Sistemi lineari: A matrice $N\times N$ di funzioni continue; $\underline{f}$ continua.

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t) + \underline{f}(t), & t\in I \\ \underline{u}(t_0) = \underline{x} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Come per le equazioni lineari, detto V_f l'insieme delle soluzioni, si ha:

$\underline{u}, \underline{v} \in V_f \Rightarrow \underline{u}-\underline{v} \in V_0$, $\quad \underline{u}\in V_0, \underline{v}\in V_f \Rightarrow \underline{u}+\underline{v}\in V_f$,

da cui, se $\underline{v}$ è un fissato elemento di V_f, segue che $V_f = \{\underline{u}+\underline{v} : \underline{u}\in V_0\}$.

Inoltre V_0 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, di dimensione N. Infatti vi è un'applicazione lineare $L: \mathbb{C}^N \to V_0$ così definita:

$$L(\underline{x}) = \underline{u}(\cdot), \text{ la soluzione di } \begin{cases} \underline{u}'(\cdot) - A(\cdot)\underline{u}(\cdot) = 0 \\ \underline{u}(t_0) = \underline{x}. \end{cases}$$

È facile verificare che L è lineare; inoltre L è iniettiva, perché $L(\underline{x}) = \underline{0}(\cdot)$ implica ovviamente che $\underline{x}$, il valore in t_0 della funzione $\underline{0}$, è nullo; L è anche surgettiva, perché se $\underline{v}\in C^1(I)$, posto $\underline{x} = \underline{v}(t_0)$ si ha $L(\underline{x}) = \underline{v}(\cdot)$. Dunque L è un isomorfismo fra $\mathbb{C}^N$ e V_0, e pertanto $\dim V_0 = \dim \mathbb{C}^N = N$.

Una qualunque base $\{\underline{u}_1(\cdot), \dots, \underline{u}_N(\cdot)\}$ di V_0 è detta <u>sistema fondamentale di soluzioni</u> (del sistema omogeneo, cioè con $\underline{f}(\cdot) = \underline{0}$).

La matrice $W(t) = (\underline{u}_1(t) | \dots | \underline{u}_N(t))$ è detta <u>matrice Wronskiana</u> (dal matematico Wronski) associata a tale sistema fondamentale.

<u>Proprietà della matrice Wronskiana:</u> se $\underline{u}_1(\cdot), \dots, \underline{u}_N(\cdot) \in \mathcal{V}$, sono fatti equivalenti:

(i) $\{\underline{u}_1(\cdot), \dots, \underline{u}_N(\cdot)\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni;

(ii) $\exists\, t_0 \in I$ tale che $\det W(t_0) \neq 0$;

(iii) $\det W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

<u>dim.</u> (i) $\Rightarrow$ (iii) Per assurdo, se $\det W(t_0) = 0$ per un certo $t_0 \in I$, allora i vettori $\{\underline{u}_1(t_0), \dots, \underline{u}_N(t_0)\}$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{C}^N$, ossia esistono $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, non tutti nulli, tali che

$$c_1 \underline{u}_1(t_0) + \dots + c_N \underline{u}_N(t_0) = \underline{0}.$$

Ma allora la funzione $\underline{v} = c_1 \underline{u}_1 + \dots + c_N \underline{u}_N$, per unicità, è nulla (risolve $\begin{cases} \underline{v}' = A(\cdot)\underline{v}(\cdot) \\ \underline{v}(t_0) = \underline{0} \end{cases}$ al pari della funzione nulla).

Perciò $c_1 \underline{u}_1(\cdot) + \dots + c_N \underline{u}_N(\cdot) = \underline{0}$, il che contraddice l'ipotesi che $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_N\}$ sia un sistema fondamentale di soluzioni.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Evidente

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_N\}$ non fossero linearmente indipendenti esisterebbero $c_1, \dots c_N \in \mathbb{C}$, non tutti nulli, tali che

$$c_1 \underline{u}_1 + \dots + c_N \underline{u}_N \equiv \underline{0} \quad \text{in } I.$$

Calcolando in t_0, si ottiene

$$c_1 \underline{u}_1(t_0) + \dots + c_N \underline{u}_N(t_0) = \underline{0},$$

il che contraddice l'ipotesi che gli N vettori $\underline{u}_1(t_0), \dots, \underline{u}_N(t_0)$ siano linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^N$. $\square$

Un sistema fondamentale di soluzioni si trova così (dal punto di vista teorico): per $j=1,\dots,N$, definiamo $\underline{u}_j(t)$ come la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t), & t \in I, \\ \underline{u}(t_0) = \underline{e}_j, \end{cases}$$

ove $\underline{e}_j = (0,\dots,0,1,\dots,0)$ con 1 al posto j-esimo $(j=1,\dots,N)$.
Le funzioni $\underline{u}_j$ sono un sistema fondamentale di soluzioni perché $W(t_0) = (\underline{e}_1|\dots|\underline{e}_N) = I$ = identità su $\mathbb{C}^N$.

Dal punto di vista pratico, però, è difficile costruire esplicitamente un sistema fondamentale di soluzioni.
Nel caso di un sistema differenziale a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A\,\underline{u}(t), \\ \underline{u}(t_0) = \underline{u}_0 \end{cases}$$

la costruzione è possibile. Si hanno 3 casi:

(I) la matrice A ha autovalori $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ tutti semplici.

Si cercano soluzioni del sistema del tipo $\underline{u}(t) = \underline{v}\,e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\underline{v} \in \mathbb{C}^N$: si trova

$$\underline{u}'(t) = \underline{v}\,\lambda e^{\lambda t}, \qquad A\underline{u}(t) = A\underline{v}\,e^{\lambda t},$$

quindi se $\underline{u}$ risolve il sistema si ha $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, ossia λ è autovalore per A e $\underline{v}$ è un autovettore relativo a λ. Si ottengono allora N soluzioni (complesse)

$$\underline{u}_1(t) = \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ \underline{u}_N(t) = \underline{v}_N e^{\lambda_N t},$$

che sono linearmente indipendenti. Si noti che se A è reale, gli autovalori non reali compaiono a coppie coniugate, e i rispettivi autovettori sono l'uno il coniugato dell'altro. Quindi, la coppia $\underline{u}_1(t) = \underline{v} e^{\lambda t}$, $\underline{u}_2(t) = \overline{\underline{v}} e^{\bar{\lambda} t}$, ove

$$\underline{v} = \underline{x} + i\underline{y}, \quad \lambda = \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N),$$

può essere rimpiazzata da

$$\frac{1}{2}[\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t)] = e^{\alpha t}[\underline{x} \cos \beta t - \underline{y} \sin \beta t]$$

$$\frac{1}{2i}[\underline{u}_1(t) - \underline{u}_2(t)] = e^{\alpha t}[\underline{y} \cos \beta t + \underline{x} \sin \beta t]$$

che sono linearmente indipendenti e reali.

(II) La matrice A ha almeno un autovalore λ_0, di molteplicità $r > 1$ uguale a $\dim \ker(A - \lambda_0 I)$.

In questo caso si trovano r soluzioni linearmente indipendenti, relative all'autovalore λ_0, della forma

$$\underline{u}_1(t) = \underline{v}_1 e^{\lambda_0 t}, \ \ldots, \ \underline{v}_r e^{\lambda_0 t},$$

ove $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r\}$ è una base per $\ker(A - \lambda_0 I)$.

(III) La matrice A ha almeno un autovalore λ_0 di molteplicità $r > 1$, maggiore di $\dim \ker(A - \lambda_0 I)$.

In questo caso si trovano $m < n$ autovettori linearmente indipendenti relativi a λ_0, con le relative soluzioni

$$\underline{u}_1(t) = \underline{v}_1 e^{\lambda_0 t}, \ldots, \underline{v}_m e^{\lambda_0 t},$$

linearmente indipendenti, ma troppo poche. Accanto a queste, se ne cercano altre $n-m$ della forma

$$\underline{p}_1(t) e^{\lambda_0 t}, \ldots, \underline{p}_{n-m}(t) e^{\lambda_0 t},$$

ove i $\underline{p}_j(t)$ sono vettori linearmente indipendenti le cui componenti sono polinomi di grado j $(1 \le j \le n-m)$:

$$\underline{p}_j(t) = \sum_{k=0}^{j} \underline{c}_{kj} t^k, \quad \text{con } \underline{c}_{jj} \neq \underline{0}.$$

Esempi (1) $N=3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3+i$, $\lambda_3 = 3-i$; autovettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, 1+i, 2-i), \quad \underline{v}_3 = (1, 1-i, 2+i).$$

Tre soluzioni linearmente indipendenti sono

$$\underline{u}_1(t) = \underline{v}_1 e^{2t}, \quad \underline{u}_2(t) = \underline{v}_2 e^{(3+i)t}, \quad \underline{u}_3(t) = \underline{v}_3 e^{(3-i)t},$$

e tre soluzioni reali linearmente indipendenti sono

$$\underline{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \underline{v}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \underline{u}_3(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Si ha

$$V_0 = \{ c_1 \underline{v}_1(\cdot) + c_2 \underline{v}_2(\cdot) + c_3 \underline{v}_3(\cdot), \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \}.$$

(2) $N=3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ (doppio),

autovettori $\underline{v}_1=(1,1,1)$ per λ_1, $\underline{v}_2=(1,0,-1)$ e $\underline{v}_3=(0,1,-1)$ per λ_2.
Tre soluzioni linearmente indipendenti sono

$$\underline{u}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}, \quad \underline{u}_2(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \underline{u}_3(t)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t},$$

e

$$V_0=\{c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2+c_3\underline{u}_3 : c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}\}.$$

(3) $N=3$, $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&3&0\end{pmatrix}$, autovalori $\lambda_1=-2$, $\lambda_0=1$ (doppio);

autovettori $\underline{v}_1=(1,-2,4)$ per λ_1, $\underline{v}_2=(1,1,1)$ per λ_0 (e lo spazio $\ker(A-\lambda_0 I)$ ha dimensione 1). Accanto alle soluzioni

$$\underline{u}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}e^{-2t}, \quad u_2(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t},$$

si cerca $\underline{u}_3(t)=\underline{p}(t)e^t$, con $\underline{p}$ vettore-polinomio di grado 1: dunque $\underline{p}(t)=\begin{pmatrix}a+bt\\a'+b't\\a''+b''t\end{pmatrix}$. Sostituendo nel sistema differenziale si trova

$$\underline{p}(t)=\begin{pmatrix}a+bt\\a+b+bt\\a-2b+bt\end{pmatrix}$$

e si può scegliere $a=0$, $b=1$ (ad esempio), da cui $u_3(t)=\begin{pmatrix}t\\1+t\\-2+t\end{pmatrix}e^{3t}$.
Si ha infine

$$V_0=\{c_1\underline{u}_1(t)+c_2\underline{u}_2(t)+c_3\underline{u}_3(t),\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}\}.$$

Resta da vedere come costruire un singolo elemento di V_f.

Per costruire una particolare soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\,\underline{u}(t) + \underline{f}(t), & t \in I, \\ \underline{u}(t_0) = \underline{x} \end{cases}$$

(con $A(t)$ matrice $N \times N$ di funzioni continue su I, e $\underline{f}$ continua su I), partiamo dalla seguente osservazione: se $\{\underline{u}_1(\cdot), \dots, \underline{u}_N(\cdot)\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo, e se $W(t)$ è la relativa matrice Wronskiana, si ha

$$W'(t) = A(t)\,W(t).$$

Infatti l'elemento w_{ij} di $W(t)$ è la componente i-esima di $\underline{u}_j(t)$: perciò

$$w_{ij}'(t) = \frac{d}{dt}(\underline{u}_j)_i(t) = \sum_{h=1}^{N} a_{ih}(t)\,(\underline{u}_j)_h(t) = \sum_{h=1}^{N} a_{ih}(t)\,w_{hj}(t),$$

come si voleva dimostrare. Inoltre, si verifica analogamente che, posto $\underline{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N$, si ha

$$V_0 = \{c_1\underline{u}_1(\cdot) + \dots + c_N\underline{u}_N(t) : c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}\} = \{W(t)\underline{c} : \underline{c} \in \mathbb{C}^N\}.$$

Dunque, per ogni $\underline{c} \in \mathbb{C}^N$, la funzione $W(\cdot)\underline{c}$ sta in V_0. Allora utilizziamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che consiste nel cercare una soluzione $\underline{v}(\cdot)$ del sistema non omogeneo

della forma
$$\underline{v}(t) = W(t)\,\underline{c}(t),$$
con $\underline{c}: I \to \mathbb{C}^N$ funzione di classe C^1 da determinare imponendo che sia $\underline{v}'(t) = A(t)\,\underline{v}(t) + \underline{f}(t)$. Troviamo
$$\underline{v}'(t) = W'(t)\,\underline{c}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t) = A(t)\,W(t)\,\underline{c}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t) =$$
$$= A(t)\,\underline{v}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t),$$
dunque ci serve che sia
$$W(t)\,\underline{c}'(t) = \underline{v}'(t) - A(t)\,\underline{v}(t) = \underline{f}(t).$$
Dato che $\det W(t) \neq 0$, $W(t)$ è invertibile: dunque
$$\underline{c}'(t) = W(t)^{-1}\,\underline{f}(t),$$
e pertanto, scelto $s \in I$,
$$\underline{c}(t) = \int_s^t W(\tau)^{-1}\,\underline{f}(\tau)\,d\tau, \qquad t \in I.$$
Se scegliamo proprio $s = t_0$, avremo
$$V_0 = \left\{ W(t)\left[\underline{c} + \int_{t_0}^t W(\tau)^{-1}\,\underline{f}(\tau)\,d\tau\right] : \underline{c} \in \mathbb{C}^N \right\};$$
se definiamo la <u>matrice di transizione</u>
$$W(t,\tau) = W(t)\,W(\tau)^{-1},$$
la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo scritto all'inizio della lezione è data, in forma più elegante, da
$$\underline{u}(t) = W(t,t_0)\,x + \int_{t_0}^t W(t,\tau)\,\underline{f}(\tau)\,d\tau.$$

Si noti che $W(t,t_0)\underline{x}$ è la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\underline{u}(t), & t \in I, \\ \underline{u}(t_0) = \underline{x} \end{cases}$$

mentre $\int_{t_0}^{t} W(t,\tau)\underline{f}(\tau)\,d\tau$ è la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\underline{u}(t) + \underline{f}(t), & t \in I, \\ \underline{u}(t_0) = \underline{0}. \end{cases}$$

Dipendenza continua dai dati.

Le soluzioni dei sistemi lineari dipendono con continuità dai dati del problema, cioè da $\underline{x}$, $A(t)$, $\underline{f}(t)$. Ciò significa che se perturbiamo tali dati, ponendoli uguali a $\underline{y}$, $B(t)$, $\underline{g}(t)$, allora per le soluzioni $\underline{u}$, $\underline{v}$ in $I=[a,b]$ dei sistemi

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = A(t)\underline{u}(t) + \underline{f}(t), & t \in I \\ \underline{u}(t_0) = \underline{x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{v}'(t) = B(t)\underline{v}(t) + \underline{g}(t), & t \in I \\ \underline{v}(t_0) = \underline{y} \end{cases}$$

vale la maggiorazione (che non dimostriamo, anche se è facile)

$$\sup_{t\in I} |\underline{u}(t) - \underline{v}(t)|_N \le C \left[|\underline{x} - \underline{y}|_N + \sup_{t\in I} |A(t) - B(t)|_{N^2} + \sup_{t\in I} |\underline{f}(t) - \underline{g}(t)|_N \right],$$

ove C è una costante che dipende dalle quantità

$$b-a, \quad |\underline{x}|_N, \quad \sup_{t\in I} |A(t)|_{N^2}, \quad \sup_{t\in I} |\underline{f}(t)|_N.$$