=1.$$



Esercizio 2 L'insieme D è la parte interna all'ellisse più grande ed esterna all'ellisse più piccola. La funzione f è di classe C^∞ in D, poichè l'unico punto dove f è singolare è l'origine, che è interna all'ellisse più piccola.

Il gradiente di f è sempre non nullo, quindi non ci sono punti stazionari interni. Il bordo di D è l'unione dei bordi delle due ellissi. I due punti $(-1,0)$, $(1,0)$, in cui le ellissi si toccano, sono punti singolari del bordo nei quali non valgono le ipotesi del teorema del Dini. Si ha

$$f(-1,0) = f(1,0) = 0.$$

Analizziamo il bordo dell'ellisse interna col metodo dei moltiplicatori. Sia

$$L(x,y,\lambda) = \ln(x^2+y^2) + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

Allora $\nabla L = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} + 2\lambda x = 0 & \text{cioè } 2x\left(\dfrac{1}{x^2+y^2} + \lambda\right) = 0 \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} + \dfrac{\lambda}{2} y = 0 & \text{cioè } y\left(\dfrac{2}{x^2+y^2} + \dfrac{\lambda}{2}\right) = 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 ; \end{cases}$$

Dalla 1ª equazione $x=0$ oppure $\lambda = -\frac{1}{x^2+y^2}$; se $x=0$, allora dalla 3ª equazione $y = \pm 2$ (e $\lambda = -1$), mentre se $\lambda = -\frac{1}{x^2+y^2}$, allora $\lambda \neq -\frac{4}{x^2+y^2}$ e dunque, dalla 2ª, $y=0$, che implica $x = \pm 1$ (e $\lambda = -1$). Si ottengono così i punti stazionari vincolati $(0,\pm 2)$ e $(\pm 1, 0)$ (questi ultimi già considerati). Si ha

$$f(0,\pm 2) = \ln 4.$$

Per amor di varietà, analizziamo la situazione sulla ellisse esterna utilizzandone la parametrizzazione: essendo $y^2 = 9(1-x^2)$ la restrizione di $f(x,y)$ a tale bordo è

$$h(x) = \ln(x^2 + 9(1-x^2)) = \ln(9-8x^2), \quad x \in [-1,1].$$

Ovviamente $h(\pm 1) = 0$ ($h(1) = f(1,0)$, $h(-1) = f(-1,0)$, valori già noti).

In $]-1,1[$ si ha $h'(x) = \dfrac{-16x}{9-8x^2} = 0$ se e solo se $x=0$; si trovano così i punti $(0,\pm 3)$, nei quali

$$f(0,\pm 3) = \ln 9.$$

Conclusione:

$$\max_D f = f(0,\pm 3) = \ln 9 = 2\ln 3,$$

$$\min_D f = f(\pm 1, 0) = 0.$$

<u>Osservazione</u>: $f(x,y)$ è il logaritmo della distanza di (x,y) da $(0,0)$: quindi è evidente che il punto di massimo di f è il punto di D a massima distanza dall'origine, cioè $(0,3)$ e, per simmetria, $(0,-3)$; analogamente il punto di D a minima distanza da $(0,0)$ è $(1,0)$ e simmetricamente $(-1,0)$.

<u>Esercizio per casa</u> Stesso dominio D, con

$$f(x,y) = \ln(2x^2 + 3y^2).$$

Esercizio 3 Osserviamo che

$$\left(1+\frac{x+|x|}{2}\right)=\begin{cases}1+x & \text{se } x>0\\ 1 & \text{se } x\leq 0.\end{cases}$$

Quindi, per $x\leq 0$, la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

ed è divergente a $+\infty$, visto che $e^{-nx}\geq 1$ per ogni $x\leq 0$.
Invece per $x>0$ la serie è

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n e^{-nx}:$$

si tratta di una serie geometrica di ragione $e^{-x}(1+x)$;
osservato che

$$e^{-x}(1+x)<e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)=e^{-x}e^{x}=1 \quad \forall x>0,$$

la serie converge puntualmente in $]0,\infty]$. Poiché i termini della serie sono positivi, si ha anche convergenza assoluta in $]0,\infty[$.
Non si ha convergenza totale in $]0,\infty[$, poiché

$$\sup_{x>0}(1+x)^n e^{-nx}=1.$$

Tuttavia, per ogni $\delta>0$, essendo $(1+x)e^{-x}$ decrescente in $]0,\infty[$,

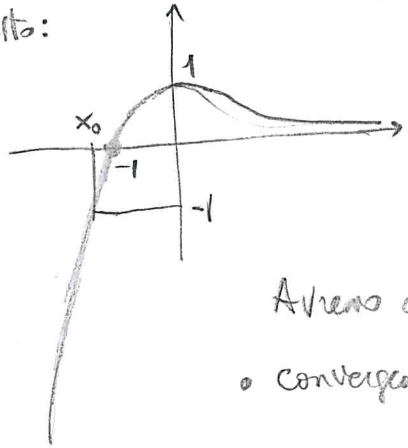
$$\sup_{x\geq\delta}(1+x)^n e^{-nx}=(1+\delta)^n e^{-n\delta}$$

e dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\geq\delta}(1+x)^n e^{-nx}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\delta)^n e^{-n\delta}<\infty.$$

Quindi c'è convergenza totale (ed uniforme) in ogni semiretta $[\delta,\infty[$.

Osservazione Meno semplice è il caso della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n e^{-nx} :$$
chiaramente, quando $x \geq 0$ non cambia nulla, mentre per $x<0$ bisogna analizzare meglio la quantità $(1+x)e^{-x}$: il suo grafico è questo:



dunque si ha $|1+x|e^{-x}<1$ se e solo se $x_0<x<0$ oppure $x>0$, ove x_0 è un opportuno valore strettamente <-1.

Avremo allora:

- convergenza puntuale e assoluta in $]x_0,0[\cup]0,\infty[$;
- convergenza totale e uniforme in $[x_0+\delta,-\delta] \cup [\delta,\infty[$ per ogni $\delta>0$ (piccolo).