Massimi e minimi vincolati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Se $K \subset A$ è un insieme chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass f assume massimo e minimo su K. Se uno di essi è assunto in un punto interno a K, sappiamo che in tale punto ∇f è nullo. Però può capitare che il massimo o il minimo di f cada in un punto appartenente alla frontiera ∂K di K, e in questo caso occorre sviluppare un metodo per determinare i punti di massimo e di minimo di f in un insieme chiuso, privo di parte interna.

Supporremo che ∂K sia espresso in uno dei due modi seguenti:

(A) in forma parametrica:

$$\partial K = \{ \underline{x} = \underline{v}(\underline{y}),\ \underline{y} \in D \}$$

dove D è la chiusura di un aperto di $\mathbb{R}^k$, $1 \le k < N$, mentre $\underline{v}: D \to \partial K$ è di classe C^1 con $D\underline{v}(\underline{y})$ di rango massimo k in ogni punto di D.

(B) come curva di livello:

$$\partial K = \{ \underline{x} \in A : \ \underline{g}(\underline{x}) = \underline{0} \},$$

con $\underline{g}: A \to \mathbb{R}^k$ $(1 \le k < N)$ di classe C^1 tale che $D\underline{g}(\underline{x})$ abbia rango massimo k in ogni $\underline{x} \in \partial K$.

Nei casi più semplici sarà $k=1$.

Esempi: (1) Sia K il disco di $\mathbb{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio 1. Allora

$$\partial K = \{(x,y) : x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]\},$$

e la funzione che parametrizza ∂K è $\underline{v}(t)=(\cos t, \sin t)$; ma anche

$$\partial K = \{(x,y) : x^2+y^2-1=0\}.$$

(2) Sia $K=[0,1]\times[0,1]$: allora ∂K è unione di quattro pezzi:

$$T_1=\{(t,0) : t\in]0,1[\},\quad T_2=\{(1,t) : t\in]0,1[\},$$

$$T_3=\{(t,1) : t\in]0,1[\},\quad T_4=\{(0,t) : t\in]0,1[\},$$

che sono tutti in forma parametrica, più i 4 vertici, da analizzare a parte.

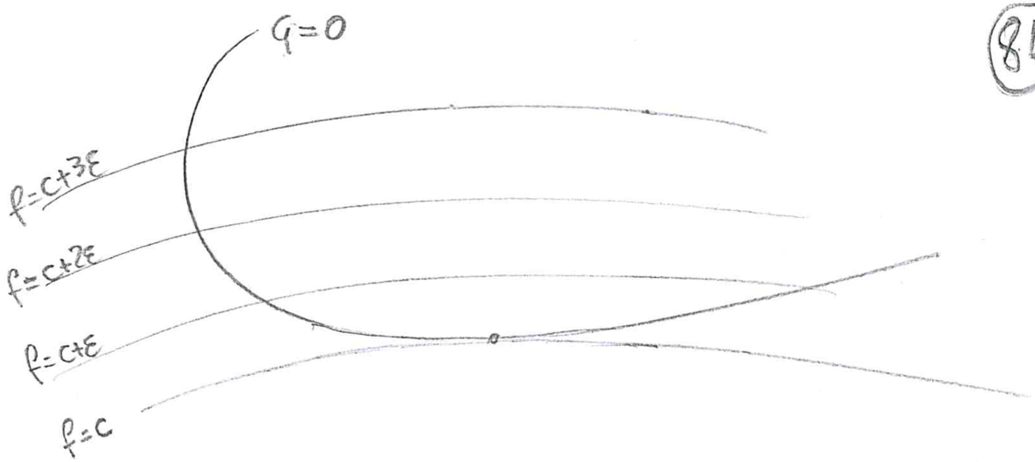
(3) Sia K il rombo di vertici $(\pm1,0)$ e $(0,\pm1)$: esso si può scrivere nella forma

$$K=\{(x,y) : |y|\le 1-|x|\},$$

e ∂K è la curva di livello

$$\partial K = \{(x,y) : |y|+|x|-1=0\},$$

Si noti che la funzione $\varphi(x,y)=|y|+|x|$ non è differenziabile nei punti dove uno dei due valori assoluti è nullo (i vertici del rombo). In tali punti sarà necessaria un'analisi a parte.



Nella figura qui sopra è illustrata l'idea seguente: supponiamo che ∂K sia la curva di livello 0 per la funzione g.

Se percorriamo ∂K, attraverseremo varie curve di livello di f. Non appena si tocca un punto che appartiene alla curva di livello minimo tra quelle che intersecano ∂K, vediamo che essa è tangente a ∂K nel punto. Naturalmente, lo stesso discorso vale per la curva di livello massimo. Ne segue che i punti di massimo e di minimo di f su ∂K vanno ricercati fra quelli dove la curva di livello di f è tangente a ∂K.

<u>Definizione</u> Un punto $\underline{x_0} \in \partial K$, nel quale la curva di livello di f (cui appartiene x_0) è tangente a ∂K, si dice <u>punto stazionario</u> <u>vincolato</u> di f su ∂K.

In effetti $\underline{x_0}$ non è un punto stazionario per f, ma solo per la restrizione di f a ∂K, ciò che appunto costituisce un "vincolo".

In conclusione, i punti di massimo e di minimo di f su ∂K vanno ricercati fra i punti stazionari vincolati.
A questo scopo disponiamo di due ricette, una per il caso (A) e una per il caso (B).

<u>Teorema</u> [caso (A)]. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia inoltre K un sottoinsieme chiuso e limitato di A, con

$$\partial K = \{ \underline{x} \in A : \; \underline{x} = \underline{v}(\underline{y}),\; y \in D \},$$

ove D è la chiusura di un aperto $B \subseteq \mathbb{R}^k$ $(k<N)$ e $\underline{v}: D \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1 e tale che $Dv(\underline{y})$ abbia rango massimo k in ogni $\underline{y} \in B$.
Se $\underline{x}_0 = \underline{v}(\underline{y}_0) \in \partial K$, con $\underline{y}_0 \in B$, è punto di massimo o di minimo per f su ∂K, allora $\underline{x}_0$ è punto stazionario vincolato per f su ∂K e, in particolare,

$$< \nabla f(\underline{x}_0), \frac{\partial \underline{v}}{\partial y_j}(\underline{y}_0) >_N = 0 \quad \forall j = 1 \dots k.$$

<u>dim</u>. La funzione composta $f(\underline{v}(\underline{y})) : D \to \mathbb{R}$ ha un massimo o un minimo in $\underline{y}_0 \in B$, quindi ha gradiente nullo in tale punto. Dunque

$$0 = D_j f(\underline{v}(\underline{y}_0)) = < \nabla f(\underline{x}_0), D_j \underline{v}(\underline{y}_0) >_N \quad \forall j = 1 \dots k.$$

Per il teorema del rango, i vettori $D_1 \underline{v}(\underline{y}_0), \dots, D_k \underline{v}(\underline{y}_0)$ sono tangenti a $\underline{v}(D) = \partial K$. Ne segue che $\nabla f(\underline{x}_0)$ è perpendicolare a ∂K in $\underline{x}_0$, ossia la curva di livello $f(\underline{x}_0)$ della f è tangente a ∂K. Perciò $\underline{x}_0$ è punto stazionario vincolato per f su K. □

Teorema [caso (b)]. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia inoltre K un sottoinsieme chiuso e limitato di A, con

$$\partial K = \{ \underline{x} \in A : \ \underline{G}(\underline{x}) = \underline{0} \},$$

ove $\underline{G}: A \to \mathbb{R}^k$ $(k<N)$ è una funzione di classe C^1 tale che $D\underline{G}(\underline{x})$ abbia rango massimo k in ogni $\underline{x} \in \partial K$. Sia $\underline{x}_0 \in \partial K$. Allora x_0 è punto stazionario vincolato per f su K se e solo se esiste $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(\underline{x}_0) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla G_j(\underline{x}_0) = \underline{0} \in \mathbb{R}^N, \\ \underline{G}(\underline{x}_0) = \underline{0} \in \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

<u>Osservazione</u> I numeri $\lambda_1 \dots \lambda_k$ si chiamano <u>moltiplicatori di Lagrange</u>, e la funzione

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j(\underline{x})$$

si chiama <u>Lagrangiana</u>: si noti che il sistema sopra scritto esprime esattamente l'annullarsi di $\nabla L(\underline{x}_0, \underline{\lambda})$. Dunque $\underline{x}_0$ è un punto stazionario vincolato per f su ∂K se e solo se esiste $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ tale che $(\underline{x}_0, \underline{\lambda})$ è punto stazionario <u>libero</u> per L su $A \times \mathbb{R}^k$.

<u>dim del teorema</u> Se $\underline{x}_0$ è punto stazionario vincolato per f su K,

allora la curva di livello $f(\underline{x_0})$ è tangente a ∂K in x_0.
Ma $\nabla f(\underline{x_0})$ è perpendicolare a tale curva di livello, mentre ciascun vettore $\nabla G_1(\underline{x_0}), \dots, \nabla G_k(\underline{x_0})$ è perpendicolare a ∂K in $\underline{x_0}$.
Dunque $\nabla f(\underline{x_0})$ è combinazione lineare di $\nabla G_1(\underline{x_0}), \dots, \nabla G_k(\underline{x_0})$, ossia vale la 1ª equazione del sistema per un opportuno $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^k$.
Inoltre, ovviamente, $\underline{G}(\underline{x_0}) = \underline{0}$ e quindi vale la 2ª equazione del sistema.
Viceversa, se $(\underline{x_0}, \underline{\lambda})$ verifica il sistema, allora $\underline{x_0} \in \partial K$ e $\nabla f(\underline{x_0})$, essendo combinazione lineare di $\nabla G_1(\underline{x_0}), \dots, \nabla G_k(\underline{x_0})$, è perpendicolare a ∂K. Dunque la curva di livello $f(\underline{x_0})$ è tangente a ∂K in $\underline{x_0}$, ossia $\underline{x_0}$ è punto stazionario vincolato per f su ∂K. □

<u>Esempi</u> (1) Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 + 5y$: cerchiamo il massimo ed il minimo di f su

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Cominciamo cercando eventuali punti stazionari interni a K, cioè tali che $x^2+y^2<1$. Si ha $\nabla f(x,y) = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -6y+5=0, \end{cases}$$

cioè se e solo se $(x,y) = (0, \frac{5}{6})$. Questo è l'unico punto stazionario interno, e si ha

$$f\left(0, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{12}.$$

Vediamo cosa succede su $\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

Poiché

$$K = \{(x,y) : x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\},$$

dobbiamo considerare la restrizione di f a K che prende la forma

$$h(t) := f(\cos t, \sin t) = 2\cos^2 t - 3\sin^2 t + 5\sin t;$$

si ha

$$h'(t) = 0 \iff -10 \sin t \cos t + 5 \cos t = 0:$$

dunque deve aversi

$$\cos t = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sin t = \frac{1}{2}.$$

Si ottengono così i punti $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$, che corrispondono a

$$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,1), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,-1).$$ Si ha

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4},\quad f(0,1) = 2,\quad f(0,-1) = -8.$$

Confrontando i valori, si trova

$$\min_K f = f(0,-1) = -8, \qquad \max_K f = f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}.$$

(2) Continuiamo a esaminare lo stesso esempio, usando stavolta il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si ha

$$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

e dunque

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 - 3y^2 + 5y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Si ha $\nabla L = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} 4x - 2\lambda x = 0 \\ -6y + 5 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ci dice che $x=0$ oppure $\lambda = 2$. Se $x=0$, la terza equazione dà $y = \pm 1$ e la seconda ci fornisce i corrispondenti valori di λ: $\lambda = -\frac{1}{2}$ quando $y=1$, $\lambda = -\frac{11}{2}$ quando $y=-1$. Se invece $\lambda = 2$, la seconda equazione ci dà $y = \frac{1}{2}$ e dalla terza segue $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Abbiamo così ritrovato i quattro punti stazionari vincolati

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0,-1).$$

3) Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^2 e^{y+z}$; vogliamo vedere se essa ha massimo o minimo sull'insieme illimitato

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+z=0, \ y+x=0\}.$$

L'insieme K è una retta, parametrizzabile facilmente:

$$x = x, \quad y = -x, \quad z = -x.$$

Lungo tale retta si ha

$$h(x) := f(x,-x,-x) = x^2 e^{-2x},$$

dunque

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

Poiché

$$h'(x) = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x e^{-2x}(1-x),$$

si ha

$$h'(x)=0 \iff x=0 \text{ oppure } x=1,$$

quindi i punti stazionari vincolati di f su K sono

$$(0,0,0) \quad \text{con } f(0,0,0)=h(0)=0,$$
$$(1,-1,-1) \quad \text{con } f(1,-1,-1)=h(1)=e^{-2}.$$

Perciò

$$\inf_K f = \min_K f = f(0,0,0)=0, \quad \sup_K f = +\infty.$$

Avremmo potuto utilizzare il metodo dei moltiplicatori: avendo 2 vincoli, la Lagrangiana è

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)= x^2e^{y+z} - \lambda(x+z) - \mu(y+x);$$

si ha $\nabla L = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 2xe^{y+z}-\lambda-\mu=0 \\ x^2e^{y+z}-\mu=0 \\ x^2e^{y+z}-\lambda=0 \\ x+z=0 \\ y+x=0. \end{cases}$$

Dalla 2ª e 3ª equazione segue $\lambda=\mu=x^2e^{y+z}$; dalla 1ª ricaviamo

$$2x^2e^{y+z}=\lambda+\mu= 2xe^{y+z}.$$

Ne segue $x=0$, oppure $x=1$. Dalla 4ª e 5ª equazione segue che i punti stazionari vincolati sono $(0,0,0)$ e $(1,-1,-1)$.