Classi di funzioni integrabili

Proposizione. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora $f\in\mathcal{R}(a,b)$.

dim. Consideriamo, fissato $\varepsilon>0$, la suddivisione equispaziata

$$\sigma_k=\left\{x_j=a+j\frac{b-a}{k},\ j=0,\dots,k\right\}.$$

Allora, supponendo f crescente, si ha $\sup_{[x_{j-1},x_j]} f=f(x_j)$; quindi

$$S(f,\sigma_k)=\sum_{j=1}^{k}M_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{k}f(x_j)\frac{b-a}{k},$$

e similmente

$$s(f,\sigma_k)=\sum_{j=1}^{k}m_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{k}f(x_{j-1})\frac{b-a}{k}.$$

Ne segue, se k è sufficientemente grande,

$$S(f,\sigma_k)-s(f,\sigma_k)<\sum_{j=1}^{k}\left[f(x_j)-f(x_{j-1})\right]\frac{b-a}{k}=\left[f(b)-f(a)\right]\frac{b-a}{k}<\varepsilon,$$

e l'integrabilità di f segue dal criterio di integrabilità. $\square$

Vogliamo ora mostrare che $f\in C[a,b]$ (ossia f continua in $[a,b]$) implica $f\in\mathcal{R}(a,b)$. A questo scopo occorre una parentesi sulla

Uniforme continuità

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione. Ricordiamo che f è continua in A se è continua in ogni punto di A, ossia:

$\forall \underline{x}_0 \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\underline{x} \in A$ con $|\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta$.

<u>Definizione</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$, sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è <u>uniformemente continua</u> in A se
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\underline{x}, \underline{x}_0 \in A$ con $|\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta$.

Come si vede, il "$\forall \underline{x}_0 \in A$" è passato alla fine della frase: quindi il δ non dipende più da x_0, ma solo da ε. Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che le immagini di punti, che distano fra loro meno di δ, non possono distare fra loro più di ε.

<u>Esempi</u> (1) Ogni funzione <u>lipschitziana</u> (dal nome del matematico tedesco Rudolf Lipschitz), cioè tale che

$$\exists K > 0 \text{ per cui } |f(\underline{x}) - f(\underline{x}')| \le K |\underline{x} - \underline{x}'|_N \quad \forall \underline{x}, \underline{x}' \in A,$$

è uniformemente continua, con $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

(2) La funzione $f(x) = x^2$, che è continua su $\mathbb{R}$, non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}^+$ e scelti $x_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n' = n$, si ha:

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(x_n')| = \left|n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2},$$

Dunque, fissato $\varepsilon \in]0,2[$, non c'è nessun $\delta > 0$ tale che risulti

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

perché se n è sufficientemente grande, in modo che $|x_n - x_n'| = \frac{1}{n} < \delta$, si ha

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon:$$

Non tutte le funzioni continue, quindi, sono uniformemente continue; viceversa, ovviamente, tutte le funzioni uniformemente continue sono continue. Tuttavia, sugli insiemi compatti (limitati e chiusi) di $\mathbb{R}^N$, le due nozioni coincidono:

Teorema (di Heine-Cantor). Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è uniformemente continua in A.

dim. Sia f continua in A e supponiamo che f non sia uniformemente continua in A. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\delta = \frac{1}{n}$, vi sono due punti $\underline{x}_n$ e $\underline{x}'_n$ che verificano

$$|\underline{x}_n - \underline{x}'_n|_N < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad |f(\underline{x}_n) - f(\underline{x}'_n)| \geq \varepsilon_0 .$$

Le successioni $\{\underline{x}_n\}$ e $\{\underline{x}'_n\}$ vivono in A, che è compatto. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che converge a un punto $\underline{x}^* \in A$. Allora, essendo $|\underline{x}_{n_k} - \underline{x}'_{n_k}|_N < \frac{1}{n_k}$, anche $\{\underline{x}'_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\underline{x}^*$. Ma, per continuità,

$$f(\underline{x}'_{n_k}) \to f(\underline{x}^*), \quad f(\underline{x}_{n_k}) \to f(\underline{x}^*),$$

ossia

$$\varepsilon_0 \leq |f(\underline{x}'_{n_k}) - f(\underline{x}_{n_k})| \to 0,$$

assurdo. □

Se manca qualcuna delle ipotesi, il teorema di Heine-Cantor non vale: se A è chiuso ma non limitato, es. $A = \mathbb{R}$, la funzione $f(x) = x^2$ è continua ma non uniformemente continua; se A è limitato ma non chiuso, es. $A =]0,1]$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua ma non uniformemente continua,

come è facile verificare con i punti $x=\frac{1}{n}$, $x'=\frac{1}{n+1}$: si ha
$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$ e $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|=n+1-n=1$, e quindi
se $0<\varepsilon<1$ non c'è nessun δ che faccia funzionare la definizione.

<u>Teorema</u> Le funzioni continue in $[a,b]$ sono integrabili in $[a,b]$.

<u>dim.</u> Sia $f\in C[a,b]$; per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua in $[a,b]$. Sia $\varepsilon>0$ e sia $k>\frac{b-a}{\delta}$, ove δ è quello della definizione di uniforme continuità. Scegliamo la suddivisione equispaziata $\sigma_k=\{a+\frac{j}{k}(b-a),\ 0\le j<k\}$. Allora

$$S(f,\sigma_k)-s(f,\sigma_k)=\sum_{j=1}^{k}(M_j-m_j)\,\frac{b-a}{k}.$$

Ma $M_j=\sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]}f(x)=\max\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]}f=f(\xi_j)$, per qualche $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$,

$m_j=\inf\limits_{[x_{j-1},x_j]}f=\min\limits_{[x_{j-1},x_j]}f=f(\eta_j)$, per qualche $\eta_j\in[x_{j-1},x_j]$.

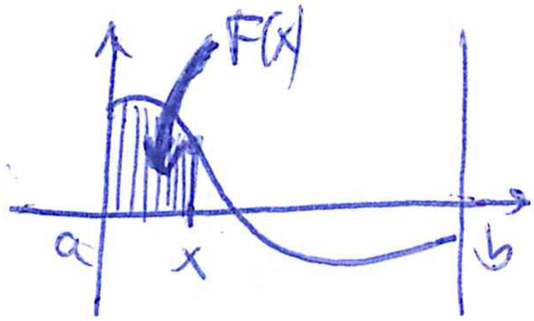
Allora
$$|\xi_j-\eta_j|\le\frac{b-a}{k}<\delta,\quad\text{quindi}\quad |f(\xi_j)-f(\eta_j)|<\varepsilon.$$

Dunque
$$S(f,\sigma_k)-s(f,\sigma_k)\le\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\frac{b-a}{k}=\varepsilon(b-a),$$
e per il criterio di integrabilità, $f\in R(a,b)$. $\square$

Più in generale sono integrabili in $[a,b]$ tutte le funzioni limitate in $[a,b]$ e continue in $[a,b]\setminus N$, ove N è un insieme finito di punti (dimostrazione omessa).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in R(a,b)$. Introduciamo la funzione
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b],$$
che viene denominata <u>funzione integrale</u> di f. Essa misura la parte di area del sottografico di f che si trova fra l'ascissa a e l'ascissa x.



<u>Proposizione</u> Sia $f \in R(a,b)$. Allora e

(i) F è lipschitziana in $[a,b]$,

(ii) $F(a) = 0$

<u>dim</u> (i) Se $x, x' \in [a,b]$, posto $M = \sup_{[a,b]} |f|$, si ha
$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x'}^x f(t)\,dt \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x'}^x |f(t)|\,dt \right| \leq M\,|x - x'|,$$
dove abbiamo usato la proprietà (evidente) che
$$m \leq f(x) \leq M \text{ in } [a,b] \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$
Dunque F è lipschitziana.

(ii) Basta osservare che $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. $\square$

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f \in C[a,b]$. Allora la funzione integrale F è derivabile in $[a,b]$ con $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

dim. Sia $x_0 \in [a,b]$. Poiché f è continua in x_0, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $|t - x_0| \leq \delta$. Dunque

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt + \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt + f(x_0).$$

Ne segue, per $|x - x_0| < \delta$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\,\varepsilon\,|x - x_0| = \varepsilon.$$

Perciò

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0). \quad \square$$

Osservazioni (1) La continuità di f è essenziale: se scelgo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1,0[\end{cases}, \quad [a,b] = [-1,1],$$

allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-1,0] \\ \int_0^x 1\,dt = x, & \text{se } x \in]0,1] \end{cases},$$

quindi

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-1,0[\\ \text{non esiste, se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases};$$

dunque la tesi del teorema non vale.

(2) In effetti abbiamo provato un risultato più preciso: se $f \in R(a,b)$ e f è continua in un punto $x_0 \in [a,b]$, allora F è derivabile in x_0 con $F'(x_0) = f(x_0)$.

(3) Non si capisce ancora il nome del teorema: perché è così fondamentale?

Per capire meglio la situazione, introduciamo una nuova nozione:

<u>Definizione</u>. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Diciamo che una funzione $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ è una <u>primitiva</u> di f se

(i) G è derivabile in $[a,b]$,

(ii) $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

<u>Osservazione</u>: non tutte le funzioni sono dotate di primitive: ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1,0[\end{cases}$ non ne ha, come vedremo. Ma se f ha una primitiva G, allora ne ha infinite: $G(x)+c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

L'*insieme* di tutte le primitive di f prende il nome di
integrale indefinito di f e si denota con l'*ambiguo* simbolo

$$\int f(x)\,dx .$$

Perciò $\int f(x)\,dx$ *non è una funzione* ma un insieme di funzioni (eventualmente vuoto).

Dimostriamo che, se esso non è vuoto e contiene $G(x)$, allora

$$\int f(x)\,dx = \{ G(x)+c,\ c \in \mathbb{R} \}.$$

Se $H \in \int f(x)\,dx$, allora $H' = f = G'$, dunque $(H-G)' = 0$ in $[a,b]$. Per il teorema di Lagrange, $H-G$ è costante in $[a,b]$, quindi $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = G(x)+c$.

Se, viceversa, $H(x) = G(x)+c$, allora $H'(x) = G'(x) = f(x)$, quindi $H \in \int f(x)\,dx$. $\square$

Ciò detto, il nocciolo della questione è:

se $f \in C[a,b]$, allora $\int f(x)\,dx$ è non vuoto, perché la funzione integrale F è una primitiva di f (teorema fondamentale del calcolo integrale). Dunque

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x)+c \}.$$

Ogni altra primitiva di f è $H(x) = F(x)+c$: dunque $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$, da cui $H(x) - H(x') = \int_a^x f(t)\,dt + c - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_{x'}^x f(t)\,dt$.

Ecco il punto! Se voglio calcolare

$$\int_{x'}^{x} f(t)\,dt \quad , \quad \text{con } f \text{ \underline{continua}, o almeno \underline{dotata di primitiva}},$$

basta prenderne una primitiva qualunque $H(x)$ e scrivere

$$\int_{x'}^{x} f(t)\,dt = H(x) - H(x').$$

Ecco perché il teorema fondamentale del calcolo integrale ha questo nome: perché permette di calcolare un gran numero di integrali, e perché mette in relazione gli integrali con le derivate: in un certo senso le due operazioni sono una l'inversa dell'altra, benché i significati geometrici siano ben differenti...

<u>Esempi</u>:

$$\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\int_{-1}^{3} e^t\,dt = e^3 - e^{-1}.$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

<u>Notazione comoda</u>: se $H(x)$ è una primitiva di f,

$$\int_a^b f(x)\,dx = H(b) - H(a) =: \Big[H(x)\Big]_a^b.$$

Dunque

$$\int_0^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}.$$

Tabella di primitive

integrando	primitiva
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$ $(p \neq -1)$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$ $(\lambda \neq 0)$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

integrando	primitiva
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Vediamo perché la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1,0[\end{cases}$ non ha primitive in $[-1,1]$: se $G(x)$ fosse una primitiva di f in $[-1,1]$, allora

$$0 = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = G(x) - G(-1) \quad \forall x \in [-1,0[,$$

dunque $G(x) = G(-1) = \text{costante}$ $\forall x \in [-1,0[$. Essendo G derivabile G è continua. Quindi $G(x) = c$ $\forall x \in [-1,0]$. Poi,

$$x = \int_0^x f(t)\,dt = G(x) - G(0),$$

quindi $G(x) = x + c$ $\forall x \in [0,1]$. Ma allora $G(x) = \begin{cases} x+c & \text{se } x \in [0,1] \\ c & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$ non è derivabile in 0, essendo $G'(0^+) = 1$, $G'(0^-) = 0$. Contraddizione!