Esercizi sul teorema del Dini

1. Sia
$$F(x,y)= e^{x^2 y} - \frac{x^2}{4} + y^3 + y + x - 1 .$$

(i) Posto $Z = \{(x,y) : F(x,y)=0\}$, si verifichi che $(0,0) \in Z$ e si mostri che esiste una funzione implicita g, di classe C^∞, tale che $F(x, g(x)) = 0$ in un intorno di 0.

(ii) Si provi che g ha un'estensione a tutto $\mathbb{R}$, tale che per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

(iii) Si provi che

(a) g è convessa e decrescente in un intorno di 0,

(b) $g(x) \le 0 \iff 0 \le x \le 4$;

(c) $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$.

2. Sia
$$F(x,y) = xy^2 + e^{x+y}.$$

(i) Si provi che per ogni $y \ne 0$ l'equazione $F(x,y)=0$ è risolta da un unico $x \in \mathbb{R}$, e che pertanto è definita una $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che $F(g(y), y) = 0$ per ogni $y \ne 0$.

(ii) Si dimostri che $g(y)<0$ per ogni $y\neq 0$.

(iii) Si calcolino

$$\lim_{y\to+\infty} g(y),\quad \lim_{y\to-\infty} g(y),\quad \lim_{y\to 0^+} g(y),\quad \lim_{y\to 0^-} g(y).$$

3. Sia $\underline{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} z^2+xy-1 \\ x^2+yz+1 \end{pmatrix}.$$

(i) Posto $Z=\{(x,y,z):\ \underline{F}(x,y,z)=\underline{0}\}$, si verifichi che $(0,-1,1)\in Z$ e che esiste un intorno U di tale punto, tale che $Z\cap U$ è grafico di una funzione $\underline{g}\in C^\infty$:

$$Z\cap U=\{(x,g_1(x),g_2(x)),\ x\in[-\delta,\delta]\}.$$

(ii) Si determini la retta tangente a Z in $(0,-1,1)$;

(iii) Si scrivano i polinomi di Taylor di g_1 e g_2, di centro 0 e grado 2

Risoluzione

1. Ovviamente $F(0,0)=0$. Inoltre

$$F_y(x,y)=x^2e^{x^2y}+3y^2+1\geq 1\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

quindi il teorema del Dini ci dice che esiste $\delta>0$ ed esiste $g:[-\delta,\delta]\to\mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

$$F(x,g(x))=e^{x^2g(x)}-\frac{x^2}{4}+g(x)^3+g(x)+x-1=0\quad \forall x\in[-\delta,\delta].$$

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, come si è visto,

$$F_y(x,y) > 1,$$

dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto F(x,y)$ è strettamente crescente, con

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = -\infty.$$

Perciò, per il teorema degli zeri e per stretta monotonia, vi è un unico numero $g(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x,g(x)) = 0.$$

Ma, applicando il teorema del Dini in $(x_0, g(x_0))$, esiste $\delta > 0$ ed esiste $\tilde{g} \in C^\infty[x_0-\delta, x_0+\delta]$ tale che

$$F(x, \tilde{g}(x)) = 0 \quad \text{in } [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

Per unicità deve aversi $g(x) = \tilde{g}(x)$ in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, dunque $g(x)$ è di classe C^∞ in ogni $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, e quindi in $\mathbb{R}$.
Tale g è l'estensione cercata.

(iii) Conosciamo già $F_y(x,y) = x^2 e^{x^2 y} + 3y^2 + 1$. Calcoliamo

$$F_x(x,y) = 2xy\,e^{x^2 y} - \frac{x}{2} + 1;$$

$$F_{xx}(x,y) = 2y\,e^{x^2 y} + 4x^2 y\,e^{x^2 y} - \frac{1}{2}$$

$$F_{xy}(x,y) = 2x\,e^{x^2 y} + 2x^3 e^{x^2 y}$$

$$F_{yy}(x,y) = x^4 e^{x^2 y} + 6y.$$

Calcolando in $(0,0)$ si ha

$$F_x(0,0)=1, \quad F_y(0,0)=1,$$

$$F_{xx}(0,0)=-\frac{1}{2}, \quad F_{xy}(0,0)=0, \quad F_{yy}(0,0)=0.$$

Ne segue in particolare $g'(0)=-\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)}=-1$. Poi,

$$0=\frac{d^2}{dx^2}F(x,g(x))=\frac{d}{dx}\left[F_x+F_y g'\right]=$$

$$=F_{xx}+F_{xy}g'+F_{yx}g'+F_{yy}(g')^2+F_y g'',$$

e calcolando in $(0,0)$

$$0=-\frac{1}{2}+g''(0),$$

ossia $g''(0)=\frac{1}{2}$. Per continuità, esiste $\eta>0$ tale che

$$g'(x)<0 \quad e \quad g''(x)>0 \quad \text{in } [-\eta,\eta],$$

ossia g è decrescente e convessa in $[-\eta,\eta]$.

Poi, notiamo che

$$F(x,0)=1-\frac{x^2}{4}+x-1=x-\frac{x^2}{4}.$$

Essendo

$$x-\frac{x^2}{4}=x\left(1-\frac{x}{4}\right)>0 \iff 0<x<4,$$

vediamo che per $0<x<4$ si ha $F(x,0)>0$; dunque il valore $g(x)$, nel quale $F(x,\cdot)$ si annulla, deve essere negativo. Al contrario, se $x<0$ oppure $x>4$, si ha $F(x,0)<0$, e quindi $g(x)$ deve essere positivo. In definitiva

$$g(x) < 0 \iff 0 < x < 4$$
$$g(x) > 0 \iff x < 0 \text{ oppure } x > 4$$

(ed infatti $F(4,0) = 0$, da cui $g(4) = 0$).

Infine, essendo $x \notin [0,4]$ quando $x \to \pm\infty$,

$$e^{x^2 g(x)} \leq e^{x^2 g(x)} + g(x)^3 + g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}(x-2)^2,$$

da cui

$$x^2 g(x) \leq \ln\left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right],$$

$$g(x) \leq \frac{1}{x^2} \ln\left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right]$$

ed infine

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0.$$

2. (i) Si ha $F_x(x,y) = y^2 + e^{x+y} > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $F(\cdot, y)$ è strettamente crescente. Inoltre se $y \neq 0$ risulta

$$\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = +\infty$$

(non così quando $y = 0$: in tal caso $F(x,0) = e^x \to 0^+$ per $x \to -\infty$, quindi $F(x,0)$ non si annulla mai).

Pertanto per ogni $y \neq 0$ esiste un unico $g(y) \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(g(y), y) = g(y)y^2 + e^{g(y)+y} = 0 \quad \forall y \neq 0.$$

La g è di classe C^∞ perchè nell'intorno di ogni punto $(g(y), y)$

essa è definita tramite il teorema del Dini.

ii) Se $y \neq 0$ si ha $F(0,y) = e^y > 0$, quindi $g(y)$, dove F è nulla, deve essere negativo.

iii) Riscriviamo l'equazione $F(g(y), y) = 0$ nella forma

$$g(y) e^{-g(y)} + \frac{e^y}{y^2} = 0,$$

ovvero, essendo $g < 0$,

$$|g(y)| e^{|g(y)|} = \frac{e^y}{y^2}.$$

Si ha allora

$$\lim_{y \to +\infty} |g(y)| e^{|g(y)|} = +\infty,$$

$$\lim_{y \to -\infty} |g(y)| e^{|g(y)|} = 0,$$

$$\lim_{y \to 0^+} |g(y)| e^{|g(y)|} = +\infty,$$

$$\lim_{y \to 0^-} |g(y)| e^{|g(y)|} = +\infty.$$

Dato che la funzione $|t| e^{|t|}$ tende a $+\infty$ solo quando $|t| \to +\infty$, e tende a 0 solo quando $|t| \to 0$, otteniamo (essendo $g < 0$)

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = -\infty, \quad \lim_{y \to -\infty} g(y) = 0, \quad \lim_{y \to 0^\pm} g(y) = -\infty.$$

3. (i) È chiaro che $\underline{F}(0,-1,1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Inoltre

$$D\underline{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & z & y \end{pmatrix},$$

$$D\underline{F}(0,-1,1)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=-2\neq 0.$$

Quindi c'è un intorno U di $(0,-1,1)$ tale che $Z\cap U$ è grafico di una funzione $\underline{g}(x)$: ossia, esiste $\delta>0$ tale che

$$Z\cap U=\{(x,\underline{g}(x)) : x\in[-\delta,\delta]\}.$$

Essendo $\underline{F}\in C^\infty$ si ha $\underline{g}\in C^\infty$. Si ha $\underline{g}(0)=(-1,1)$ e

$$\underline{g}'(x)=-\begin{pmatrix} x & 2g_2(x) \\ g_2(x) & g_1(x) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} g_1(x) \\ 2x \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x & 2g_2(x) \\ g_2(x) & g_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} g_1(x) \\ 2x \end{pmatrix}$$

cioè

$$\circledast \quad \begin{cases} x g_1'(x)+2g_2(x)g_2'(x)=-g_1(x) \\ g_2(x)g_1'(x)+g_1(x)g_2'(x)=-2x. \end{cases}$$

Per $x=0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2g_2'(0)=1 \\ g_1'(0)-g_2'(0)=0 \end{cases}$$

ossia

$$g_1'(0) = g_2'(0) = \frac{1}{2}.$$

La retta tangente a $Z \cap U$ nel punto $(0,-1,1)$ è allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + \frac{t}{2} \\ z = 1 + \frac{t}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Più canonicamente, la retta si scrive come

$$D\underline{F}(0,-1,1) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè come intersezione dei due piani

$$\begin{cases} -x + 2z = 2 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

(iii) Deriviamo (*):

$$\begin{cases} g_1'(x) + x g_1''(x) + 2[g_2'(x)]^2 + 2 g_2(x) g_2''(x) = -g_1'(x) \\ g_2'(x) g_1'(x) + g_2(x) g_1''(x) + g_1'(x) g_2'(x) + g_1(x) g_2''(x) = -2; \end{cases}$$

per $x=0$ troviamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 g_2''(0) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} + g_1''(0) + \frac{1}{4} - g_2''(0) = -2,$$

da cui

$$g_2''(0) = -\frac{3}{4}, \quad g_1''(0) = -\frac{13}{4}.$$

Ne segue, detti P_1 e P_2 i polinomi di Taylor di g_1 e g_2,

$$P_1(x) = -1 + \frac{1}{2}x - \frac{13}{8}x^2, \quad P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2.$$

Osservazione finale: se $\underline{g}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ è di classe C^1, e

$$G = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x})\},$$

allora nel generico punto $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ il grafico G è dotato di piano tangente p-dimensionale, descritto dalle equazioni

$$(*) \qquad \underline{y} = \underline{y}_0 + D\underline{g}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0), \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Ciò è conseguenza della relazione di differenziabilità di $\underline{g}$ in $\underline{x}_0$:

$$\underline{g}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x}_0) = D\underline{g}(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|_p) \quad \text{per } \underline{x} \to \underline{x}_0,$$

analogamente a quanto accade quando $p = q = 1$, nel qual caso $(*)$ fornisce l'equazione della retta tangente