ANALISI 2 | ve 4/10/19

20

10. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$:

la successione converge puntualmente a $|x|$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$: infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\, dx = \int_{-a}^{a} |x|\, dx = 2\int_0^a x\, dx = a^2.$$

5. $f_n(x) = \frac{x^n}{e^{nx}}$, $x \geq 0$.

la successione converge puntualmente a $f(x) = 0$ in $[0, \infty[$. La convergenza è anche uniforme in $[0,\infty[$: infatti

$$\frac{d}{dx} x^n e^{-nx} \geq 0 \iff (n x^{n-1} - n x^n) e^{-nx} \geq 0 \iff$$

$$\iff 1 - x \geq 0,$$

quindi

$$\max_{x \geq 0} \frac{x^n}{e^{nx}} = \frac{1}{e^n} \to 0.$$

11. $f_n(x) = x^n \cdot n^x$, $\quad x \in \mathbb{R}$:

la successione converge puntualmente a $f(x)=0$ in $[-1,1[$: infatti se $x \in [0,1[$ la potenza x^n abbatte il monomio n^x, e se $-1 \leq x < 0$ si ha $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^{|x|}} \to 0$.

Invece $f_n(x) \to +\infty$ per $x \geq 1$ e non ha limite per $x < -1$.

La convergenza è uniforme in $[-1, 1-\delta]$: infatti,

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n^{1/2}} & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ (1-\delta)^n \, n^{1-\delta} & \text{se } 0 \leq x \leq 1-\delta. \end{cases}$$

Perciò

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [-1,1-\delta]} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \max\left\{ n^{-1/2}, 2^{-n}, (1-\delta)^n n^{1-\delta} \right\} = 0$$