ANALISI 1 | me 3/4/19

Massimi e minimi relativi per funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sappiamo già che se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, allora

f crescente $\iff f' \geq 0$ in I

f decrescente $\iff f' \leq 0$ in I,

$f' > 0$ in $I \Rightarrow f$ strettamente crescente,

$f' < 0$ in $I \Rightarrow f$ strettamente decrescente.

Definizione. Sia $f: I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$. Diciamo che x_0 è punto di massimo relativo per f se esiste $U =]x_0 - r, x_0 + r[$, $r > 0$, tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap I$. Diciamo che x_0 è punto di minimo relativo per f, se esiste $U =]x_0 - r, x_0 + r[$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap I$.

Teo. (di Fermat) Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile, e se x_0 è un punto interno a I, allora, se x_0 è punto di massimo o minimo relativo per f, si ha $f'(x_0) = 0$.

dim. Sia $r > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per $|x - x_0| \leq r$; allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x < x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x > x_0 \end{cases},$$ e dunque $f'(x_0)$ deve essere 0.

Idem se $f(x) \geq f(x_0)$ per $|x - x_0| \leq r$. $\square$

Proposizione Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, sia x_0 un punto interno a I.

(i) Se x_0 è punto di massimo relativo per f, allora $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\le 0$.

(ii) Se x_0 è punto di minimo relativo per f, allora $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\ge 0$.

(iii) Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$, allora x_0 è punto di massimo relativo per f.

(iv) Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$, allora x_0 è punto di minimo relativo per f.

dim. (iii) Sia $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$. Per permanenza del segno, si ha

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} = \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} < 0 \quad \text{se } |x-x_0|<r \text{ e } r \text{ è abbastanza piccolo.}$$

Quindi, per $|x-x_0|<r$ si ha $f'(x)>0$ per $x>x_0$ e $f'(x)<0$ per $x<x_0$.
Perciò f cresce in $]x_0-r, x_0]$ e decresce in $[x_0, x_0+r[$, e dunque x_0 è punto di massimo relativo.

(iv) Idem, con disuguaglianze rovesciate.

(i) Se, per assurdo, nel punto x_0 di massimo relativo si avesse $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$, da (iv) dedurremmo che x_0 sarebbe punto di minimo relativo.
Ma allora f sarebbe costante in $]x_0-r, x_0+r[$, dovendo avere simultaneamente

$$f(x)\le f(x_0)\le f(x) \quad \forall x\in]x_0-r, x_0+r[.$$

Ne seguirebbe $f''(x_0)=0$: assurdo.

(ii) Idem, con disuguaglianze rovesciate. □

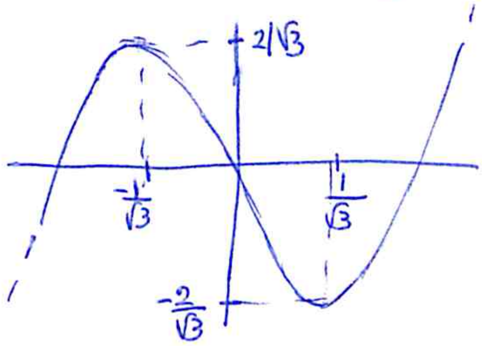
Osservazione Se $I=[a,b]$ e se $x_0=a$ è punto di massimo (minimo) relativo, allora $f'(x_0)\le 0$ ($f'(x_0)\ge 0$), e nulla può dirsi su $f''(x_0)$.
Se $x_0=b$, idem con disuguaglianze rovesciate.

Esempi (1) $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$. Poichè

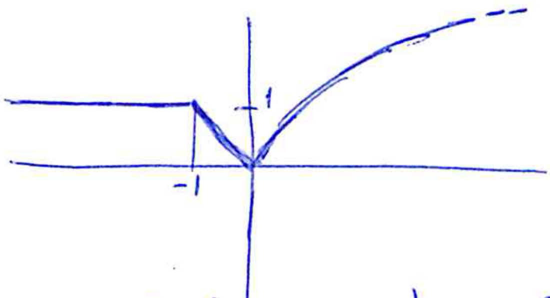
$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 0 \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

la f è crescente in $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, decrescente in $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, crescente in $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. Quindi $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di massimo relativo, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo relativo, con

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

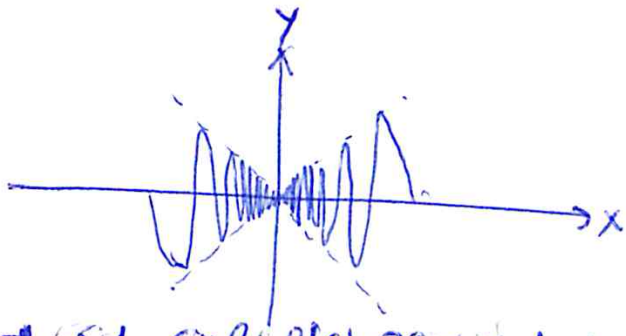


(2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ -x & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$



La f ha il punto di minimo relativo $x_0 = 0$ (con $f(0) = 0$) e gli infiniti punti di massimo relativo $x \in]-\infty, -1]$, con $f(x) = 1$. Il punto 0 è anche punto di minimo assoluto.

(3) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Si ha $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x}$. Si ha $f'(x) = 0 \iff \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. L'equazione ha infinite soluzioni: $\operatorname{tg} t = t$ ha una soluzione $t_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ e una soluzione $t'_k = -t_k \in]-(k+1)\pi, -k\pi[$. Posto $x_k = \frac{1}{t_k}$, si ha $f''(\pm x_k) < 0$ se k è pari, $f''(\pm x_k) > 0$ se k è dispari; quindi $\pm x_k$ sono punti di massimo relativo se k è pari, di minimo relativo se k è dispari.

Studio del grafico di una funzione

- dominio della funzione
- limiti agli estremi del dominio, intersezioni con gli assi
- asintoti
- punti di discontinuità, con calcolo di $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$
- intervalli di monotonia
- punti x_0 di massimo e di minimo relativo, con calcolo di $f(x_0)$ e $f'(x_0)$.
- punti angolosi x_0, con calcolo di $f(x_0)$, $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$.
- punti di flesso x_0 (dove $f''(x_0)=0$), con calcolo di $f(x_0)$ e $f'(x_0)$
- intervalli di concavità (dove f' decresce) e di convessità (dove f' cresce).

Esempio: $f(x)=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.

- f è definita per $\begin{cases} 4x^2-1\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \end{cases}$, cioè per $x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$.
- Si ha $f(\pm 1)=\sqrt{3}$. Inoltre f è pari ($f(x)=f(-x)$) e $f>0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2-1=1,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{4-1/x^2}-\sqrt{1-1/x^2}-1\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[2\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{2x^2}=0.$$

Quindi per $x\to+\infty$ vi è l'asintoto $y=x$, e per $x\to-\infty$ vi è l'asintoto $y=-x$.

- $f'(x) = x\left[\dfrac{4}{\sqrt{4x^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right] \geq 0$ (quando $x \geq 1$).

$$\iff \quad \frac{4}{\sqrt{4x^2-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \iff 4x^2-1 \leq 16x^2-16$$

$$\iff 12x^2 \geq 15 \iff x \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dunque f cresce in $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ e decresce in $\left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
Per simmetria, f decresce in $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ e cresce in $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right]$.
Dunque $\frac{\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo relativo (e $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo relativo). Si ha $f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Invece 1 è punto di massimo relativo, con $f(1) = \sqrt{3}$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$.

- $f''(x) = \dots\dots = \dfrac{-4}{(4x^2-1)^{3/2}} + \dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}} \geq 0 \iff$

$$4(x^2-1)^{3/2} \leq (4x^2-1)^{3/2} \iff (4-2^{4/3})x^2 \geq 1-2^{4/3}$$

sempre vera perché $4-2^{4/3} > 0 > 1-2^{4/3}$.
Dunque f è sempre <u>convessa</u> (f' sempre crescente) per $x \geq 1$ ed anche, per simmetria, per $x \leq -1$.