Se $f$ è differenziabile in $A$, se $\underline{x}_0 \in A$ e se $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ con $|\underline{v}|_N = 1$, ricordiamo che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)\right| = \left|\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle_N\right| \leq |\nabla f(\underline{x}_0)|_N \, |\underline{v}|_N = |\nabla f(\underline{x}_0)|_N$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ e $\underline{v} = \dfrac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}$.

Perciò, nei punti $\underline{x}_0$ dove $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$, la direzione determinata da $\nabla f(\underline{x}_0)$ è quella di <u>massima pendenza</u>.

Poi, se $f$ è di classe $C^k$ in $A$, allora per ogni $\underline{x}_0 \in A$ esiste un unico polinomio $P_{\underline{x}_0}(\underline{x})$, di grado $\leq k$, tale che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - P_{\underline{x}_0}(\underline{x})}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N^k} = 0,$$

e si ha la <u>formula di Taylor</u>

$$P_{\underline{x}_0}(\underline{x}) = \sum_{|p| \leq k} \frac{D^p f(\underline{x}_0)}{p!} (\underline{x} - \underline{x}_0)^p,$$

dove $p$ è un <u>multi-indice</u> $(p_1 \dots p_N)$ con $p_j \in \mathbb{N}$ per $j = 1 \dots N$,

$$|p| = \sum_{j=1}^N p_j, \quad p! = \prod_{j=1}^N p_j!, \quad (\underline{x} - \underline{x}_0)^p = \prod_{j=1}^N (x_j - x_j^0)^{p_j},$$

$$D^p f(\underline{x}_0) = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}}(\underline{x}_0).$$

Ad esempio, se $N = 2$ e $k = 2$,

$$P_{\underline{x}_0}(\underline{x}) = P_{\underline{x}_0}(x, y) =$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2.$$

## TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (o del Dini)

Teo. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $F \in C^1(A)$. Posto

$$Z = \{(x,y) \in A : F(x,y) = 0\},$$

sia $(x_0,y_0) \in Z$. Se $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$, supponiamo ad esempio che sia $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, allora esistono un intorno $U$ di $x_0$, un intorno $V$ di $y_0$ ed una funzione $g: U \to V$, di classe $C^1$, tale che

$$\begin{cases} (x,y) \in U \times V \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \{ y = g(x),\ x \in U.$$

(Dunque $Z \cap (U \times V)$ è grafico della funzione $g$). Inoltre

$$g'(x) = -\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))} \quad \forall x \in U.$$

Osservazioni (1) Se si ha $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$, esistono un intorno $U$ di $x_0$, un intorno $V$ di $y_0$ ed una funzione $h: V \to U$, di classe $C^1$, tale che

$(x,y) \in U \times V$ e $F(x,y) = 0 \iff x = h(y),\ y \in V$

e si ha
$$h'(y) = -\frac{F_y(h(y),y)}{F_x(h(y),y)} \quad \forall y \in V.$$

2) Se tutte e 2 le componenti di $\nabla F(x_0,y_0)$ sono non nulle, allora le due funzioni $g(x)$, $h(y)$ sono una l'inversa dell'altra: $g = h^{-1}$.

3) Quando $F_y(x_0,y_0) \neq 0$, la retta tangente a $Z$ in $(x_0,y_0)$ è (poiché $y_0 = g(x_0)$)
$$y = y_0 + g'(x_0)(x-x_0)$$
cioè
$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$
cioè
$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$
Alla stessa equazione si arriva quando $F_x(x_0,y_0) \neq 0$, perché si ha
$$x = x_0 + h'(y_0)(y-y_0)$$
cioè
$$x - x_0 = -\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(y-y_0)$$
cioè ancora
$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) = 0.$$
Si vede quindi che $\nabla F(x_0,y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello $Z$.

(4) Se $Z = \{(x,y) \in A : F(x,y) = c\}$, ci si riconduce al caso precedente

considerando $G(x,y) := F(x,y) - c$.

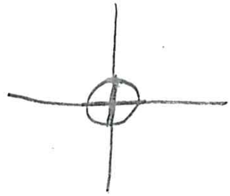
5) Se $\nabla F(x_0,y_0) = (0,0)$ il teorema del Dini non è applicabile. Può darsi che la retta tangente a $Z$ esista lo stesso [per esempio, scrivendo

$$Z = \{(x,y) \in A : F(x,y)^2 = 0\}$$

si ha certamente

$$\nabla F^2(x,y) = 2F(x,y)\,\nabla F(x,y) = (0,0) \text{ in } Z,$$

anche se era $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$], ma è facile invece trovare esempi in cui $Z$ non è un grafico.



Esempio: se $F(x,y) = xy$, allora

$$(0,0) \in Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\},$$

ma per nessun intorno $U \times V$ di $(0,0)$ l'insieme $(U \times V) \cap Z$ è un grafico! E infatti

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x,$$

per cui $F_x(0,0) = 0$, $F_y(0,0) = 0$.

(6) Se $F \in C^k$, allora anche la funzione implicita (se esiste) è di classe $C^k$. Infatti vale

$$g'(x) = -\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))} \qquad \forall x \in U,$$

da cui: se $F \in C^2$, $\Rightarrow F_x, F_y \in C^1$, $g \in C^1 \Rightarrow g' \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$;

quindi se $F \in C^3$, $\Rightarrow F_x, F_y \in C^2$, $g \in C^2 \Rightarrow g' \in C^2$, $\Rightarrow g \in C^3$. E così si va fino a $k$.

<u>Esercizio</u>: sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y>0\}$, sia

$$F(x,y) = y^3 + \ln(x+y) - xy ;$$

dimostrare che, in un intorno di $(1,0)$ l'insieme $\{F(x,y)=0\}$ è grafico di una $g \in C^\infty$. Chi è il polinomio di Taylor di $g$ di centro $0$ e grado $2$?

<u>Risoluzione</u>: si ha $F(1,0)=0$ e

$$F_x(x,y) = \frac{1}{x+y} - y, \qquad F_y(x,y) = 3y^2 + \frac{1}{x+y} - x,$$

$$F_x(1,0) = 1, \qquad F_y(1,0) = 1-1=0.$$

Allora vi è una funzione $x = g(y)$, definita in un intorno $V$ di $y=0$, tale che $g(0)=1$ e $y^3 + \ln(g(y)+y) - g(y)y = 0$ in $V$. Si ha

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y),y)}{F_x(g(y),y)} = -\frac{3y^2 + \frac{1}{g(y)+y} - g(y)}{\frac{1}{g(y)+y} - y}$$

Poiché $F \in C^\infty$, si ha $g \in C^\infty$ con $g'(0)=0$. Derivando $g'$, si ha

$$g''(y) = \frac{\left(6y - \frac{g'(y)+1}{(g(y)+y)^2} - g'(y)\right)\left(\frac{1}{g(y)+y} - y\right) - \left(3y^2 + \frac{1}{g(y)+y} - g(y)\right)\left(-\frac{g'(y)+1}{(g(y)+y)^2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{g(y)+y} - y\right)^2},$$

e $g''(0) = -1+2=1$. Dunque il polinomio è $g(0)+g'(0)y+\frac{1}{2}g''(0)y^2 = 1+\frac{y^2}{2}$.

## Dimostrazione del teorema del Dini, caso N=2

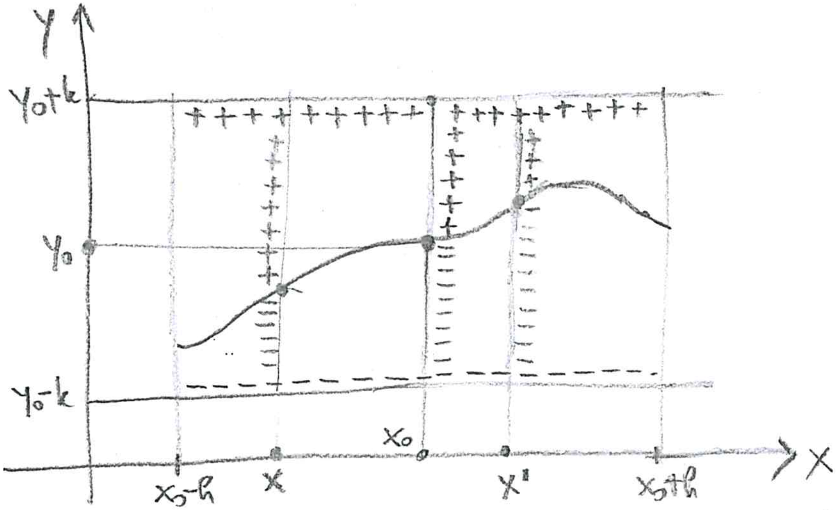
Sia $(x_0,y_0)\in A$ tale che

$$F(x_0,y_0)=0, \quad F_y(x_0,y_0)\neq 0;$$

scambiando casomai $F$ con $-F$, possiamo supporre che

$$F_y(x_0,y_0)>0.$$

Per continuità di $F_y$, esiste un intorno $W=U_0\times V$ di $(x_0,y_0)$, chiuso, tale che $F_y(x,y)>0 \ \forall (x,y)\in W$. Sarà $V=[y_0-k, y_0+k]$.




Poichè $y\mapsto F(x_0,y)$ è strettamente crescente, e $F(x_0,y_0)=0$, sarà

$$F(x_0,y)<0 \ \forall y\in[y_0-k, y_0[, \quad F(x_0,y)>0 \ \forall y\in]y_0,y_0+k].$$

Per permanenza del segno, esiste $U=[x_0-h, x_0+h]\subseteq U_0$ tale che $F(x, y_0+k)>0 \ \forall x\in U, \quad F(x,y_0-k)<0 \ \forall x\in U.$

Allora per ogni $x \in U$ si ha

$$F(x, y_0-k) < 0, \quad F(x, y_0+k) > 0,$$

e per stretta crescenza, per ogni $x \in U$ esiste un unico $y \in V$ tale che $F(x,y)=0$. Denominiamo tale $y$ con $g(x)$. Così si è definita una $g: U \to V$, che per costruzione verifica

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Questa è la "funzione implicita" definita dall'equazione $F(x,y)=0$ nell'intorno di $(x_0, y_0)$. Proviamo che $g$ è continua (passo essenziale per arrivare a provare che $g \in C^1$).
Siano $x, x' \in U$: il segmento di estremi $(x, g(x))$, $(x', g(x'))$ è dato dai punti

$$(x + t(x'-x),\ g(x) + t(g(x') - g(x))), \quad t \in [0,1],$$

ed è contenuto in $U \times V$. Si ha $F(x, g(x)) = F(x', g(x')) = 0$; poniamo

$$G(t) = F\left(x + t(x'-x),\ g(x) + t(g(x') - g(x)\right),\ t \in [0,1].$$

La $G$ è di classe $C^1$, perché tale è $F$, e $G(0) = G(1) = 0$.
Per il teorema di Rolle, $\exists\ \xi \in ]0,1[$ tale che

$$0 = G(1) - G(0) = G'(\xi)$$

Ma

$$G'(\xi) = F_x(x + \xi(x'-x), g(x) + \xi(g(x') - g(x))) \cdot (x'-x) +$$
$$+ F_y(x + \xi(x'-x), g(x) + \xi(g(x') - g(x))) \cdot (g(x') - g(x)).$$

Dunque, posto $(\xi_s, \eta_s) = (x+s(x'-x), g(x)+s(g(x')-g(x)))$, si ha

$$0 = F_x(\xi_s,\eta_s)(x-x') + F_y(\xi_s,\eta_s)(g(x)-g(x')),$$

da cui

$$g(x)-g(x') = -\frac{F_x(\xi_s,\eta_s)}{F_y(\xi_s,\eta_s)}(x-x'). \qquad (*)$$

Poniamo

$$M = \max_{(x,y)\in U\times V} |F_x(x,y)|, \quad m = \min_{(x,y)\in U\times V} F_y(x,y);$$

allora

$$|g(x)-g(x')| \leq \frac{M}{m}|x-x'| \qquad \forall x,x' \in U.$$

Perciò $g$ è continua, anzi lipschitziana in $U$. Tornando a $(*)$, otteniamo per $x \neq x'$

$$\frac{g(x)-g(x')}{x-x'} = -\frac{F_x(\xi_s,\eta_s)}{F_y(\xi_s,\eta_s)}$$

Grazie alla continuità di $g$, per $x \to x'$ si ha

$$\xi_s = x+s(x'-x) \to x'$$
$$\eta_s = g(x)+s(g(x')-g(x)) \to g(x')$$

e quindi

$$\exists\, g'(x') = -\frac{F_x(x',g(x'))}{F_y(x',g(x'))} \qquad \forall x' \in U,$$

ed essendo $F_x, F_y, g$ continue si conclude che $g \in C^1$. □