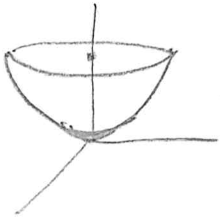
ANALISI 2 | ma 29/10/19 | (99)

<u>Esercizi</u>

1. Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3$ su $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$.



<u>Punti stazionari interni:</u>

$$\begin{cases} 3x^2=0 \\ -3y^2=0 \\ 3z^2=0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (0,0,0) \text{ (non interno)}.$$

Comunque $(0,0,0)$ sta sul bordo e vale come punto stazionario vincolato: $f(0,0,0)=0$, ma è peraltro un punto di sella ($f(0,0,\varepsilon)>0$, $f(0,\varepsilon,\varepsilon^2)<0$ per $\varepsilon>0$ piccolo).

<u>Parete laterale $z=x^2+y^2<1$</u>: la restrizione di $f$ a questa superficie è la funzione

$$g(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = x^3-y^3+(x^2+y^2)^3,$$

definita su $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$. Si ha $\nabla g = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 3x^2+6x(x^2+y^2)^2=0 \\ -3y^2+6y(x^2+y^2)^2=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 3x[x+2(x^2+y^2)^2]=0 \\ 3y[-y+2(x^2+y^2)^2]=0 \end{cases}.$$

Se $x=0$, $y=0$ si ha $z=0$ e si ritrova l'origine. Se $x=0$ e $y\neq0$, allora $-y+2y^4=0$ e quindi $y=2^{-1/3}$ $z=2^{-2/3}$. Dunque $(0,2^{-\frac{1}{3}},2^{-\frac{2}{3}})$ è punto stazionario vincolato. Se $x\neq0$ e $y=0$, si ha $x+2x^4=0$ e quindi $x=-2^{-\frac{1}{3}}$, $z=2^{-\frac{2}{3}}$ cioè $(-2^{-1/3},0,2^{-2/3})$ è punto stazionario vincolato.

Se $x,y$ sono $\neq 0$, si trova $y = 2(x^2+y^2)^2 = -x$ e quindi $y=8y^4=-x$, ossia

$y=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$. Perciò $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ è punto stazionario vincolato. Si ha

$$f\left(0,2^{-1/3},2^{-2/3}\right)=-\frac{1}{4},\quad f\left(-2^{-1/3},0,2^{-2/3}\right)=-\frac{1}{4},$$
$$f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$

<u>Tappo superiore</u> $x^2+y^2<z=1$: la restrizione di $f$ a questa superficie è

$$h(x,y)=x^3-y^3+1;$$

l'unico punto stazionario di $h$ è $(0,0)$, dunque $(0,0,1)$ è punto stazionario vincolato per $f$ con $f(0,0,1)=1$.

<u>Spigolo rotondo</u> $x^2+y^2=z=1$. La restrizione di $f$ a questa curva, scrivendo $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, è

$$k(t)=\cos^3 t-\sin^3 t+1,$$

e si ha

$$k'(t)=-3\cos^2 t\sin t-3\sin^2 t\cos t=0$$

$$\iff \cos t\sin t\,(\cos t+\sin t)=0 \iff$$

$$t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,$$

cui corrispondono i punti

$$(1,0,1),\ (0,1,1),\ (-1,0,1),\ (0,-1,1),\ \left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},1\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},1\right).$$

In tali punti si ha

$$f(1,0,1)=2,\quad f(0,1,1)=0,\quad f(-1,0,1)=0,\quad f(0,-1,1)=2,$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},1\right)=-\frac{1}{\sqrt2}+1,\quad f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},1\right)=\frac{1}{\sqrt2}+1.$$

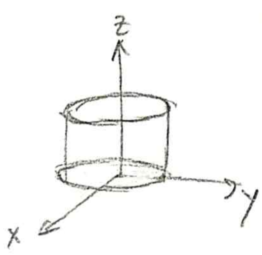
Confrontando tutto, si trova $\max f=2$, $\min f=-\frac{1}{4}$.

2. Trovare il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2 - z$$

sull'insieme

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le z \le 1\}.$$




L'insieme $C$ è un cilindro pieno. La $f$ non è differenziabile in $S = \{(x,y,z) : x=y=0, \ 0 \le z \le 1\}$.

a) Punti stazionari interni:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_z = 2z-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

ma questo punto sta in $S$, quindi non va considerato.

(b) Punti dove $f$ non è differenziabile: sono i punti di $S$, dove si ha

$$g(z) := f(0,0,z) = z^2 - z.$$

Poiché

$$g'(z) = 2z - 1 \ge 0 \iff \frac{1}{2} \le z \le 1,$$

$g$ è minima per $z = \frac{1}{2}$, dove $g(\frac{1}{2}) = f(0,0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, ed è massima agli estremi, con $g(0) = f(0,0,0) = 0$ e $g(1) = f(0,0,1) = 0$

(c) Superficie laterale: si ha $x^2+y^2=1$, $0<z<1$. Dunque

$$h(z) = f(x,y,z) = 1 + z^2 - z \quad \text{per } x^2+y^2=1.$$

Si ha

$$h'(z) = 0 \iff z = \frac{1}{2}.$$

In tutti questi punti, cioè $(x, y, \frac{1}{2})$ con $x^2+y^2=1$, si ha

$$h(z) = f(x,y,z) = \frac{3}{4}.$$

(d) Tappo inferiore $z=0$: si ha

$$k(x,y) = f(x,y,0) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ovviamente, $k$ è minima in $(0,0)$, dove vale $0$, ed è massima sulla circonferenza $x^2+y^2=1$, dove vale $1$.

(e) Tappo superiore $z=1$: si ha

$$j(x,y) = f(x,y,1) = \sqrt{x^2+y^2},$$

e valgono le stesse conclusioni.

(f) Spigoli circolari: lì si ha $x^2+y^2=1$ e $z=0$, oppure $x^2+y^2=1$ e $z=1$. Si ha, come già visto in (d),

$$f(x,y,0) = 1 \quad \text{per } x^2+y^2=1, \qquad f(x,y,1) = 1 \quad \text{per } x^2+y^2=1.$$

In conclusione

$$\max_C f = \max\left\{-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, 1\right\} = 1,$$

$$\min_C f = \min\left\{-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, 1\right\} = -\frac{1}{4}.$$

3. Trovare il massimo e il minimo di

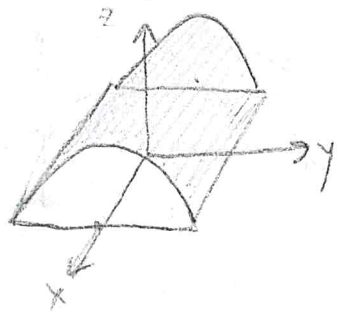
$$f(x,y,z) = z(2x-y^2)$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \le 2, |y| \le 1, 0 \le z \le 1-y^2\}.$$

(a) Punti stazionari interni:

$$\begin{cases} f_x = 2z = 0 \\ f_y = -2yz = 0 \\ f_z = 2x-y^2 = 0 \end{cases}$$




Poichè la prima equazione dà $z=0$, sicuramente non vi sono punti stazionari interni a D.

(b) Vertici: sono 4 punti nel piano $z=0$, dove $f$ è nulla.

(c) Faccia di base: siamo nel piano $z=0$, e $f$ è nulla

(d) Facce laterali: se $x=2$ si ha

$$h_1(y,z) = f(2,y,z) = z(4-y^2),$$

e

$$\begin{cases} h_y = -2yz = 0 \\ h_z = 4-y^2 = 0 \end{cases} \iff y = \pm 2,\ z=0,$$

ma i punti $(2, \pm 2, 0)$ non appartengono a D perchè $|y|>1$.

Se $x=-2$, analogamente,

$$h_2(y,z) = f(-2,y,z) = z(-4-y^2),$$

e

$$\begin{cases} h_y = -2yz = 0 \\ h_z = -4-y^2 = 0 \end{cases}$$ non ha soluzioni.

(e) Spigoli curvilinei $z = 1-y^2$, $|x| = 2$. Se $x=2$,

$$k_1(y) = f(2,y,1-y^2) = (1-y^2)(4-y^2),$$

$$k_1'(y) = -2y(4-y^2) - 2y(1-y^2) = -2y(5-2y^2) = 0$$

se e solo se $y=0$ oppure $y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Per $y=0$ si ha il punto $(2,0,1)$ dove

$$f(2,0,1) = 4,$$

mentre $|y| = \left|\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right| > 1$. Se $x=-2$,

$$k_2(y) := f(-2,y,1-y^2) = (1-y^2)(-4-y^2)$$

$$k_2'(y) = -2y(-4-y^2) - 2y(1-y^2) = -2y(-3-2y^2) = 0$$

se e solo se $y=0$: si ha così il punto $(-2,0,1)$ dove

$$f(-2,0,1) = -4.$$

In conclusione

$$\max_D f = \max\{0,4,-4\} = 4,$$

$$\min_D f = \min\{0,4,-4\} = -4.$$