(B) Equazioni lineari del 1° ordine: sono della forma

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x), \qquad x \in I,$$

con $a, b \in C(I)$. Per risolverle, si scrive

$$y'(x) - a(x)\, y(x) = b(x),$$

e, detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, moltiplicando per $e^{-A(x)}$ si ha

$$e^{-A(x)}\left[y'(x) - a(x)\, y(x)\right] = e^{-A(x)}\, b(x),$$

ossia

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\, e^{-A(x)}\right] = e^{-A(x)}\, b(x).$$

Dunque

$$y(x)\, e^{-A(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ove $x_0 \in I$ è un punto arbitrariamente scelto. Ne segue

$$y(x) = c\, e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt, \quad x \in I.$$

Se si sa calcolare l'integrale, si trova $y(x)$ esplicitamente, altrimenti si lascia così.

Esempi (1) $\quad y' = \sin x\, y + \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$

In questo caso $A(x) = -\cos x$ e dunque, scelto $x_0 = 0$,

$$y(x) = c\, e^{-\cos x} + e^{-\cos x} \int_0^x e^{\cos t} \sin t \cos t\, dt =$$

$$[\text{ponendo } s = \cos t] \quad = c\, e^{-\cos x} + e^{-\cos x} \int_1^{\cos x} s\, e^s (-ds) =$$

$$= c\, e^{-\cos x} + e^{-\cos x} \int_{\cos x}^{1} s\, e^s\, ds =$$

$$= c\,e^{-\cos x} + e^{-\cos x}\left[(s-1)e^{s}\right]_{\cos x}^{1} =$$

$$= c\,e^{-\cos x} - \cos x + 1 .$$

(2) $\begin{cases} y' = 2xy - x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Si ha

$$y(x) = c e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}(-t^3)\,dt =$$

$$= c e^{x^2} - e^{x^2}\int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt = \qquad [t^2 = s]$$

$$= c e^{x^2} - e^{x^2}\int_0^{x^2} \frac{1}{2} s e^{-s}\,ds =$$

$$= c e^{x^2} + \frac{e^{x^2}}{2}\left[(s+1)e^{-s}\right]_0^{x^2} =$$

$$= c e^{x^2} + \frac{x^2+1}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} .$$

Poi,

$$1 = y(0) = c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ,$$

dunque $c=1$ e

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{x^2+1}{2} .$$

<u>Esercizi</u>:

- $y' = \ln x \cdot \sin y$
- $y' = \dfrac{\ln x \cos y}{x \sin 2y}$
- $y' = \dfrac{x - xy^2}{y + x^2 y}$
- $y' = -y \cdot \operatorname{tg} x + \sin x$
- $y' = \dfrac{2y}{x} + x$
- $y' = \dfrac{y}{1-x^2} + 1 - x$

(C) Equazioni riducibili ai tipi (A) e (B).

Equazioni omogenee: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Ponendo $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ha

$$u'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x}u(x) = \frac{1}{x}f\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{1}{x}u(x) =$$

$$= \frac{1}{x}\left[f(u(x)) - u(x)\right]$$

Dunque l'equazione originaria è diventata a variabili separabili:

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Esempi:

- $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
- $y' = \frac{x+3y}{x-y}$
- $y' = 1 - \sqrt{\frac{x-y}{x}}$.

Equazioni di Bernoulli $y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^{\gamma}$, ove $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ponendo $u(x) = y(x)^{1-\gamma}$ si ha

$$u'(x) = (1-\gamma)y(x)^{-\gamma}y'(x) = (1-\gamma)y(x)^{-\gamma}\left[\alpha(x)y(x) + \beta(x)y(x)^{\gamma}\right] =$$

$$= (1-\gamma)\alpha(x)u(x) + (1-\gamma)\beta(x).$$

L'equazione originaria è diventata un'equazione lineare.

Esempi:

- $y' = \frac{4}{x} y - x\sqrt{y}$
- $y' = -\frac{y}{x} + xy^2$
- $y' = x^3 y + x^7 y^3$.

Equazioni della forma $y' = f(ax+by)$.

Si pone $u(x) = ax + by(x)$, e si trova

$$u'(x) = a + by'(x) = a + bf(u(x)),$$

cioè l'equazione si è trasformata in una a variabili separabili:

$$u' = a + bf(u).$$

Esempi

- $y' = (x-y)^2$
- $y' = \frac{e^{x-3y} - 1}{x-3y}$
- $y' = -\sin^2(x+y)$