Integrali impropri

L'integrale secondo Riemann riguarda funzioni limitate definite su intervalli limitati. Se manca una di queste condizioni, si parla di "integrali impropri". Ci occuperemo dei casi seguenti:

(a) integrali di funzioni illimitate su intervalli limitati: ad esempio,
$$\int_0^1 \ln x\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha>0);$$

(b) integrali di funzioni limitate su intervalli non limitati: ad esempio,
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha>0);$$

(c) le due cose insieme, ossia integrali di funzioni illimitate su insiemi non limitati: ad esempio,
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha>0).$$

<u>Definizione (caso (a))</u>. Sia $f:]a,b] \to \mathbb{R}$. Se:

(i) $f \in \mathcal{R}(a+\delta, b)$ per ogni $\delta \in]0, b-a[$;

(ii) esiste il limite
$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx,$$

diciamo che f è <u>integrabile in senso improprio</u> in $[a,b]$; tale limite è l'<u>integrale improprio</u> di f in $[a,b]$, e si denota con il consueto simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Se tale valore è finito, si dice che f ha integrale improprio convergente.

<u>Definizione (caso (b))</u> Sia $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Se:

(i) $f \in \mathcal{R}(a,c)$ per ogni $c > a$;

(ii) esiste il limite
$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx,$$

diciamo che f è <u>integrabile in senso improprio</u> in $[a,\infty[$; tale limite è l'<u>integrale improprio</u> di f in $[a,\infty[$ e si denota con $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Se tale valore è finito, si dice che f ha integrale improprio convergente.

In entrambe le definizioni, se l'integrale improprio di f è convergente e se f è non negativa, si usa dire che f è <u>sommabile</u>.

Evidenti modifiche della definizione permettono di considerare i casi in cui $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ è singolare nel punto b o $f:]-\infty,a] \to \mathbb{R}$.
Nel caso (c) l'integrale andrà spezzato in due integrali di tipo (a) e (b); esso avrà senso se e solo se:

(i) hanno senso entrambi i pezzi,

(ii) ha senso farne la somma (quindi non siamo nel caso $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$).

Naturalmente non avrà importanza (grazie alle proprietà dell'integrale di Riemann) quale punto viene scelto per spezzare l'integrale.

<u>Esempi</u> Calcoliamo gli integrali citati in precedenza:

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \ln x \, dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[x(\ln x - 1)\right]_\delta^1 =$

$= \lim_{\delta\to 0^+} \left[-1 + \delta \ln \delta\right] = -1;$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{\delta\to 0^+} \left[\ln x\right]_\delta^1 = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{\delta\to 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\delta^1 = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0<\alpha<1. \end{cases} \end{cases}$

(3) $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{c\to +\infty} \int_0^c e^{-x} dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^c = 1,$

(4) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c\to\infty} \left[\ln x\right]_1^c = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{c\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^c = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \end{cases}$

(5) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = [\text{scelto } b=1]$

$= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$

$= \lim_{\delta\to 0^+} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\delta^1 + \lim_{c\to\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^c =$

$= -2e^{-1} + 2 + 2e^{-1} = 2$

(se si fosse scelto un altro $b>0$, avremmo ottenuto lo stesso esito).

(6) $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty \quad \forall \alpha > 0.$

<u>Osservazione</u> Sia $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ oppure $f: [a,\infty[\to \mathbb{R}$, e supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato. Supponiamo anche che f abbia una primitiva F, definita in $]a,b]$ o in $[a,\infty[$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} F(a+\delta), \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} F(c).$$

Dunque l'integrale improprio di f sarà finito se e solo se la sua primitiva F avrà limite finito per $x\to c^+$, o per $x\to+\infty$.

Alla luce di questa osservazione, potremo scrivere più rapidamente:

(1) $\int_0^1 \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_0^1 = -1$,

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = +\infty & \text{se } \alpha=1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^1 = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases} \end{cases}$,

(3) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$

(4) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = +\infty & \text{se } \alpha=1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \end{cases} \end{cases}$,

(5) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = [-2e^{-\sqrt{x}}]_0^\infty = 2$,

(6) $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} [\ln x]_0^\infty = +\infty & \text{se } \alpha=1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^\infty = +\infty & \text{se } \alpha>0,\ \alpha\neq 1. \end{cases}$

<u>Osservazione</u> Se f, g hanno integrale improprio convergente in $]a,b]$, allora lo stesso vale per $f+g$ e λf, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, con:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \quad \int_a^b [\lambda f](x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx .$$

Se f e g sono integrabili in senso improprio su $]a,b]$, ed uno dei due integrali impropri è convergente, allora $f+g$ è integrabile in senso improprio su $]a,b]$ (ma l'integrale può non essere convergente). Ad esempio, se $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, allora

$$\int_0^1 [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \left[\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx =$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \left[\left[x\ln x - x\right]_\delta^1 + \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 \right] = -\infty + 2 = -\infty .$$

Discorsi analoghi valgono per funzioni su $[a, \infty[$.

<u>Osservazione</u> Se $f:]a,b] \to \mathbb{R}$, oppure $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, ha segno costante, ed è integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato, allora f è integrabile in senso improprio: infatti le funzioni $\delta \mapsto \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$ e $c \mapsto \int_a^c f(x)\,dx$ sono monotone (decrescenti o crescenti).

Come per le serie numeriche, anche per le funzioni integrabili in senso improprio vale un teorema di confronto.

Teorema (di confronto). Siano $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili in senso improprio. Se $g \geq 0$ ed è sommabile, e se
$$|f(x)| \leq g(x) \qquad \forall x \geq a,$$
allora $|f|$ è a sua volta sommabile, con
$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

dim. Anzitutto, per ogni $c > a$ si ha
$$(*) \qquad \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \leq \int_a^c |f(x)|\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx.$$
Per $c \to \infty$, deduciamo che $|f|$ è sommabile e che
$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx.$$
Adesso notiamo che $|f| - f$ è una funzione non negativa, tale che
$$0 \leq |f| - f \leq 2|f|;$$
quindi, per l'argomentazione precedente (con $|f| - f$ al posto di f e $2|f|$ al posto di g) si ottiene che $|f| - f$ è sommabile. Perciò
$$f = |f| - [|f| - f]$$
è a sua volta sommabile. Ne segue, tornando a $(*)$,
$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \quad \square$$

<u>Esempio</u> Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$

La funzione f è continua e pari su $\mathbb{R}$. Ci chiediamo se esiste l'integrale improprio $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Una primitiva di $\sin x$ è $1-\cos x$; quindi, integrando per parti,

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^c + \int_0^c \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx .$$

Ma essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad 0 \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \ \forall x \ge 1,$$

si ricava che $\frac{1-\cos x}{x^2}$ è sommabile su $[0,\infty[$ e che

$$\exists \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 + \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \in \mathbb{R},$$

cioè $\frac{\sin x}{x}$ ha integrale improprio convergente.

Invece $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ ha integrale improprio divergente: infatti

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt \ge$$

$$\ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty .$$

Osservazione finale: Sia $f \in \mathcal{R}(a,c)$ per ogni $c > a$.

- Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $[a,\infty[$ non è detto che anche f lo sia; esempio: $f(x) = \sin x$. Per questa funzione si ha
$$\int_0^\infty |\sin x|\,dx = +\infty, \qquad \int_0^\infty \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\infty \text{ non esiste.}$$
- Se $|f|$ è sommabile in $[a,\infty[$, allora f ha integrale improprio convergente con
$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$
- Se f è integrabile in senso improprio su $[a,\infty[$, allora anche $|f|$ lo è, e
$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$
- Se f ha integrale improprio finito su $[a,\infty[$, non è detto che lo stesso valga per $|f|$; esempio: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ in $[0,\infty[$.

Esercizi

- Dire se i seguenti integrali impropri esistono, e calcolarli:

(a) $\displaystyle\int_0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\arcsin x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$, (d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^5 e^{-x^2}\,dx$

- Sia $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione decrescente e non negativa. Allora si ha
$$\int_1^\infty f(x)\,dx < +\infty \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) < +\infty.$$