Esercizi sulla convergenza uniforme

1. Sia $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire in quali intervalli di $\mathbb{R}$ vi è convergenza puntuale e in quali intervalli di $\mathbb{R}$ vi è convergenza uniforme.

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 . \end{cases}$$

Dunque $f_n \to 0$ puntualmente in $[0,\infty[$.
Cerchiamo di valutare

$$\sup_{x\geq 0} |f_n| = \max_{x \geq 0} n^2x^2e^{-nx} .$$

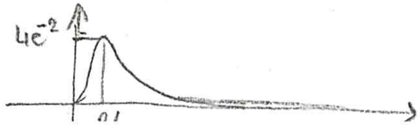
Si ha $f_n \in C^\infty$ e

$$f_n'(x) = e^{-nx}\left[2n^2x - n^3x^2 \right] \geq 0$$

se e solo se $2-nx \geq 0$, ossia $x \leq \frac{2}{n}$. Perciò f_n cresce in $[0, \frac{2}{n}]$ e decresce in $[\frac{2}{n}, \infty[$ con $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Dunque $\frac{2}{n}$ è punto di massimo assoluto, ossia

$$\max_{x\geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 4e^{-2} .$$

Si conclude che non vi è convergenza uniforme in $[0,\infty[$



Tuttavia, per ogni $a>0$ si ha $f_n \to 0$ uniformemente in $[a,\infty[$.

poichè per ogni $n > \frac{2}{a}$ risulta $\frac{2}{n} < a$, e quindi

$$\max_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) = n^2 a^2 e^{-na},$$

cosicchè

$$\lim_{n\to\infty} \left[\max_{x\geq a} f_n(x) \right] = 0 .$$

2. Stesse domande per $f_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{2+(\sin x)^n}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Se $|\sin x| < 1$, si ha $(\sin x)^n \to 0$ per $n \to \infty$, e quindi $f_n(x) \to 0$. Se invece $|\sin x| = 1$, allora $f_n(x) \to \frac{1}{3}$. Perciò

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[\cup]\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \\ \frac{1}{3} & \text{se } x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} . \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo chiuso I contenente $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3}{2}\pi$: altrimenti avremmo una successione di funzioni continue che converge uniformemente ad una funzione discontinua. Invece, se consideriamo

$$I = [0, \tfrac{\pi}{2} - \delta] \cup [\tfrac{\pi}{2} + \delta, \tfrac{3}{2}\pi - \delta] \cup [\tfrac{3}{2}\pi + \delta, 2\pi],$$

si ha $|\sin x| \leq |\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)|$ per ogni $x \in I$, e quindi

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(\frac{\pi}{2}-\delta)|^n}{2 - |\sin(\frac{\pi}{2}-\delta)|^n} \leq |\sin(\tfrac{\pi}{2}-\delta)|^n \quad \forall x \in I,$$

da cui $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = 0$.

3. Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, stabilire in quali intervalli di $\mathbb{R}$ vi è convergenza assoluta, puntuale, totale, uniforme.

(13)

Se $|1-x^2|>1$, la serie non converge perchè il termine generale non è infinitesimo. Dunque ci riduciamo a

$$|1-x^2| \leq 1, \quad \text{ossia} \quad x^2 \leq 2, \quad \text{ossia} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Se $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}$, la serie converge assolutamente per il criterio del rapporto. Se $|x| = \sqrt{2}$ o $x=0$, non c'è convergenza assoluta perchè ci si riduce alla serie armonica.

Se $|x|=\sqrt{2}$ c'è convergenza puntuale per il criterio di Leibniz, non così per $x=0$. In definitiva la serie

converge assolutamente in $]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$,

converge puntualmente in $[-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}]$.

Si ha convergenza totale in $I_\delta = [-\sqrt{2}+\delta, -\delta] \cup [\delta, \sqrt{2}]$ per ogni $\delta \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I_\delta} \frac{|1-x^2|^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^n}{n} \quad \text{per } \varepsilon > 0 \text{ opportuno.}$$

Si ha convergenza uniforme in $J_\delta = [-\sqrt{2}, -\delta] \cup [\delta, \sqrt{2}]$, poichè intorno a $\pm\sqrt{2}$ si ha $1-x^2 \leq 0$, quindi si usa il criterio di Leibniz che dà una buona stima del resto.

4. Stesse domande per $f_n(x)=\dfrac{(2x)^n}{1+(2x)^n}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$.

Si ha convergenza puntuale in $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } |2x|<1, \text{ ossia } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{se } 2x=1, \text{ ossia } x=\frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } |2x|>1, \text{ ossia } x<-\frac{1}{2} \text{ oppure } x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

La convergenza è uniforme in

$$I_\delta = \left]-\infty,-\tfrac{1}{2}-\delta\right] \cup \left[-\tfrac{1}{2}+\delta, \tfrac{1}{2}-\delta\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}+\delta, \infty\right[.$$

Infatti se $x\in\left[-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta\right]$ si ha $|2x|<1-2\delta$, da cui

$$|f_n(x)| \le \frac{(1-2\delta)^n}{1-(1-2\delta)^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\le\frac{1}{2}-\delta} |f_n(x)|=0,$$

mentre se $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}-\delta\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\delta,\infty\right[$ si ha $|2x|>1+2\delta$, da cui

$$|f_n(x)-1| = \left|\frac{1}{1+(2x)^n}\right| \le \frac{1}{|2x|^n-1} \le \frac{1}{(1+2\delta)^n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\ge\frac{1}{2}+\delta} |f_n(x)-1| = 0.$$

5. Stesse domande per $f_n(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2+e^{-n/x}}$, $x>0$.

In più, calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}\,dx .$$

Si ha convergenza puntuale in $]0,\infty[$, poiché

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x>0.$$

Per la convergenza uniforme notiamo che se $a>0$ risulta per ogni $x\in]0,a]$

$$0 \le \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) = \frac{1+x^2+e^{-n/x} - e^{-\frac{x}{n}}(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x^2+e^{-n/x})} =$$

$$= \frac{(1+x^2)(1-e^{-x/n}) + e^{-n/x}}{(1+x^2)(1+x^2+e^{-n/x})} \le \frac{(1+x^2)(1-e^{-a/n}) + e^{-n/a}}{(1+x^2)^2} \le$$

$$\le (1-e^{-a/n}) + e^{-n/a}$$

e quindi

$$\sup_{x\in]0,a]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \to 0 \quad \text{per } n\to\infty.$$

Ma addirittura, se $x\in]a,\infty[$ si può ragionare così: sia $\varepsilon\in]0,1[$, e sia $a_\varepsilon>0$ tale che $1+x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ per $x\ge a_\varepsilon$. Allora per $x>a_\varepsilon$ si ha

$$0 \le \frac{1}{1+x^2} - f_n(x) < \frac{1-e^{-x/n}}{1+x^2} + \frac{e^{-n/x}}{(1+x^2)^2} \le \varepsilon + \varepsilon^2,$$

dunque

$$\sup_{x\ge a_\varepsilon} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| < 2\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}^+.$$

D'altra parte, $f_n \to \frac{1}{1+x^2}$ uniformemente in $]0, a_\varepsilon]$; quindi

$$\sup_{0\le x\le a_\varepsilon} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon .$$

In definitiva

$$\sup_{x>0} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| = \max \left\{ \sup_{0<x\le a_\varepsilon} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| , \sup_{x>a_\varepsilon} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \right\}$$

$$\leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon ,$$

e quindi c'è convergenza uniforme in $]0,\infty[$.

Infine:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{1+x^2+e^{-n/x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Infatti, fissato $\varepsilon>0$, con il conto precedente si ha (per $a>0$)

$$\int_0^\infty \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx = \int_0^a \left[\frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \right] dx + \int_a^\infty \left[\frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \right] dx ;$$

il 1° integrale tende a 0 perché $f_n \to \frac{1}{1+x^2}$ uniformemente in $]0,a]$; il 2° si maggiora con

$$\int_a^\infty \left[\frac{(1+x^2)(1-e^{-a/n}) + e^{-n/a}}{(1+x^2)^2} \right] dx \le \int_a^\infty \left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \right] dx \le$$

$$\le 2 \int_a^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a \right).$$

Fissato $\varepsilon>0$ e scelto $a_\varepsilon>0$ tale che $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a < \frac{\varepsilon}{2}$, si ha per un opportuno $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+x^2} - f_n(x) \right] dx \le \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon .$$

6. Solite domande per la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-x^2)^n}{1+n^2x^2}$. (17)

La serie converge assolutamente per $0 < x^2 < 2$, grazie al criterio del rapporto; per $x=0$ e per $x^2 \geq 2$ il termine generale non è infinitesimo e la serie non può convergere.

La serie converge puntualmente per $0 < x^2 \leq 2$, in quanto per $x^2 = 2$ si può applicare il criterio di Leibniz.

La convergenza totale si ha per $|1-x^2| \leq 1-\delta$ per ogni $\delta \in]0,1[$.

Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|1-x^2|\leq\delta} \frac{n|1-x^2|^n}{1+n^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\delta)^n < \infty .$$

La convergenza uniforme si ha per $-1 \leq 1-x^2 \leq 1-\delta$, per ogni $\delta \in]0,1[$, grazie alla stima del resto fornita dal criterio di Leibniz quando $1-x^2 \leq 0$. In definitiva:

- convergenza puntuale in $[-\sqrt{2}, 0[\,\cup\,]0, \sqrt{2}]$,
- convergenza assoluta in $]-\sqrt{2}, 0[\,\cup\,]0, \sqrt{2}[$,
- convergenza uniforme in $[-\sqrt{2}, -\alpha] \cup [\alpha, \sqrt{2}]$ $\forall \alpha \in]0, \sqrt{2}[$,
- convergenza totale in $[-\sqrt{2}+\alpha, -\alpha] \cup [\alpha, \sqrt{2}-\alpha]$ $\forall \alpha \in]0, \sqrt{2}[$.

7. $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^3 x}$, $x \geq 0$:

la successione converge puntualmente a 0; la convergenza è uniforme perché per $x>0$

$$0 \leq f_n(x) = \frac{n^2x}{n^3x\left[1+\frac{1}{n^3x}\right]} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^3x}} \leq \frac{1}{n} \ ;$$

quindi

$$\sup_{x>0} f_n(x) \leq \frac{1}{n},$$

e d'altronde $f_n(0)=0$. Dunque

$$0 \leq \sup_{x\geq 0} f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

da cui la tesi.

8. $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^2 x}$, $x \geq 0$:

la successione converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0. \end{cases}$

La convergenza è uniforme in ogni semiretta $[\delta, \infty[$, poiché

$$|f_n(x)-1| = \left|\frac{n^2x}{1+n^2x} - 1\right| = \frac{1}{1+n^2x} \leq \frac{1}{1+n^2\delta} \quad \forall x \geq \delta,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq\delta} |f_n(x)-1| = 0.$$

9. $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ 2 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$:

La successione converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ 2 & \text{se } x>0 \end{cases}$.

La convergenza è uniforme in $\mathbb{R} \setminus [-\delta,\delta]$: addirittura si ha, quando $n \geq \frac{1}{\delta}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta,\delta]$$

<u>Osservazione</u> Pure in mancanza di convergenza uniforme in $[-1,1]$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx .$$

Infatti,
$$\left| \int_{-1}^{1} [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 0\,dx + \int_{-1/n}^{0} (nx+1)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} (nx+1-2)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} nx\,dx + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right| = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

10. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$:

La successione converge puntualmente a $|x|$. La convergenza è anche uniforme in $\mathbb{R}$: infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\, dx = \int_{-a}^{a} |x|\, dx = 2\int_0^a x\, dx = a^2.$$

5. $f_n(x) = \frac{x^n}{e^{nx}}$, $x \geq 0$.

La successione converge puntualmente a $f(x) = 0$ in $[0, \infty[$. La convergenza è anche uniforme in $[0, \infty[$: infatti

$$\frac{d}{dx} x^n e^{-nx} \geq 0 \iff (n x^{n-1} - n x^n) e^{-nx} \geq 0 \iff$$

$$\iff 1 - x \geq 0,$$

quindi

$$\max_{x \geq 0} \frac{x^n}{e^{nx}} = \frac{1}{e^n} \to 0.$$

11. $f_n(x) = x^n \cdot n^x$, $\quad x \in \mathbb{R}$:

la successione converge puntualmente a $f(x) = 0$ in $[-1, 1[$: infatti se $x \in [0,1[$ la potenza x^n abbatte il monomio n^x, e se $-1 \leq x < 0$ si ha $|f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{n^{|x|}} \to 0$.

Invece $f_n(x) \to +\infty$ per $x \geq 1$ e non ha limite per $x < -1$.

La convergenza è uniforme in $[-1, 1-\delta]$: infatti,

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{n^{1/2}} & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ (1-\delta)^n n^{1-\delta} & \text{se } 0 \leq x \leq 1-\delta. \end{cases}$$

Perciò

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [-1, 1-\delta]} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \max\left\{ n^{-1/2}, 2^{-n}, (1-\delta)^n n^{1-\delta} \right\} = 0$$